**Università degli Studi di Pisa**

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi di Laurea Magistrale in Finanza Matematica

# Misure convesse di rischio e dinamiche delle loro funzioni di penalità

Teoria assiomatica ed applicazioni

Candidato:
**Dott. Marco Tarsia**
**Matricola 454761**

Relatore:
**Prof. Maurizio Pratelli**
Controrelatore:
**Prof. Marco Romito**

**Anno Accademico 2016–2017**

*Alla mia bellissima famiglia*

# Indice

# Introduzione

La teoria assiomatica delle misure convesse di rischio è indubbiamente molto recente: potremmo infatti far risalire le sue origini all'anno 1999 per mano di P. Artzner, F. Delbaen, J. Eber e D. Heath nell'articolo [Art99], ripreso poi nell'anno 2000 dal solo F. Delbaen in [Del00], nei quali per l'esattezza vengono introdotti e studiati gli assiomi che definiscono una misura coerente di rischio e le prime peculiarità notevoli a riguardo.

Nel corso di questo lavoro di tesi estendiamo tale nozione dapprima a quella di misura convessa di rischio, attenendoci principalmente al manuale [Föl08] (riedito), all'articolo [Föl02] ed alle dispense [Pra16], e successivamente a quella di misura convessa condizionale e dinamica di rischio, rifacendoci senz'altro ai due articoli [Det05] e soprattutto [Föl06]: presentiamo così una robusta teoria assiomatica, appunto, arricchita per di più da molteplici esempi ed applicazioni d'interesse anche considerevole.

Fissiamo dunque uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, da intendere come subordinato ad un dato modello di mercato finanziario, ed un sottospazio lineare $\mathcal{X}$ di $L^0(\mathbf{P})$ (reale) da far corrispondere invece alla totalità delle posizioni finanziarie delle quali desideriamo una stima quantitativa del rischio inerente.

Allora una misura convessa di rischio $\rho$ su $\mathcal{X}$ è una mappa scalare definita su $\mathcal{X}$ che verifica tre proprietà algebrico-analitiche chiamate di monotonìa, d'invarianza per traslazioni e di convessità. Una misura convessa di rischio vien detta coerente se fruisce in aggiunta della proprietà chiamata di positiva omogeneità.

Per ogni variabile aleatoria $X \in \mathcal{X}$, viene attribuito il significato di rischio della posizione $X$ proprio al numero $\rho(X)$ e conseguentemente la posizione $X$ è reputata per convenzione tanto più rischiosa quanto più $\rho(X)$ cresce verso $+\infty$ oppure, al contrario, tanto meno rischiosa quanto più $\rho(X)$ decresce verso $-\infty$ e comunque rischiosa in modo accettabile nel caso che sia $\rho(X) \leq 0$.

In effetti ogni misura convessa di rischio $\rho$ su $\mathcal{X}$ risulta caratterizzata dal sottoinsieme non vuoto $\mathcal{A}_\rho$ di $\mathcal{X}$ chiamato insieme di accettazione secondo $\rho$, dato per definizione da

$$\mathcal{A}_\rho \overset{def}{=} \{ X \in \mathcal{X} \mid \rho(X) \leq 0 \}$$

e tale per cui valga la seguente identità fondamentale molto naturale: per ogni $X \in \mathcal{X}$,

$$\rho(X) = \inf \{ m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A}_\rho \} .$$

Gli insiemi di accettazione soddisfano alcune condizioni geometriche notevoli e, viceversa, ogni sottoinsieme non vuoto $\mathcal{A}$ di $\mathcal{X}$ che goda di opportune caratteristiche determina univocamente la misura convessa di rischio $\rho_{\mathcal{A}}$ su $\mathcal{X}$ definita ponendo

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) \overset{def}{=} \inf\{\, m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A}\,\}, \quad X \in \mathcal{X}.$$

Qualora lo spazio $L^1(\mathbf{P})$ risulti separabile, tutte le misure convesse di rischio $\rho$ su $\mathcal{X} \equiv L^\infty(\mathbf{P})$ le quali possiedano una speciale proprietà tipo di continuità dall'alto (rispetto alla convergenza $\mathbf{P}$-q.c.) chiamata di Fatou ammettono una formula di rappresentazione piuttosto intuitiva e così descritta: esiste una funzione $\alpha_\rho \colon \{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}\} \to \,]-\infty, +\infty]$ con $\inf_{\mathbf{Q}\ll\mathbf{P}} \alpha_\rho(\mathbf{Q}) \in \mathbb{R}$ detta di penalità tale che, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho(X) = \sup_{\substack{\mathbf{Q}\ll\mathbf{P} \\ \alpha_\rho(\mathbf{Q})<+\infty}} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha_\rho(\mathbf{Q}) \Big\}$$

ed inoltre tra queste funzioni di penalità ne esiste una minima (in senso puntuale) la quale è definita ponendo, per ogni probabilità $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$,

$$\alpha_\rho^{\min}(\mathbf{Q}) \overset{def}{=} \sup_{Y \in \mathcal{A}_\rho} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y] \equiv \sup_{X \in L^\infty(\mathbf{P})} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \rho(X) \Big\}.$$

Se poi $\rho$ fosse una misura coerente di rischio su $L^\infty(\mathbf{P})$, allora tale formula diventerebbe

$$\rho(X) = \sup_{\substack{\mathbf{Q}\ll\mathbf{P} \\ \alpha_\rho(\mathbf{Q})=0}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X], \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}).$$

Per ciò il rischio di un'arbitraria posizione $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ secondo una data misura convessa di rischio $\rho$ su $L^\infty(\mathbf{P})$ che possieda la proprietà di Fatou coincide con la peggior perdita attesa penalizzata possibile associata a $X$ stessa fra quelle calcolate rispetto ad un'intera classe di diversi modelli probabilistici $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Q})$ dove $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$.

Comunque, in particolare, una misura convessa di rischio $\rho \equiv \rho_{\mathcal{A}}$ su $L^\infty(\mathbf{P})$ definita a partire da un dato insieme di accettazione $\mathcal{A} \subseteq L^\infty(\mathbf{P})$ e la quale possiede la proprietà di Fatou è completamente individuata dalla sua minima funzione di penalità $\alpha_{\rho_{\mathcal{A}}}^{\min}$.

Per un più generico sottospazio $\mathcal{X} \supsetneqq L^\infty(\mathbf{P})$ è possibile dimostrare invece quanto segue: se esiste una misura coerente di rischio $\rho$ su tutto $\mathcal{X} \equiv L^0(\mathbf{P})$, allora lo spazio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ dev'essere uno spazio atomico.

Questa prima parte di teoria assiomatica, trattata ampiamente nel primo capitolo, fa da base in primo luogo ad una parte applicativa costituita da alcuni esempi rilevanti ben dettagliati, per i quali occorrono pure varie tecniche analitico-probabilistiche interessanti e talvolta complesse, spiegati nel secondo capitolo: dalla Tail Conditional Expectation di livello $\alpha \in \,]0,1[$ alle sofisticate misure convesse di rischio definite in termini delle cosiddette funzioni di perdita o di opportuni vincoli di commercio.

Fa da base in secondo luogo ad un'estensione della teoria stessa, esposta nel terzo ed ultimo capitolo, in quella delle cosiddette misure convesse condizionali e dinamiche di rischio: assegnato $T \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, denotato $\mathcal{T} \doteq \{0, 1, \ldots, T\}$ e scelta una filtrazione $\mathbb{F} \equiv (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ sullo spazio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, una misura convessa condizionale di rischio al tempo $t \in \mathcal{T}$ è una mappa $\rho_t \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to L_t^\infty(\mathbf{P}) := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$

che verifica quattro proprietà chiamate di monotonìa, d'invarianza $\mathcal{F}_t$-condizionale per traslazioni, di convessità $\mathcal{F}_t$-condizionale e di normalizzazione.

Una misura convessa condizionale di rischio al tempo $t \in \mathcal{T}$ vien detta coerente se presenta anche la proprietà chiamata di positiva omogeneità $\mathcal{F}_t$-condizionale.

Una successione $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ di misure convesse condizionali di rischio (rispettivamente coerenti) è chiamata misura convessa dinamica di rischio (rispettivamente coerente).

Ogni misura convessa condizionale di rischio $\rho_t$ al tempo $t \in \mathcal{T}$ resta caratterizzata dal proprio insieme di accettazione $\mathcal{A}_t \equiv \{\, X \in L^\infty(\mathbf{P}) \mid \rho_t(X) \leq 0 \ (\mathbf{P}\text{-q.c.})\,\}$, in corrispondenza del quale sussiste l'identità $\rho_t(X) = \operatorname{ess\,inf}\{\, X_t \in L_t^\infty(\mathbf{P}) \mid X + X_t \in \mathcal{A}_t\,\}$, $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, e viceversa opportuni sottoinsiemi non vuoti di $L^\infty(\mathbf{P})$ definiscono in modo univoco misure convesse dinamiche di rischio.

Nel caso di nuovo che lo spazio $L^1(\mathbf{P})$ risulti separabile, tutte le misure convesse condizionali di rischio $\rho_t$ al tempo $t \in \mathcal{T}$ le quali possiedano una proprietà chiamata ancora di Fatou ammettono una formula di rappresentazione: esiste un insieme $\mathcal{P}_t$ con $\{\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}\} \subseteq \mathcal{P}_t \subseteq \{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}\}$ ed esiste una funzione $\alpha_t \colon \mathcal{P}_t \to L^0((\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}); ]-\infty, +\infty])$ con $\operatorname{ess\,inf}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{P}_t} \alpha_t(\mathbf{Q}) = 0$ ($\mathbf{P}$-q.c.) detta di penalità tali che, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{P}_t} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t(\mathbf{Q}) \Big\}$$

ed inoltre tra queste funzioni di penalità ne esiste una minima che è definita ponendo, per ogni probabilità $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$,

$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \overset{def}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{Y\in\mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y \,|\, \mathcal{F}_t] \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{X\in L^\infty(\mathbf{P})} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \rho_t(X) \Big\}.$$

Gli sviluppi della teoria tendono a raffinare progressivamente una rappresentazione del genere nonché a risaltare le dinamiche più ragguardevoli delle minime funzioni di penalità, e per questo vengono introdotte la nozione di sensibilità e, soprattutto, quella di consistenza temporale: una misura convessa dinamica di rischio $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è detta consistente rispetto al tempo (in senso forte) se, per ogni $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$, vale la ricorsione $\rho_t(-\rho_{t+1}) = \rho_t$ ($\mathbf{P}$-q.c.). Il legame che viene a stringersi di conseguenza tra tutte le diverse misure della successione si rivela equivalente ad una significativa condizione di super-martingala rispetto a $\mathbb{F}$ per un particolare processo stocastico reale il quale contraddistingue la successione stessa.

Vengono studiati infine quei problemi collaterali al passaggio al limite per $T \to +\infty$ corrispondenti ai due concetti di sicurezza asintotica e di precisione asintotica, connessi all'interrogativo su quando al variare di $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ la successione $\rho_t(X)$ converga o meno per $t \to +\infty$ (e $\mathbf{P}$-q.c.) alla perdita finale effettiva $-X$, per poi illustrare il tutto per mezzo di un importante esempio conclusivo: quello dato dalla misura dinamica entropica di rischio di parametro $\gamma > 0$ definita ponendo, per ogni $t \in \mathcal{T}$ e $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho_t(X) \doteq \frac{1}{\gamma} \log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X} \,|\, \mathcal{F}_t]$$

la cui successione delle rispettive minime funzioni di penalità $(\alpha_t^{\min})_{t\in\mathcal{T}}$ rimane proprio determinata dall'entropia relativa $\mathcal{F}_t$-condizionale $\widehat{H}_t(\,\cdot \,|\, \mathbf{P})$ ad ogni tempo $t \in \mathcal{T}$.

Le fonti bibliografiche legate all'apparato di probabilità più o meno avanzata sul quale poggia l'intero lavoro sono il manuale [Kle14] e le dispense [Pra12] e [Fla14].

# Capitolo 1

# Teoria assiomatica delle misure convesse di rischio

## 1.1 Misure convesse di rischio

### 1.1.1 Scenario, posizioni e prime proprietà

Poniamo il nostro punto di vista all'interno di un determinato modello matematico (multi-periodale) di mercato finanziario. Giusto per fissare le idee, possiamo immaginare che questo modello presenti molteplici caratteristiche di regolarità anche interessanti quali ad esempio l'impossibilità d'intraprendere strategie finanziarie di arbitraggio, o come la proprietà di completezza nella replicabilità esatta degli attivi aleatori.

Tuttavia dobbiamo restare consapevoli del fatto che debba esser inteso in ogni caso come modello ridotto, circoscritto, non necessariamente privilegiato in assoluto, al di là di quanto possa risultare esauriente e realistico.

Rimane comunque fissato in particolare uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ più o meno complesso il quale, a riguardo della ben precisa situazione economica modellizzata, rappresenta tutti e soli i possibili scenari ad una prescelta data futura $T \in ]0, +\infty[$ di scadenza o di maturazione.

**Definizione 1.1.1** (Scenario)**.** Chiamiamo *spazio degli scenari*, o più brevemente *scenario*, lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sottostante.

Il modello di mercato in questione consiste così dello scenario $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, di una opportuna filtrazione $\mathbb{F}$ su di esso (o a tempi finiti o a tempi continui che sia) e di tutta una serie di processi stocastici reali $\mathbb{F}$-adattati che descrivono l'evoluzione del valore commercializzato sia di certi titoli con o senza rischio $S^i$, ovvero di stocks o bonds, sia quindi di certi portafogli autofinanziati $V^j$ d'investimento costruiti su tali titoli.

Ciascuna delle diverse variabili aleatorie reali coincidenti ($\mathbf{P}$-quasi certamente) con quelle terminali di tutti questi processi stocastici in gioco riproduce dunque il valor netto risultante a fine periodo della corrispondente posizione finanziaria sul mercato.

**Definizione 1.1.2** (Posizione)**.** Chiamiamo *posizione finanziaria*, o semplicemente *posizione*, ogni generica v.a.r. $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ sullo scenario, ovvero ogni $X \in L^0(\mathbf{P})$.

*Nota* 1.1.1. Viene adottata la seguente notazione standard (prettamente insiemistica): per ogni $p \in \{0\} \cup [1, +\infty]$ e per ogni probabilità $\mathbf{Q}$ su $\mathcal{F}$ tale che $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$,

$$L^p(\mathbf{Q}) \equiv L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Q}) \equiv L^p((\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Q}); \mathbb{R}).$$

La ragion d'essere della teoria assiomatica delle misure convesse di rischio, come di una più generica teoria assiomatica delle misure di rischio, combacia col profondo interesse in una valida e severa valutazione quantitativa del rischio inerente ad una data posizione finanziaria.

Matematicamente si tratta di associare in maniera adeguata un numero reale "rischio" ad ognuna di quelle posizioni $X$ sulle quali desideriamo lavorare: scelto un sottoinsieme non vuoto $\mathcal{X}$ di $L^0(\mathbf{P})$, si tratta cioè di costruire una speciale mappa scalare

$$\rho\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$$

che soddisfi alcune condizioni di consistenza le quali ne giustifichino sufficientemente la qualifica di misura di rischio.

Una volta definita una ragionevole misura di rischio $\rho$ su $\mathcal{X}$ alla quale affidarsi, una posizione $X$ di $\mathcal{X}$ sarà da giudicare per convenzione tanto più rischiosa quanto più $\rho(X)$ cresce verso $+\infty$ o, al contrario, tanto meno rischiosa quanto più $\rho(X)$ decresce verso $-\infty$, con l'idea astratta che il valore estremo $\rho(X) = +\infty$ corrisponda ad una posizione $X$ irrimediabilmente insanabile mentre il valore estremo $\rho(X) = -\infty$ corrisponda ad una fittizia posizione $X$ incondizionatamente vincente.

In particolare, giustamente, nessuna posizione $X \in \mathcal{X}$ verrà considerata secondo $\rho$ come veramente priva di rischio quanto piuttosto come rischiosa in modo ammissibile, in modo accettabile.

Chiameremo *posizione accettabile secondo* $\rho$ ogni $X \in \mathcal{X}$ tale che risulti $\rho(X) \leq 0$, e chiameremo quindi *insieme di accettazione secondo* $\rho$, denotandolo $\mathcal{A}_\rho$, il sottoinsieme di $\mathcal{X}$ costituito da tutte e sole le posizioni accettabili secondo $\rho$, ovvero

$$\mathcal{A}_\rho \overset{def}{=} \{\, X \in \mathcal{X} \mid \rho(X) \leq 0 \,\}.$$

Così una designata misura di rischio $\rho$ su $\mathcal{X}$ determina il sottoinsieme di $\mathcal{X}$ delle posizioni da considerarsi accettabili secondo $\rho$ stessa. È invece una sorta di viceversa che porta ad una possibile idea essenziale nell'interpretazione di una generica misura di rischio $\rho$ su $\mathcal{X}$: scelto infatti un sottoinsieme non vuoto $\mathcal{A}$ di $\mathcal{X}$, ed inteso questo come l'insieme delle posizioni accettabili in un qualche senso o secondo un qualche criterio, allora per ogni $X \in \mathcal{X}$ pensiamo la quantità $\rho(X) \equiv \rho_{\mathcal{A}}(X)$ come coincidente col minimo ammontare di capitale (quello ottimale) tale per cui, se aggiunto alla posizione finanziaria $X$ all'inizio del periodo immobilizzandolo su di un titolo di mercato a rischio zero, rende in definitiva accettabile (ossia in $\mathcal{A}$) la posizione così ribilanciata.

Formalmente, ma ancora non rigorosamente, un fissato sottoinsieme non vuoto $\mathcal{A}$ di $\mathcal{X}$ determina cioè la misura di rischio $\rho_{\mathcal{A}}$ su $\mathcal{X}$ definita ponendo, per ogni $X \in \mathcal{X}$,

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) \overset{def}{=} \inf \{ m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A} \} .$$

Osserviamo a proposito che, nel caso possedessimo già una misura di rischio $\rho$ su $\mathcal{X}$, allora sarebbe del tutto naturale che risultasse

$$\rho_{\mathcal{A}_\rho} = \rho$$

oppure, equivalentemente, che per ogni $X \in \mathcal{X}$ risultasse

$$\inf \{ m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A}_\rho \} \equiv \inf \{ m \in \mathbb{R} \mid \rho(X + m) \leq 0 \} = \rho(X)$$

assumendo perlomeno che l'insieme $\mathcal{X}$ sia chiuso rispetto all'operazione di somma con le funzioni costanti ($\mathbf{P}$-quasi certamente).

Possiamo finalmente passare alla vera e propria teoria assiomatica delle misure convesse di rischio. Fissiamo una volta per tutte uno scenario $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ed un sottospazio lineare (reale) $\mathcal{X}$ di $L^0(\mathbf{P})$, ovvero $\mathcal{X} < L^0(\mathbf{P})$, nel quale siano incluse tutte le costanti: in particolare,

$$\forall\, m \in \mathbb{R},\ m \in \mathcal{X} \quad \text{e} \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall\, X, Y \in \mathcal{X},\ \lambda X + \mu Y \in \mathcal{X}.$$

**Definizione 1.1.3** (Misura convessa di rischio)**.** Chiamiamo *misura convessa di rischio su* $\mathcal{X}$ ogni mappa $\rho \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ la quale verifichi le tre seguenti proprietà.

**(R1)** *Monotonìa*: $\forall\, X, Y \in \mathcal{X}$, se $X \geq Y$ ($\mathbf{P}$-q.c.) allora $\rho(X) \leq \rho(Y)$.

**(R2)** *Invarianza per traslazioni*: $\forall\, X \in \mathcal{X}$ e $\forall\, k \in \mathbb{R}$, $\rho(X + k) = \rho(X) - k$.

**(R3)** *Convessità*: $\forall\, X, Y \in \mathcal{X}$ e $\forall\, \lambda \in ]0, 1[$, $\rho(\lambda X + (1 - \lambda) Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda) \rho(Y)$.

Chiamiamo *misura convessa di rischio* una misura convessa di rischio $\rho$ su $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$.

**Definizione 1.1.4** (Rischio di una posizione)**.** Sia $\rho$ una misura convessa di rischio su $\mathcal{X}$. Per ogni $X \in \mathcal{X}$, chiamiamo *rischio secondo $\rho$ della posizione* $X$ lo scalare $\rho(X)$.

Sia $\rho$ una misura convessa di rischio su $\mathcal{X}$. Allora le tre condizioni (R1), (R2) e (R3) della definizione 1.1.3 possono venir descritte a parole come segue.

(R1) Per ogni $X, Y \in \mathcal{X}$, se la posizione $X$ non è perdente quanto la posizione $Y$, allora il rischio secondo $\rho$ di $X$ non è superiore al rischio secondo $\rho$ di $Y$.

(R2) Per ogni $X \in \mathcal{X}$ e $k \in \mathbb{R}$, il rischio secondo $\rho$ della posizione $X + k$, cioè della posizione $X$ riscalata additivamente di $k$, coincide col rischio secondo $\rho$ della sola posizione $X$ riscalato additivamente di $-k$.

(R3) Per ogni $X, Y \in \mathcal{X}$ e $\lambda \in ]0, 1[$, il rischio secondo $\rho$ della posizione diversificata $\lambda X + (1 - \lambda) Y$ non è superiore alla corrispondente media pesata con $\lambda$ e $1 - \lambda$ dei due singoli rischi secondo $\rho$ delle posizioni $X$ e $Y$ rispettivamente.

Notiamo pure come le definizioni 1.1.3 e 1.1.4 necessitino solamente che l'insieme $\mathcal{X} \subseteq L^0(\mathbf{P})$ sia chiuso rispetto all'operazione di somma delle costanti e che sia convesso.

*Osservazione* 1.1.1. Sia $\rho$ una misura convessa di rischio su $\mathcal{X}$. Allora deriva subito dalla proprietà (R2) d'invarianza per traslazioni che $\rho$ è una mappa surgettiva: in simboli,

$$\rho(\mathcal{X}) = \mathbb{R}.$$

Sempre la proprietà (R2) d'invarianza per traslazioni implica pure che, per ogni $X \in \mathcal{X}$,

$$\rho(X + \rho(X)) = 0.$$

**Proposizione 1.1.1.** *Sia $\rho$ una misura convessa di rischio su $\mathcal{X}$. Allora vale la seguente identità: per ogni $X \in \mathcal{X}$,*

$$\rho(X) = \inf \{\, m \in \mathbb{R} \mid \rho(X + m) \leq 0 \,\}\,. \tag{1.1}$$

*Inoltre tale estremo inferiore è in realtà un valor minimo.*

*Dimostrazione.* Si tratta di un'immediata conseguenza della proprietà (R2) d'invarianza per traslazioni: infatti, per ogni $X \in \mathcal{X}$ e $k \in \mathbb{R}$, l'uguaglianza $\rho(X + k) = \rho(X) - k$ implica subito che $\rho(X + k) \leq 0$ (risp. $=$) se e solo se $k \geq \rho(X)$ (risp. $=$), e per ciò

$$\{\, m \in \mathbb{R} \mid \rho(X + m) \leq 0 \,\} = [\rho(X), +\infty[ \tag{1.2}$$

da cui chiaramente la tesi. □

**Proposizione 1.1.2.** *Sia $\rho$ una misura convessa di rischio su $\mathcal{X}$. Allora valgono le due seguenti proprietà al limite sulle successioni in $\mathcal{X}$ le quali siano monotòne.*

- *Per ogni successione $(X_n)_n$ in $\mathcal{X}$ la quale sia non crescente e tale che $\inf_n X_n \in \mathcal{X}$, la successione scalare $(\rho(X_n))_n$ è non decrescente e tale che $\sup_n \rho(X_n) \leq \rho(\inf_n X_n)$: in simboli, se $X_n \downarrow X$ $\mathbf{P}$-q.c. in $\mathcal{X}$, allora $\sup_n \rho(X_n) \leq \rho(X)$.*

- *Per ogni successione $(X_n)_n$ in $\mathcal{X}$ la quale sia non decrescente e tale che $\sup_n X_n \in \mathcal{X}$, la successione scalare $(\rho(X_n))_n$ è non crescente e tale che $\inf_n \rho(X_n) \geq \rho(\sup_n X_n)$: in simboli, se $X_n \uparrow X$ $\mathbf{P}$-q.c. in $\mathcal{X}$, allora $\inf_n \rho(X_n) \geq \rho(X)$.*

*Dimostrazione.* È un corollario davvero semplice della proprietà (R1) di monotonìa: da una parte, infatti, se $X_n \downarrow X$ $\mathbf{P}$-q.c. in $\mathcal{X}$ allora, per ogni $n$, $X_{n+1} \geq X_n \geq X$ e quindi $\rho(X_{n+1}) \leq \rho(X_n) \leq \rho(X)$. D'altra parte, analogamente, se invece $X_n \uparrow X$ $\mathbf{P}$-q.c. in $\mathcal{X}$ allora, per ogni $n$, $X_{n+1} \leq X_n \leq X$ e quindi $\rho(X_{n+1}) \geq \rho(X_n) \geq \rho(X)$. □

**Definizione 1.1.5** (Misura convessa normalizzata di rischio)**.** Chiamiamo *misura convessa normalizzata di rischio su $\mathcal{X}$* ogni misura convessa di rischio $\rho$ su $\mathcal{X}$ per la quale risulti $\rho(0) = 0$.

Notiamo come la definizione 1.1.5 necessiti solamente che l'insieme $\mathcal{X} \subseteq L^0(\mathbf{P})$ contenga tutte le costanti, che sia chiuso rispetto all'operazione di somma delle costanti e che sia convesso.

*Osservazione* 1.1.2. Sia $\rho$ una misura convessa di rischio su $\mathcal{X}$. Allora, per ogni $k \in \mathbb{R}$, vale $\rho(k) = \rho(0) - k$ grazie alla proprietà (R2) d'invarianza per traslazioni. In particolare, $\rho$ è normalizzata se e solo se, per ogni $k \in \mathbb{R}$, $\rho(k) = -k$.

### 1.1.2 Misure coerenti di rischio

**Definizione 1.1.6** (Misura coerente di rischio)**.** Chiamiamo *misura coerente di rischio su* $\mathcal{X}$ ogni mappa $\rho^\star\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ la quale verifichi le quattro seguenti proprietà.

**(R1$^\star$)** *Positiva monotonìa*: $\forall\, X \in \mathcal{X}$, se $X \geq 0$ (**P**-q.c.) allora $\rho^\star(X) \leq 0$.

**(R2$^\star$)=(R2)** Invarianza per traslazioni: $\forall\, X \in \mathcal{X}$ e $\forall\, k \in \mathbb{R}$, $\rho^\star(X + k) = \rho^\star(X) - k$.

**(R3$^\star$)** *Positiva omogeneità*: $\forall\, X \in \mathcal{X}$ e $\forall\, \lambda \in ]0, +\infty[$, $\rho^\star(\lambda X) = \lambda\rho^\star(X)$.

**(R4$^\star$)** *Subadditività*: $\forall\, X, Y \in \mathcal{X}$, $\rho^\star(X + Y) \leq \rho^\star(X) + \rho^\star(Y)$.

Chiamiamo *misura coerente di rischio* una misura coerente di rischio $\rho^\star$ su $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$.

Sia $\rho^\star$ una misura coerente di rischio su $\mathcal{X}$. Allora le quattro condizioni (R1$^\star$), (R2$^\star$), (R3$^\star$) e (R4$^\star$) della definizione 1.1.6 possono venir descritte a parole come segue.

(R1$^\star$) Per ogni $X \in \mathcal{X}$, se la posizione $X$ non è perdente, allora essa è rischiosa secondo $\rho^\star$ in modo accettabile.

(R2$^\star$)=(R2) Per ogni $X \in \mathcal{X}$ e $k \in \mathbb{R}$, il rischio secondo $\rho^\star$ della posizione $X + k$, cioè della posizione $X$ riscalata additivamente di $k$, coincide col rischio secondo $\rho^\star$ della sola posizione $X$ riscalato additivamente di $-k$.

(R3$^\star$) Per ogni $X \in \mathcal{X}$ e $\lambda \in ]0, +\infty[$, il rischio secondo $\rho^\star$ della posizione $\lambda X$, cioè della posizione $X$ riscalata moltiplicativamente di $\lambda$, coincide col rischio secondo $\rho^\star$ della sola posizione $X$ riscalato moltiplicativamente sempre di $\lambda$.

(R4$^\star$) Per ogni $X, Y \in \mathcal{X}$, il rischio secondo $\rho^\star$ della posizione diversificata $X + Y$ non è superiore alla corrispondente somma dei due singoli rischi secondo $\rho^\star$ delle posizioni $X$ e $Y$ rispettivamente.

Notiamo come la definizione 1.1.6 necessiti solamente che l'insieme $\mathcal{X} \subseteq L^0(\mathbf{P})$ sia un cono contenente le costanti e che sia chiuso rispetto all'operazione di somma (quindi, a maggior ragione, conterrebbe tutte le costanti e sarebbe sia chiuso rispetto all'operazione di somma delle costanti ché convesso).

**Proposizione 1.1.3.** *Sia $\rho^\star$ una misura coerente di rischio su $\mathcal{X}$. Allora $\rho^\star$ è una misura convessa normalizzata di rischio su $\mathcal{X}$.*

*Dimostrazione.* Le due proprietà (R1$^\star$) di positiva monotonìa e (R4$^\star$) di subadditività danno in modo elementare la proprietà (R1) di monotonìa: per ogni $X, Y \in \mathcal{X}$, infatti, se $X \geq Y$, ovvero se $X - Y \geq 0$, allora $\rho^\star(X - Y) \leq 0$ grazie a (R1$^\star$) e quindi, grazie anche a (R4$^\star$), $\rho^\star(X) = \rho^\star(Y + (X - Y)) \leq \rho^\star(Y) + \rho^\star(X - Y) \leq \rho^\star(Y)$.

Le due proprietà (R4$^\star$) di subadditività e (R3$^\star$) di positiva omogeneità, invece, danno immediatamente la proprietà (R3) di convessità: per ogni $X, Y \in \mathcal{X}$ e $\lambda \in ]0, 1[$, infatti, $\rho^\star(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \rho^\star(\lambda X) + \rho^\star((1 - \lambda)Y) = \lambda\rho^\star(X) + (1 - \lambda)\rho^\star(Y)$.

Constatiamo infine che risulta

$$\rho^\star(0) = 0 \tag{1.3}$$

grazie alla sola proprietà (R3$^\star$) di positiva omogeneità applicata a $X = 0$ e $\lambda \neq 1$. $\square$

*Osservazione* 1.1.3. Sia $\rho^\star$ una misura coerente di rischio su $\mathcal{X}$. Allora le due proprietà (R3$^\star$) di positiva omogeneità e (R4$^\star$) di subadditività, unite alla proposizione 1.1.3 precedente e quindi all'osservazione 1.1.2 a pagina 4, fanno di $\rho^\star$ una semi-norma sullo spazio vettoriale reale $\mathcal{X}$ tale che $\rho^\star(k) = -k$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

### 1.1.3 Posizioni accettabili e insiemi di accettazione

**Definizione 1.1.7** (Posizione accettabile)**.** Sia $\rho$ una misura convessa di rischio su $\mathcal{X}$. Chiamiamo *posizione accettabile secondo* $\rho$ ogni $X \in \mathcal{X}$ tale che risulti $\rho(X) \leq 0$.

**Definizione 1.1.8** (Insieme di accettazione)**.** Sia $\rho$ una misura convessa di rischio su $\mathcal{X}$. Chiamiamo *insieme di accettazione secondo* $\rho$, denotandolo $\mathcal{A}_\rho$, il sottoinsieme di $\mathcal{X}$ costituito da tutte e sole le posizioni accettabili secondo $\rho$: in simboli,

$$\mathcal{A}_\rho \overset{def}{=} \{\, X \in \mathcal{X} \mid \rho(X) \leq 0 \,\}\,.$$

*Osservazione* 1.1.4. Sia $\rho$ una misura convessa di rischio su $\mathcal{X}$. Allora l'osservazione 1.1.1 a pagina 4 fa capire chiaramente che l'insieme di accettazione $\mathcal{A}_\rho$ secondo $\rho$ è un sottoinsieme non vuoto ed anzi infinito di $\mathcal{X}$ che non coincide con tutto $\mathcal{X}$.

*Osservazione* 1.1.5. Sia $\rho$ una misura convessa di rischio su $\mathcal{X}$. Allora la proprietà (R3) di convessità implica in modo elementare che, per ogni $X, Y \in \mathcal{X}$, la mappa $\varphi(\cdot) \equiv \varphi(\cdot\,; X, Y)\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $\lambda \in [0,1]$,

$$\varphi(\lambda) \doteq \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \tag{1.4}$$

è convessa su tutto $[0,1]$ e dunque continua su tutto $]0,1[$: in simboli, per ogni $\lambda, \mu \in [0,1]$ e $\tau \in\, ]0,1[$, $\varphi(\tau\lambda + (1-\tau)\mu) \leq \tau\varphi(\lambda) + (1-\tau)\varphi(\mu)$.

**Proposizione 1.1.4.** *Sia $\rho$ una misura convessa di rischio su $\mathcal{X}$. Allora l'insieme di accettazione $\mathcal{A}_\rho$ secondo $\rho$ verifica le cinque seguenti proprietà.*

**(A0)** $\forall\, X \in \mathcal{X}$, $\rho(X) = \inf\{\, m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A}_\rho \,\}$.

**(A1)** $\forall\, X \in \mathcal{A}_\rho$ *e* $\forall\, Y \in \mathcal{X}$, *se* $Y \geq X$ ($\mathbf{P}$*-q.c.*) *allora* $Y \in \mathcal{A}_\rho$.

**(A2)** $\{\, m \in \mathbb{R} \mid m \in \mathcal{A}_\rho \,\} = [\rho(0), +\infty[$.

**(A3)** $\mathcal{A}_\rho$ *è un insieme convesso.*

**(A4)** *Se* $\mathcal{X} < L^\infty(\mathbf{P})$ *allora,* $\forall\, X \in \mathcal{A}_\rho$ *e* $\forall\, Y \in \mathcal{X}$, $\{\, \lambda \in [0,1] \mid \lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathcal{A}_\rho \,\}$ *è un sottoinsieme non vuoto, chiuso e convesso di* $[0,1]$.

*Inoltre, se $\rho \equiv \rho^\star$ è una misura coerente di rischio su $\mathcal{X}$, allora l'insieme di accettazione $\mathcal{A}_{\rho^\star}$ secondo $\rho^\star$ verifica anche le due seguenti proprietà.*

**(A5)** *$\mathcal{A}_{\rho^\star}$ è un cono contenente l'insieme $L^0_+(\mathbf{P}) \cap \mathcal{X}$.*

**(A6)** *$\forall\, X, Y \in \mathcal{A}_{\rho^\star}$, $X + Y \in \mathcal{A}_{\rho^\star}$.*

*Nota* 1.1.2. Vengono adottate le seguenti notazioni standard: $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty[$ e quindi, per ogni $p \in \{0\} \cup [1, +\infty]$ e per ogni probabilità $\mathbf{Q}$ su $\mathcal{F}$ tale che $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$,

$$L^p_+(\mathbf{Q}) \equiv L^p_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Q}) \equiv L^p((\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Q}); \mathbb{R}_+).$$

Si veda a proposito anche la nota 1.1.1 a pagina 2.

*Dimostrazione.* Risulta veramente semplice riconoscere quanto segue: la proprietà (A0) è l'identità (1.1) della proposizione 1.1.1 a pagina 4; la proprietà (A1) è un'immediata conseguenza della proprietà (R1) di monotonìa; la proprietà (A2) deriva dall'identità (1.2) sempre della proposizione 1.1.1 a pagina 4, o anche dall'osservazione 1.1.2 a pagina 4; la proprietà (A3) è un'immediata conseguenza della proprietà (R3) di convessità. Per quanto riguarda invece la proprietà (A4), torniamo all'osservazione 1.1.5, e quindi alla mappa $\varphi$ ivi definita come in (1.4), per dedurre che, per ogni $X, Y \in \mathcal{X}$, $\{\, \lambda \in ]0, 1[ \mid \lambda X + (1 - \lambda) Y \in \mathcal{A}_\rho \,\} = \varphi^{-1}(]-\infty, 0])$ è un sottoinsieme chiuso e convesso di $]0, 1[$. Così la proprietà (A4) discende subito dalla seguente elementare proposizione.

- *Se $\mathcal{X} < L^\infty(\mathbf{P})$ allora, $\forall\, X, Y \in \mathcal{X}$, se per ogni $\lambda \downarrow 0$ risulta che $\lambda X + (1-\lambda) Y \in \mathcal{A}_\rho$, allora vale che anche $Y \in \mathcal{A}_\rho$.*

La dimostrazione di questo fatto è la seguente: se $\mathcal{X} < L^\infty(\mathbf{P})$ allora, per ogni $X, Y \in \mathcal{X}$ tali che $\lambda X + (1 - \lambda) Y \in \mathcal{A}_\rho$ per ogni $\lambda \downarrow 0$, sia infatti $m \in ]0, +\infty[$ grande abbastanza affinché $|X - Y| \leq m$ (come vale ad esempio per ogni $m \geq \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty$). Allora $Y + \lambda m \in \mathcal{A}_\rho$ per ogni $\lambda \downarrow 0$ grazie alla precedente proprietà (A1), in quanto $\lambda X + (1 - \lambda) Y = Y + \lambda (X - Y) \leq Y + \lambda m$ per ogni $\lambda \in ]0, 1[$, ed ora per ipotesi $\lambda X + (1 - \lambda) Y \in \mathcal{A}_\rho$ per ogni $\lambda \downarrow 0$. Grazie invece alla proprietà (R2) d'invarianza per traslazioni, deduciamo dunque che $\rho(Y) - \lambda m = \rho(Y + \lambda m) \leq 0$, ovvero che $\rho(Y) \leq \lambda m$, per ogni $\lambda \downarrow 0$: chiaramente ciò conclude.

Sia infine $\rho \equiv \rho^\star$ una misura coerente di rischio su $\mathcal{X}$. Allora risulta davvero semplice riconoscere quanto segue: la proprietà (A5) è un'immediata conseguenza delle due proprietà (R3$^\star$) di positiva omogeneità e (R1$^\star$) di positiva monotonìa; la proprietà (A6) è un'immediata conseguenza della proprietà (R4$^\star$) di subadditività. □

*Osservazione* 1.1.6. La proprietà (A0) della proposizione 1.1.4 implica che una misura convessa di rischio è caratterizzata dal proprio insieme di accettazione. Siano infatti $\rho$ e $\rho_0$ due misure convesse di rischio su $\mathcal{X}$. Allora vale la seguente equivalenza:

$$\rho_0 \leq \rho \Leftrightarrow \mathcal{A}_\rho \subseteq \mathcal{A}_{\rho_0}.$$

Di ciò è possibile anche una semplice verifica diretta basata sulla seguente osservazione: grazie alla proprietà (R2) d'invarianza per traslazioni della quale $\rho_0$ gode, abbiamo che, per ogni $X \in \mathcal{X}$, $\rho_0(X + \rho(X)) = \rho_0(X) - \rho(X)$.

Dunque potremmo senz'altro dire che la misura di rischio $\rho$ è più severa, ovvero più penalizzante, della misura di rischio $\rho_0$.

**Proposizione 1.1.5.** *Assumiamo che $\mathcal{X} < L^\infty(\mathbf{P})$ e sia $\mathcal{A}$ un sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{X}$. Allora $\mathcal{A}$ coincide con l'insieme di accettazione $\mathcal{A}_\rho \equiv \mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}}$ secondo una misura convessa di rischio $\rho \equiv \rho_\mathcal{A}$ su $\mathcal{X}$ se e solo se $\mathcal{A}$ verifica le quattro seguenti proprietà.*

**(A1′)** $\forall X \in \mathcal{A}$ *e* $\forall Y \in \mathcal{X}$, *se* $Y \geq X$ $(\mathbf{P}$-*q.c.*$)$ *allora* $Y \in \mathcal{A}$.

**(A2′)** $\inf \{ m \in \mathbb{R} \mid m \in \mathcal{A} \} > -\infty$.

**(A3′)** *$\mathcal{A}$ è un insieme convesso.*

**(A4′)** $\forall X \in \mathcal{A}$ *e* $\forall Y \in \mathcal{X}$, $\{ \lambda \in [0,1] \mid \lambda X + (1-\lambda) Y \in \mathcal{A} \}$ *è chiuso in* $[0,1]$.

*Inoltre, $\mathcal{A}$ coincide con l'insieme di accettazione $\mathcal{A}_{\rho^\star} \equiv \mathcal{A}_{\rho^\star_\mathcal{A}}$ secondo una misura coerente di rischio $\rho^\star \equiv \rho^\star_\mathcal{A}$ su $\mathcal{X}$ se e solo se $\mathcal{A}$ verifica anche le due seguenti proprietà.*

**(A5′)** *$\mathcal{A}$ è un cono.*

**(A6′)** $\forall X, Y \in \mathcal{A}$, $X + Y \in \mathcal{A}$.

*Dimostrazione.* Tenendo conto della proprietà (A0) della precedente proposizione 1.1.4, consideriamo la mappa $\rho_\mathcal{A} \colon \mathcal{X} \to [-\infty, +\infty]$ definita ponendo, per ogni $X \in \mathcal{X}$,

$$\rho_\mathcal{A}(X) \stackrel{def}{=} \inf \{ m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A} \} \tag{1.5}$$

per la quale conveniamo che $\inf \emptyset \equiv +\infty$ come da consuetudine. Allora $\rho_\mathcal{A}$ verifica la proprietà (R2) d'invarianza per traslazioni semplicemente perché vale la seguente ovvia uguaglianza insiemistica: per ogni $X \in \mathcal{X}$ e $k \in \mathbb{R}$,

$$\{ m \in \mathbb{R} \mid X + k + m \in \mathcal{A} \} = \big\{ m' \in \mathbb{R} \bigm| X + m' \in \mathcal{A} \big\} - k.$$

Invece $\rho_\mathcal{A}$ verifica la proprietà (R1) di monotonìa poiché vale la seguente relazione insiemistica dovuta alla proprietà (A1′): per ogni $X, Y \in \mathcal{X}$ tali che $X \geq Y$,

$$\{ m \in \mathbb{R} \mid Y + m \in \mathcal{A} \} \subseteq \big\{ m' \in \mathbb{R} \bigm| X + m' \in \mathcal{A} \big\}.$$

A questo punto siamo in grado di mostrare agevolmente che $\rho_\mathcal{A}$ assume solo valori finiti: sia per questo $Y \in \mathcal{X}$ un'arbitraria posizione. Allora, da una parte, dato che $\mathcal{A} \neq \emptyset$ per ipotesi, possiamo prendere $X \in \mathcal{A}$ qualsiasi e notare a suo riguardo che $\rho_\mathcal{A}(X) \leq 0$ per definizione stessa di $\rho_\mathcal{A}$. D'altra parte, dato pure che $\mathcal{X} < L^\infty(\mathbf{P})$, possiamo scegliere $m \in \mathbb{R}$ tale per cui $X - Y \leq m$. Allora vale $\rho_\mathcal{A}(Y) \leq m < +\infty$ grazie appunto alle due proprietà appena dimostrate per $\rho_\mathcal{A}$: infatti da $Y + m \geq X$ otteniamo subito che $\rho_\mathcal{A}(Y) - m = \rho_\mathcal{A}(Y + m) \leq \rho_\mathcal{A}(X) \leq 0$.

Vale poi $\rho_\mathcal{A}(Y) > -\infty$ grazie sempre alle due proprietà appena dimostrate per $\rho_\mathcal{A}$ e grazie quindi alla proprietà (A2′), la quale può esser riformulata come $\rho_\mathcal{A}(0) > -\infty$: se scegliamo infatti $m \in \mathbb{R}$ tale per cui $Y \leq m$, o cioè $Y - m \leq 0$, allora abbiamo che $\rho_\mathcal{A}(Y) + m = \rho_\mathcal{A}(Y - m) \geq \rho_\mathcal{A}(0) > -\infty$.

Quanto dimostrato fino ad ora unito alla proprietà (A3$'$) ci permette di arrivare al fatto che $\rho_{\mathcal{A}}$ verifica anche la proprietà (R3) di convessità: siano per questo $X, Y \in \mathcal{X}$ e $\lambda \in ]0,1[$. Allora, considerate due successioni scalari minimizzanti $(m_i)_i$ e $(m_i')_i$ tali che $X + m_i \in \mathcal{A}$ e pure $Y + m_i' \in \mathcal{A}$ per ogni $i$ mentre $m_i \downarrow \rho_{\mathcal{A}}(X)$ e $m_i' \downarrow \rho_{\mathcal{A}}(Y)$ per $i \to +\infty$, abbiamo che $\lambda(X+m_i)+(1-\lambda)(Y+m_i') \in \mathcal{A}$ per ogni $i$ grazie alla proprietà (A3$'$) e che di conseguenza, sempre per ogni $i$,

$$0 \geq \rho_{\mathcal{A}}\big(\lambda(X+m_i) + (1-\lambda)(Y+m_i')\big) = \rho_{\mathcal{A}}(\lambda X + (1-\lambda)Y) - [\lambda m_i + (1-\lambda)m_i']$$

grazie alla proprietà (R2), ovvero che $\rho_{\mathcal{A}}(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda m_i + (1-\lambda)m_i'$, e adesso basta passare al limite per $i \to +\infty$.

Pertanto la mappa $\rho_{\mathcal{A}}$ è a tutti gli effetti una misura convessa di rischio su $\mathcal{X}$ ed inoltre l'insieme di accettazione $\mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}}$ secondo $\rho_{\mathcal{A}}$ risulta un soprainsieme di $\mathcal{A}$: vale cioè $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}}$. Verifichiamo ora che al contrario $\mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}} \subseteq \mathcal{A}$ grazie anche alla proprietà (A4$'$): sia per questo $X \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{A}$ qualsiasi. Osservato che, per ogni $m \in \mathbb{R}$, se $m > \rho_{\mathcal{A}}(0)$ allora $m \in \mathcal{A}$ grazie alla proprietà (A1$'$), sia anche $m \in ]\rho_{\mathcal{A}}(0), +\infty[$. Allora, dato appunto che $m \in \mathcal{A}$ mentre $X \notin \mathcal{A}$, deve esistere $\varepsilon \equiv \varepsilon_{m,X} \in ]0,1[$ tale che $\varepsilon m + (1-\varepsilon)X \notin \mathcal{A}$ in conseguenza della proprietà (A4$'$), e da questo deduciamo subito che $\varepsilon m \leq \rho_{\mathcal{A}}((1-\varepsilon)X)$ grazie di nuovo alla proprietà (A1$'$): in conclusione, $\varepsilon m \leq \rho_{\mathcal{A}}((1-\varepsilon)X) = \rho_{\mathcal{A}}(\varepsilon \cdot 0 + (1-\varepsilon)X) \leq \varepsilon\rho_{\mathcal{A}}(0) + (1-\varepsilon)\rho_{\mathcal{A}}(X)$ e quindi

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) \geq \frac{\varepsilon\big(m - \rho_{\mathcal{A}}(0)\big)}{1-\varepsilon} > 0.$$

Supponiamo infine che l'insieme $\mathcal{A}$ verifichi anche le due proprietà (A5$'$) e (A6$'$) per dimostrare che allora $\rho_{\mathcal{A}} \equiv \rho^{\star}_{\mathcal{A}}$ è una misura coerente di rischio su $\mathcal{X}$. Ebbene, $\rho_{\mathcal{A}}$ verifica in tal caso la proprietà (R3$^\star$) di positiva omogeneità perché vale la seguente uguaglianza insiemistica dovuta alla proprietà (A5$'$): per ogni $X \in \mathcal{X}$ e $\lambda \in ]0, +\infty[$,

$$\{\, m \in \mathbb{R} \mid \lambda X + m \in \mathcal{A} \,\} = \lambda \big\{\, m' \in \mathbb{R} \;\big|\; X + m' \in \mathcal{A} \,\big\}.$$

Invece $\rho_{\mathcal{A}}$ verifica la proprietà (R4$^\star$) di subadditività poiché vale la seguente relazione insiemistica dovuta alla proprietà (A6$'$): per ogni $X, Y \in \mathcal{X}$,

$$\big\{\, m' \in \mathbb{R} \;\big|\; X + m' \in \mathcal{A} \,\big\} + \big\{\, m'' \in \mathbb{R} \;\big|\; Y + m'' \in \mathcal{A} \,\big\} \subseteq \{\, m \in \mathbb{R} \mid X + Y + m \in \mathcal{A} \,\}.$$

La proposizione resta così dimostrata completamente. □

*Nota.* Vengono adottate le seguenti notazioni standard: per ogni $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, o comunque per opportuni insiemi ed opportuni scalari più generici,

$$A \pm B \equiv \{\, a \pm b \mid a \in A,\, b \in B \,\}, \quad A \pm c \equiv A \pm \{c\} \quad \text{e} \quad cA \equiv \{\, ca \mid a \in A \,\}.$$

**Corollario 1.1.1.** *Assumiamo che $\mathcal{X} < L^{\infty}(\mathbf{P})$ e sia $\mathcal{A}$ un sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{X}$ il quale verifichi le quattro proprietà* (A1$'$), (A2$'$), (A3$'$) *e* (A4$'$) *della precedente proposizione 1.1.5. Allora la mappa $\rho_{\mathcal{A}} \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $X \in \mathcal{X}$,*

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) \doteq \inf\{\, m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A} \,\} \tag{1.6}$$

*come in* (1.5) *è una misura convessa di rischio su* $\mathcal{X}$ *e l'insieme di accettazione* $\mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}}$ *secondo* $\rho_{\mathcal{A}}$ *coincide con l'insieme* $\mathcal{A}$: *in simboli,*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}}.$$

*Inoltre, se* $\mathcal{A}$ *verifica anche le due proprietà* (A5′) *e* (A6′) *sempre della precedente proposizione 1.1.5, allora* $\rho_{\mathcal{A}} \equiv \rho^{\star}_{\mathcal{A}}$ *è una misura coerente di rischio su* $\mathcal{X}$.

*Dimostrazione.* Quanto enunciato è senza dubbio alle fondamenta della precedente proposizione 1.1.5, come si evince in modo limpido dalla relativa dimostrazione. □

*Osservazione* 1.1.7. Assumiamo che $\mathcal{X} < L^{\infty}(\mathbf{P})$ e sia $\mathcal{A}$ un sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{X}$ il quale verifichi le tre proprietà (A1′), (A2′) e (A3′) della precedente proposizione 1.1.5, ma non necessariamente la (A4′). Allora la mappa $\rho_{\mathcal{A}} \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ definita come in (1.5) rimane una misura convessa di rischio su $\mathcal{X}$ e, grazie alla sola proprietà (A1′), l'insieme di accettazione $\mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}}$ secondo $\rho_{\mathcal{A}}$ verifica le tre seguenti relazioni insiemistiche:

$$\bigcap_{c \in ]0,+\infty[} \big( \mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}} + c \big) \subseteq \{ \, X \in \mathcal{X} \mid \rho_{\mathcal{A}}(X) < 0 \, \} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}}.$$

*Osservazione* 1.1.8. Sia $\rho$ una misura convessa di rischio su $\mathcal{X}$. Consideriamo un evento $A \in \mathcal{F}$ tale per cui $\mathbb{1}_A \in \mathcal{X}$. Allora, per ogni $\lambda \in [1, +\infty[$ e $k \in [\rho(\mathbb{1}_A), +\infty[$, risulta $\lambda \mathbb{1}_A + k \in \mathcal{A}_{\rho}$ grazie sia alla proprietà (R2) d'invarianza per traslazioni sia quindi alla proprietà (A1) della proposizione 1.1.4 a pagina 6.

*Nota.* Viene adottata la seguente notazione standard: per ogni $A \in \mathcal{F}$ e $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{1}_A(\omega) \equiv \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A, \\ 0, & \text{se } \omega \notin A. \end{cases}$$

## 1.2 Caratterizzazione delle misure convesse di rischio

### 1.2.1 Proprietà di Fatou

**Definizione 1.2.1** (Proprietà di Fatou)**.** Sia $\rho$ una misura convessa di rischio su $\mathcal{X}$. Diciamo che $\rho$ possiede la *proprietà di Fatou* se $\rho$ soddisfa la seguente proprietà di continuità sulle successioni in $\mathcal{X}$ che siano non crescenti.

**(RF)** Per ogni successione $(X_n)_n$ in $\mathcal{X}$ che sia non crescente e tale che $\inf_n X_n \in \mathcal{X}$, la successione scalare non decrescente $(\rho(X_n))_n$ è tale che $\sup_n \rho(X_n) = \rho(\inf_n X_n)$: in simboli, se $X_n \downarrow X$ $\mathbf{P}$-q.c. in $\mathcal{X}$, allora $\rho(X_n) \uparrow \rho(X)$.

*Osservazione* 1.2.1. Sia $\rho$ una misura convessa di rischio su $\mathcal{X}$. Allora la proposizione 1.1.2 a pagina 4 garantisce che $\rho$ possiede la proprietà di Fatou se e solo se, per ogni successione $(X_n)_n$ in $\mathcal{X}$ che sia non crescente e tale che $X := \inf_n X_n \in \mathcal{X}$, risulta $\rho(X) \leq \sup_n \rho(X_n)$.

**Proposizione 1.2.1.** *Sia $\rho$ una misura convessa di rischio su $\mathcal{X}$. Allora $\rho$ possiede la proprietà di Fatou se e solo se $\rho$ soddisfa la seguente proprietà di semi-continuità inferiore "debole" rispetto alla convergenza $\mathbf{P}$-quasi certa.*

**(RF′)** *Per ogni successione $(X_n)_n$ in $\mathcal{X}$ per la quale esista $X \in \mathcal{X}$ tale che $X_n \to X$ in senso $\mathbf{P}$-q.c. e per la quale risulti che $\sup_{k\geq n} X_k \in \mathcal{X}$ per ogni $n$, la successione scalare $(\rho(X_n))_n$ è tale che $\rho(X) \leq \liminf_n \rho(X_n)$: in simboli, se $X_n \to X$ $\mathbf{P}$-q.c. in $\mathcal{X}$ con $\sup_{k\geq n} X_k \in \mathcal{X}$, allora $\rho(X) \leq \liminf_n \rho(X_n)$.*

*Inoltre, se $\rho \equiv \rho^\star$ è una misura coerente di rischio su $\mathcal{X}$, allora $\rho^\star$ possiede la proprietà di Fatou se $\rho^\star$ soddisfa la seguente proprietà di continuità sulle successioni in $\mathcal{X}$ che siano non decrescenti.*

**(RF⋆)** *Per ogni successione $(X_n)_n$ in $\mathcal{X}$ che sia non decrescente e con $\sup_n X_n \in \mathcal{X}$, la successione scalare non crescente $(\rho^\star(X_n))_n$ è tale che $\inf_n \rho^\star(X_n) = \rho^\star(\sup_n X_n)$: in simboli, se $X_n \uparrow X$ $\mathbf{P}$-q.c. in $\mathcal{X}$, allora $\rho^\star(X_n) \downarrow \rho^\star(X)$.*

*Dimostrazione.* Assumiamo che $\rho$ soddisfi la proprietà (RF′) e verifichiamo che $\rho$ soddisfa anche la proprietà (RF): sia per questo $X_n \downarrow X$ $\mathbf{P}$-q.c. in $\mathcal{X}$. Allora abbiamo a maggior ragione che $X_n \to X$ $\mathbf{P}$-q.c. in $\mathcal{X}$ con $\sup_{k\geq n} X_k \equiv X_n \in \mathcal{X}$, e dunque che $\rho(X) \leq \liminf_n \rho(X_n)$ grazie alla proprietà (RF′). Adesso è sufficiente notare che $\liminf_n \rho(X_n) \equiv \sup_n \inf_{k\geq n} \rho(X_k) \leq \sup_n \rho(X_n)$ per concludere quindi grazie pure all'osservazione 1.2.1.

Viceversa, assumiamo che $\rho$ soddisfi la proprietà (RF) e verifichiamo che $\rho$ soddisfa anche la proprietà (RF′): sia per questo $X_n \to X$ $\mathbf{P}$-q.c. in $\mathcal{X}$ con $\sup_{k\geq n} X_k \in \mathcal{X}$. Allora abbiamo chiaramente che $X = \lim_n X_n = \limsup_n X_n \equiv \inf_n \sup_{k\geq n} X_k$, ovvero che, se $(\widetilde{X}_n)_n$ è la successione in $\mathcal{X}$ data da $\widetilde{X}_n \coloneqq \sup_{k\geq n} X_k$ per ogni $n$, allora $\widetilde{X}_n \downarrow X$ $\mathbf{P}$-q.c. in $\mathcal{X}$, e di conseguenza che $\rho(X) \leq \sup_n \rho(\widetilde{X}_n)$ grazie alla proprietà (RF). A questo punto basta osservare che $\widetilde{X}_n \geq X_k$ per ogni $k \geq n$ grazie alla definizione di $\widetilde{X}_n$, e quindi che $\rho(\widetilde{X}_n) \leq \rho(X_k)$ per ogni $k \geq n$ grazie alla proprietà (R1) di monotonìa, o equivalentemente $\rho(\widetilde{X}_n) \leq \inf_{k\geq n} \rho(X_k)$: in conclusione, mettendo assieme il tutto, $\rho(X) \leq \sup_n \rho(\widetilde{X}_n) \leq \sup_n \inf_{k\geq n} \rho(X_k) \equiv \liminf_n \rho(X_n)$.

Infine, se $\rho \equiv \rho^\star$ è una misura coerente di rischio su $\mathcal{X}$, allora assumiamo che $\rho^\star$ soddisfi la proprietà (RF⋆) e verifichiamo che $\rho^\star$ soddisfa anche la proprietà (RF): sia per questo $X_n \downarrow X$ $\mathbf{P}$-q.c. in $\mathcal{X}$. Allora abbiamo subito che $X - X_n \uparrow 0$ $\mathbf{P}$-q.c. in $\mathcal{X}$ e dunque che $\rho^\star(X - X_n) \downarrow \rho^\star(0) = 0$ grazie alla proprietà (RF⋆) e all'identità (1.3) della proposizione 1.1.3 a pagina 5. Ora basta notare che vale $\rho^\star(X) = \rho^\star((X - X_n) + X_n) \leq \rho^\star(X - X_n) + \rho^\star(X_n)$ grazie alla proprietà (R4⋆) di subadditività per ottenere subito che $\rho^\star(X) \leq \sup_n \rho^\star(X_n)$, e in definitiva la tesi, passando al limite per $n \to \infty$ e tenendo presente l'osservazione 1.2.1. □

**Proposizione 1.2.2.** *Sia $\rho$ una misura convessa di rischio su $\mathcal{X}$. Allora $\rho$ possiede la proprietà di Fatou se e solo se l'insieme di accettazione $\mathcal{A}_\rho$ secondo $\rho$ soddisfa la seguente proprietà di chiusura "debole" rispetto alla convergenza $\mathbf{P}$-quasi certa.*

**(RF$''$)** *Per ogni successione* $(X_n)_n$ *in* $\mathcal{A}_\rho$ *per la quale esista* $X \in \mathcal{X}$ *tale che* $X_n \to X$ *in senso* $\mathbf{P}$*-q.c. e per la quale risulti che* $\sup_{k\geq n} X_k \in \mathcal{X}$ *per ogni* $n$*, vale che anche* $X \in \mathcal{A}_\rho$*: in simboli, se* $X_n \in \mathcal{A}_\rho$ *e* $X_n \to X$ $\mathbf{P}$*-q.c. in* $\mathcal{X}$ *con* $\sup_{k\geq n} X_k \in \mathcal{X}$*, allora* $X \in \mathcal{A}_\rho$*.*

*Nota.* Sarebbe più corretto parlare di chiusura rispetto alla convergenza in probabilità $\mathbf{P}$, in quanto perlomeno questa è indotta da una topologia (di spazio metrico) su $L^0(\mathbf{P})$.

*Dimostrazione.* Assumiamo che $\rho$ soddisfi la proprietà (RF) e verifichiamo che l'insieme $\mathcal{A}_\rho$ soddisfa la proprietà (RF$''$): sia per questo $X_n \in \mathcal{A}_\rho$ e $X_n \to X$ $\mathbf{P}$-q.c. in $\mathcal{X}$ con $\sup_{k\geq n} X_k \in \mathcal{X}$. Allora abbiamo che $\rho(X) \leq \liminf_n \rho(X_n)$ grazie alla proprietà (RF$'$) equivalente alla proprietà (RF) in virtù della precedente proposizione 1.2.1, e da ciò che $X \in \mathcal{A}_\rho$ in quanto $X_n \in \mathcal{A}_\rho$ implica in modo immediato che $\liminf_n \rho(X_n) \leq 0$.

Viceversa, assumiamo che l'insieme $\mathcal{A}_\rho$ soddisfi la proprietà (RF$''$) e verifichiamo che $\rho$ soddisfa la proprietà (RF): sia per questo $X_n \downarrow X$ $\mathbf{P}$-q.c. in $\mathcal{X}$. Allora, denotando $m := \sup_n \rho(X_n)$, abbiamo che da una parte $X_n + m \in \mathcal{A}_\rho$ per ogni $n$ semplicemente perché $\rho(X_n + m) = \rho(X_n) - m \leq 0$ grazie pure alla proprietà (R2) d'invarianza per traslazioni, ed abbiamo che d'altra parte $X_n + m \downarrow X + m$ $\mathbf{P}$-q.c. in $\mathcal{X}$ (a prescindere dal segno di $m$) con $\sup_{k\geq n}(X_k + m) \equiv X_n + m \in \mathcal{X}$: così, in conclusione, anche $X + m \in \mathcal{A}_\rho$ grazie alla proprietà (RF$''$), o equivalentemente $\rho(X) \leq m$ grazie ancora alla proprietà (R2) d'invarianza per traslazioni, da cui subito la tesi grazie all'osservazione 1.2.1. $\square$

*Osservazione* 1.2.2. Assumiamo che $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$ e sia $\rho$ una misura convessa di rischio. Allora le quattro condizioni (RF), (RF$'$), (RF$^\star$) e (RF$''$) possono rispettivamente esser riformulate in maniera del tutto equivalente come segue.

**(RF$_\infty$)** Per ogni successione $(X_n)_n$ equi-limitata in $L^\infty(\mathbf{P})$ che sia non crescente, la successione non decrescente $(\rho(X_n))_n$ è tale che $\sup_n \rho(X_n) = \rho(\inf_n X_n)$: in simboli, se $X_n \downarrow X$ $\mathbf{P}$-q.c., allora $\rho(X_n) \uparrow \rho(X)$.

**(RF$'_\infty$)** Per ogni successione $(X_n)_n$ in $L^\infty(\mathbf{P})$ per la quale esista $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ tale che $X_n \to X$ in senso $\mathbf{P}$-q.c., la successione $(\rho(X_n))_n$ è tale che $\rho(X) \leq \liminf_n \rho(X_n)$: in simboli, se $X_n \to X$ $\mathbf{P}$-q.c. in $L^\infty(\mathbf{P})$, allora $\rho(X) \leq \liminf_n \rho(X_n)$.

**(RF$^\star_\infty$)** Per ogni successione $(X_n)_n$ equi-limitata in $L^\infty(\mathbf{P})$ che sia non decrescente, la successione non crescente $(\rho^\star(X_n))_n$ è tale che $\inf_n \rho^\star(X_n) = \rho^\star(\sup_n X_n)$: in simboli, se $X_n \uparrow X$ $\mathbf{P}$-q.c. in $L^\infty(\mathbf{P})$, allora $\rho^\star(X_n) \downarrow \rho^\star(X)$.

**(RF$''_\infty$)** Per ogni successione $(X_n)_n$ in $\mathcal{A}_\rho$ per la quale esista $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ tale che $X_n \to X$ in senso $\mathbf{P}$-q.c., vale che anche $X \in \mathcal{A}_\rho$: in simboli, se $X_n \in \mathcal{A}_\rho$ e $X_n \to X$ $\mathbf{P}$-q.c. in $L^\infty(\mathbf{P})$, allora $X \in \mathcal{A}_\rho$.

Rammentiamo a questo punto due importanti teoremi di analisi funzionale: per ogni approfondimento rimandiamo ad esempio a [Bre86].

**Teorema** (di Krein-Šmulian)**.** *Sia* $E$ *uno spazio di Banach reale separabile, sia* $E'$ *lo spazio duale di* $E$ *e, per ogni* $R \in\, ]0, +\infty[$*, sia* $B_R$ *la palla chiusa di centro zero e* *di raggio $R$ in $E'$. Allora, per ogni sottoinsieme convesso $C$ di $E'$, $C$ è chiuso nella topologia debole-star $\sigma(E', E)$ su $E'$ se e solo se, per ogni $R \in\, ]0, +\infty[$, $C \cap B_R$ è sequenzialmente chiuso, ovvero compatto, nella topologia debole-star $\sigma(E', E)$ su $E'$.*

**Lemma** (di Grothendieck)**.** *Supponiamo che $L^1(\mathbf{P})$ sia uno spazio separabile. Per ogni $R \in\, ]0, +\infty[$, sia $B_R$ la palla chiusa di centro zero e di raggio $R$ in $L^\infty(\mathbf{P})$. Allora, per ogni sottoinsieme convesso $C$ di $L^\infty(\mathbf{P})$, $C$ è chiuso nella topologia debole-star $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$ su $L^\infty(\mathbf{P})$ se e solo se, per ogni $R \in\, ]0, +\infty[$, $C \cap B_R$ è chiuso rispetto alla convergenza in probabilità $\mathbf{P}$, ovvero alla convergenza $\mathbf{P}$-quasi certa.*

*Nota.* Ricordiamo che vale $L^1(\mathbf{P})' = L^\infty(\mathbf{P})$ (mentre $L^\infty(\mathbf{P})' \supsetneqq L^1(\mathbf{P})$).

**Corollario 1.2.1.** *Supponiamo che $L^1(\mathbf{P})$ sia uno spazio separabile. Assumiamo che $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$ e sia $\rho$ una misura convessa di rischio. Allora $\rho$ possiede la proprietà di Fatou se e solo se l'insieme di accettazione $\mathcal{A}_\rho$ secondo $\rho$ è chiuso nella topologia debole-star $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$ su $L^\infty(\mathbf{P})$.*

*Dimostrazione.* Da una parte, infatti, alla luce sia dell'osservazione 1.2.2 sia quindi della proposizione 1.2.2, sappiamo ormai che $\rho$ possiede la proprietà di Fatou se e solo se l'insieme di accettazione $\mathcal{A}_\rho$ secondo $\rho$ soddisfa la proprietà ($\mathrm{RF}''_\infty$). D'altra parte, infine, alla luce sia della proprietà (A3) della proposizione 1.1.4 a pagina 6 sia soprattutto del precedente lemma di Grothendieck, capiamo facilmente che $\mathcal{A}_\rho$ è $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$-chiuso se e solo se $\mathcal{A}_\rho$ soddisfa la medesima proprietà ($\mathrm{RF}''_\infty$). □

### 1.2.2 Invarianze fondamentali

**Proposizione 1.2.3.** *Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{\mathcal{X}}$ costituito da tutte e sole le misure convesse di rischio su $\mathcal{X}$ verifica le tre seguenti proprietà d'invarianza.*

- *È chiuso rispetto all'operazione di somma con le costanti: precisamente, sia infatti $\rho$ una misura convessa di rischio su $\mathcal{X}$. Allora, per ogni $c \in \mathbb{R}$, la mappa $\rho + c$ resta una misura convessa di rischio su $\mathcal{X}$ e vale la seguente uguaglianza insiemistica:*

  $$\mathcal{A}_{\rho+c} = \mathcal{A}_\rho + c.$$

  *Inoltre, se $\rho$ possiede la proprietà di Fatou, allora anche $\rho + c$ possiede la proprietà di Fatou.*

- *È chiuso rispetto all'operazione reticolare di estremo superiore: precisamente, sia infatti $\mathcal{I}$ un insieme non vuoto e sia $(\rho_i)_{i\in\mathcal{I}}$ una famiglia di misure convesse di rischio su $\mathcal{X}$ tale che, per ogni $X \in \mathcal{X}$, $\sup_{i\in\mathcal{I}} \rho_i(X) \in \mathbb{R}$ (ovvero $<+\infty$). Allora la mappa $\sup_{i\in\mathcal{I}} \rho_i$ resta una misura convessa di rischio su $\mathcal{X}$ e vale la seguente uguaglianza insiemistica:*

  $$\mathcal{A}_{\sup_{i\in\mathcal{I}} \rho_i} = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{A}_{\rho_i}.$$

  *Se inoltre, per ogni $i \in \mathcal{I}$, $\rho_i \equiv \rho_i^\star$ è una misura coerente di rischio su $\mathcal{X}$, allora $\sup_{i\in\mathcal{I}} \rho_i \equiv \sup_{i\in\mathcal{I}} \rho_i^\star$ resta una misura coerente di rischio su $\mathcal{X}$. Se infine, per ogni*

*$i \in \mathcal{I}$, $\rho_i$ possiede la proprietà di Fatou, allora anche $\sup_{i\in\mathcal{I}} \rho_i$ possiede la proprietà di Fatou.*

- *È un insieme convesso: precisamente, siano infatti $\rho_1$ e $\rho_2$ due misure convesse di rischio su $\mathcal{X}$. Allora, per ogni $\lambda \in ]0,1[$, la mappa $\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$ resta una misura convessa di rischio su $\mathcal{X}$ e valgono le due seguenti relazioni insiemistiche:*

$$\mathcal{A}_{\rho_1} \cap \mathcal{A}_{\rho_2} \subseteq \mathcal{A}_{\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2} \subseteq \mathcal{A}_{\rho_1} \cup \mathcal{A}_{\rho_2}.$$

  *Inoltre, se $\rho_1$ e $\rho_2$ sono due misure coerenti di rischio su $\mathcal{X}$, allora $\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$ resta una misura coerente di rischio su $\mathcal{X}$. Infine, se $\rho_1$ e $\rho_2$ possiedono la proprietà di Fatou, allora anche $\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$ possiede la proprietà di Fatou.*

*Dimostrazione.* Lasciamo come esercizio la dimostrazione sia di ogni semplice dettaglio della proposizione sia di ogni eventuale risultato d'approfondimento a riguardo. □

### 1.2.3 Funzioni di penalità e teorema di rappresentazione

Adottiamo la seguente notazione insiemistica:

$$\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}_{\mathbf{P}} \overset{def}{=} \{\, \mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \,\} \coloneqq \{\, \mathbf{Q} \text{ probabilità su} \, \mathcal{F} \mid \mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \,\}. \tag{1.7}$$

*Nota.* Teniamo presente che tale classe $\mathcal{P}$ può esser identificata col sottoinsieme $\mathcal{Z} \equiv \mathcal{Z}_{\mathbf{P}}$ non vuoto e convesso di $L^1_+(\mathbf{P})$ dato da

$$\mathcal{Z} \doteq \left\{ Z \in L^1_+(\mathbf{P}) \;\middle|\; \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[Z] = 1 \right\} \tag{1.8}$$

in virtù del classico teorema di Radon-Nikodym per misure di probabilità, mediante dunque la corrispondenza $\mathcal{P} \to \mathcal{Z}$ definita ponendo, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$,

$$\mathbf{Q} \mapsto \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}.$$

Inoltre teniamo presente che, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$ e $p \in \{0\} \cup [1, +\infty]$, $L^p(\mathbf{P}) < L^p(\mathbf{Q})$ mentre invece, per ogni $\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$, $L^0(\mathbf{P}) = L^0(\mathbf{Q})$ e $L^\infty(\mathbf{P}) = L^\infty(\mathbf{Q})$.

*Nota.* Vengono adottate le seguenti notazioni standard: per ogni $X \in L^1(\mathbf{P})$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$,

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X] \equiv \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbf{Q}(\omega)$$

e quindi, più in generale, per ogni sotto-$\sigma$-algebra $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ sullo spazio $\Omega$, denotiamo

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X \,|\, \mathcal{E}]$$

una versione $\mathbf{Q}$-quasi certa in $L^1(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{Q})$ della speranza condizionale di $X$ data $\mathcal{E}$.

**Esempio 1.** Fissiamo un'arbitraria posizione limitata $\bar{X} \in L^\infty(\mathbf{P})$ e consideriamo quindi l'elementare sottospazio uno-dimensionale $\mathcal{X} \equiv \mathcal{X}_{\bar{X}}$ di $L^\infty(\mathbf{P})$ dato da

$$\mathcal{X} \doteq \left\{ a\bar{X} + b \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Allora la mappa $\rho^\star \equiv \rho^\star_{\bar{X}} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\rho^\star(a\bar{X} + b) \doteq -a\,\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[\bar{X}] - b$$

è chiaramente una misura coerente di rischio su $\mathcal{X}$ che possiede la proprietà di Fatou, o ancor meglio la proprietà (RF$^\star$) della proposizione 1.2.1 a pagina 11, semplicemente perché vale $\rho^\star(a\bar{X} + b) = -\,\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[a\bar{X} + b]$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.

Quest'osservazione così facile sollecita in modo del tutto naturale ad approfondire i possibili legami tra le misure convesse di rischio su $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$ che possiedono la proprietà di Fatou e gli operatori $-\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\,\cdot\,]$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, su $L^\infty(\mathbf{P})$, tenendo sempre conto delle invarianze fondamentali descritte dalla proposizione 1.2.3 a pagina 13.

**Definizione 1.2.2** (Funzione di penalità)**.** Chiamiamo *funzione di penalità* (o *di penalizzazione*) ogni mappa $\alpha\colon \mathcal{P} \to \,]-\infty, +\infty]$ tale che risulti $\inf_{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}} \alpha(\mathbf{Q}) \in \mathbb{R}$, o la quale cioè non valga identicamente $+\infty$ e sia tale che risulti $\inf_{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}} \alpha(\mathbf{Q}) > -\infty$.

**Lemma 1.2.1.** *Sia $\rho$ una misura convessa di rischio. Assumiamo che l'insieme di accettazione $\mathcal{A}_\rho$ secondo $\rho$ sia chiuso nella topologia debole-star $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$ su $L^\infty(\mathbf{P})$. Allora, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P}) \backslash \mathcal{A}_\rho$, esiste una probabilità $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q}_{\rho,X} \in \mathcal{P}$ tale che*

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X] < \inf_{Y \in \mathcal{A}_\rho} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[Y] \tag{1.9}$$

*ed inoltre vale come corollario la seguente uguaglianza insiemistica*:

$$\mathcal{A}_\rho = \bigcap_{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}} \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \;\middle|\; \inf_{Y \in \mathcal{A}_\rho} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[Y] \le \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X] \right\}. \tag{1.10}$$

*Dimostrazione.* Grazie alle ipotesi ed alla proprietà (A3) della proposizione 1.1.4 a pagina 6, capiamo subito che il classico teorema di Hahn-Banach in forma geometrica per $L^\infty(\mathbf{P})$ consente di separare strettamente i due sottoinsiemi non vuoti, convessi e disgiunti $\mathcal{A}_\rho$, quello chiuso, e $\{X\}$, quello compatto, di $L^\infty(\mathbf{P})$ nel seguente senso: esistono $Z \in L^1(\mathbf{P})$ e $a \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $Y \in \mathcal{A}_\rho$, risulti $\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[ZX] < a < \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[ZY]$.

In particolare, dunque, $Z \equiv Z_{\rho,X} \in L^1(\mathbf{P}) \setminus \{0\}$ è tale che

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[ZX] < \inf_{Y \in \mathcal{A}_\rho} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[ZY] \tag{1.11}$$

e per ciò basta adesso verificare che $Z \ge 0$ ($\mathbf{P}$-q.c.) per ricavare quindi la (1.9) dalla (1.11) prendendo quella probabilità $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q}_{\rho,X} \in \mathcal{P}$ di densità rispetto a $\mathbf{P}$ definita ponendo

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \doteq \frac{Z}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[Z]}.$$

Torniamo per questo alla semplice osservazione 1.1.8 a pagina 10 considerando l'evento $A \coloneqq \{ Z < 0 \} \in \mathcal{F}$ e fissando uno scalare $k \in [\rho(\mathbb{1}_A), +\infty[$ qualsiasi. Allora, per ogni $\lambda \in [1, +\infty[$, risulta $Y_\lambda \coloneqq \lambda \mathbb{1}_A + k \in \mathcal{A}_\rho$ e di conseguenza, sempre da (1.11),

$$-\infty < \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[ZX] < \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[ZY_\lambda] = \lambda\, \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[Z\mathbb{1}_A] + k\, \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[Z]$$

da cui necessariamente $\mathbf{P}[A] = 0$ vista la possibilità di mandare $\lambda \uparrow +\infty$.

A questo punto la tesi segue subito dal fatto che in realtà l'uguaglianza (1.10) equivale alla sola relazione $\supseteq$ in modo davvero evidente. □

*Osservazione* 1.2.3. Supponiamo che $L^1(\mathbf{P})$ sia uno spazio separabile e sia $\rho$ una misura convessa di rischio. Allora l'insieme di accettazione $\mathcal{A}_\rho$ secondo $\rho$ è chiuso nella topologia debole-star $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$ su $L^\infty(\mathbf{P})$ se e solo se vale l'uguaglianza insiemistica (1.10): infatti, mentre il "solo se" riassume il precedente lemma 1.2.1, viceversa il "se" è spiegato dal fatto che, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, il sottoinsieme di $L^\infty(\mathbf{P})$ dato da

$$\left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \;\middle|\; \inf_{Y \in \mathcal{A}_\rho} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[Y] \le \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X] \right\}$$

è $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$-chiuso grazie al lemma di Grothendieck a pagina 13 (affiancato al classico teorema di convergenza dominata di Lebesgue per uno spazio di probabilità).

**Proposizione 1.2.4.** *Sia $\rho$ una misura convessa di rischio. Assumiamo che l'insieme di accettazione $\mathcal{A}_\rho$ secondo $\rho$ sia chiuso nella topologia debole-star $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$ su $L^\infty(\mathbf{P})$. Allora la mappa $\alpha_\rho \colon \mathcal{P} \to \,]-\infty, +\infty]$ definita ponendo, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$,*

$$\alpha_\rho(\mathbf{Q}) \overset{def}{=} \sup_{Y \in \mathcal{A}_\rho} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y] \tag{1.12}$$

*è una funzione di penalità ed inoltre vale la seguente uguaglianza insiemistica*:

$$\mathcal{A}_\rho = \bigcap_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \alpha_\rho(\mathbf{Q}) < +\infty}} \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \;\middle|\; \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha_\rho(\mathbf{Q}) \le 0 \right\}. \tag{1.13}$$

*Infine vale anche la seguente identità*: *per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$,*

$$\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \sup_{X \in L^\infty(\mathbf{P})} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \rho(X) \Big\}. \tag{1.14}$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo anzitutto che la mappa $\alpha_\rho$ è effettivamente tale che risulti $\inf_{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}} \alpha_\rho(\mathbf{Q}) \in \mathbb{R}$ verificando per l'esattezza la seguente identità:

$$\inf_{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}} \alpha_\rho(\mathbf{Q}) = -\rho(0). \tag{1.15}$$

Cominciamo per questo notando subito che, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, vale evidentemente

$$\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = -\inf_{Y \in \mathcal{A}_\rho} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[Y]. \tag{1.16}$$

Adesso, grazie alla proprietà (A2) della proposizione 1.1.4 a pagina 6, otteniamo facilmente che da una parte la mappa $\alpha_\rho$ è tale che, per ogni $m \in [\rho(0), +\infty[$, risulti $\inf_{\mathbf{Q}\ll\mathbf{P}} \alpha_\rho(\mathbf{Q}) \geq -m$, da cui immediatamente la relazione di $\geq$ in (1.15) come ovvia conseguenza della scelta particolare $m \coloneqq \rho(0)$.

Dopo di ché, grazie di nuovo alla proprietà (A2) della proposizione 1.1.4 a pagina 6 e quindi al precedente lemma 1.2.1, deduciamo che d'altra parte la mappa $\alpha_\rho$ è tale che al contrario, per ogni $m \in ]-\infty, \rho(0)[$, risulti $\inf_{\mathbf{Q}\ll\mathbf{P}} \alpha_\rho(\mathbf{Q}) < -m$, da cui subito la relazione di $\leq$ in (1.15) mandando $m \uparrow \rho(0)$ (e con essa, in definitiva, la preannunciata uguaglianza (1.15) stessa): basta infatti applicare la disuguaglianza (1.9) con $X \equiv m$, quindi con $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q}_{\rho,m} \in \mathcal{P}$, tenendo presente anche l'elementare identità (1.16).

A questo punto e senza alcuna difficoltà riconosciamo inoltre nell'uguaglianza (1.13) l'uguaglianza (1.10) sempre del precedente lemma 1.2.1.

Per quanto riguarda infine l'identità (1.14), la relazione di $\leq$ vale semplicemente perché, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$ e $Y \in \mathcal{A}_\rho$, è $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y] \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y] - \rho(Y)$, mentre viceversa la relazione di $\geq$ vale in quanto, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, è $X + \rho(X) \in \mathcal{A}_\rho$ grazie alla solita proprietà (R2) d'invarianza per traslazioni (si vedano a proposito anche l'osservazione 1.1.1 a pagina 4 e la proposizione 1.1.1 a pagina 4). $\square$

**Corollario 1.2.2.** *Sia $\rho \equiv \rho^\star$ una misura coerente di rischio. Assumiamo che l'insieme di accettazione $\mathcal{A}_{\rho^\star}$ secondo $\rho^\star$ sia chiuso nella topologia debole-star $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$ su $L^\infty(\mathbf{P})$. Allora la funzione di penalità $\alpha_\rho \equiv \alpha_{\rho^\star}$ definita come in* (1.12) *è a valori in $\{0\,, +\infty\}$ ed inoltre vale la seguente uguaglianza insiemistica*:

$$\mathcal{A}_{\rho^\star} = \bigcap_{\substack{\mathbf{Q}\ll\mathbf{P} \\ \alpha_{\rho^\star}(\mathbf{Q})=0}} \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \;\middle|\; \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] \leq 0 \right\}. \tag{1.17}$$

*Dimostrazione.* A partire dalla definizione (1.12) stessa, o volendo dalla identità (1.15), constatiamo anzitutto che, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, vale $\alpha_{\rho^\star}(\mathbf{Q}) \geq 0$ grazie alla fondamentale appartenenza $0 \in \mathcal{A}_{\rho^\star}$ (si vedano a proposito, eventualmente, l'identità (1.3) della proposizione 1.1.3 a pagina 5 e la proprietà (A5) della proposizione 1.1.4 a pagina 6).

Sia ora $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$ tale per cui risulti $\alpha_{\rho^\star}(\mathbf{Q}) > 0$, ammesso che esista, e sia quindi $Y \equiv Y_{\mathbf{Q}} \in \mathcal{A}_{\rho^\star}$ tale che $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y] > 0$. Allora, per ogni $\lambda \in ]0, +\infty[$, anche $\lambda Y \in \mathcal{A}_{\rho^\star}$ grazie alla proprietà (A5) della proposizione 1.1.4 a pagina 6, ed in più resta comunque tale che $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-(\lambda Y)] = \lambda\, \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y] > 0$, da cui subito che $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-(\lambda Y)] \uparrow +\infty$ per $\lambda \uparrow +\infty$ e di conseguenza che $\alpha_{\rho^\star}(\mathbf{Q}) = +\infty$.

A questo punto, pertanto, l'uguaglianza (1.17) non è altro che l'uguaglianza (1.13) della precedente proposizione 1.2.4, e con ciò abbiamo concluso. $\square$

*Osservazione* 1.2.4. Sia $\alpha \colon \mathcal{P} \to ]-\infty, +\infty]$ una funzione di penalità. Allora è facile controllare che la mappa $\rho_\alpha \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho_\alpha(X) \overset{def}{=} \sup_{\substack{\mathbf{Q}\ll\mathbf{P} \\ \alpha(\mathbf{Q})<+\infty}} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha(\mathbf{Q}) \right\} \tag{1.18}$$

è una misura convessa di rischio la quale possiede la proprietà di Fatou e tale che inoltre

$$\mathcal{A}_{\rho_\alpha} = \bigcap_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \alpha(\mathbf{Q}) < +\infty}} \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \;\middle|\; \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha(\mathbf{Q}) \leq 0 \right\} \tag{1.19}$$

(si tenga conto anche del semplice esempio 1 a pagina 15 e quindi delle invarianze fondamentali descritte dalla proposizione 1.2.3 a pagina 13).

**Teorema 1.2.1** (di rappresentazione delle misure convesse di rischio)**.** *Supponiamo che $L^1(\mathbf{P})$ sia uno spazio separabile e sia $\rho$ una misura convessa di rischio. Allora le quattro seguenti condizioni sono equivalenti.*

**(i)** *$\rho$ possiede la proprietà di Fatou.*

**(ii)** *L'insieme di accettazione $\mathcal{A}_\rho$ secondo $\rho$ è $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$-chiuso.*

**(iii)** *La mappa $\alpha_\rho \colon \mathcal{P} \to ]-\infty, +\infty]$ definita ponendo, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$,*

$$\alpha_\rho(\mathbf{Q}) \overset{def}{=} \sup_{Y \in \mathcal{A}_\rho} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y] \tag{1.20}$$

*è una funzione di penalità e vale la seguente formula di rappresentazione per $\rho$: per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,*

$$\rho(X) = \sup_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \alpha_\rho(\mathbf{Q}) < +\infty}} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha_\rho(\mathbf{Q}) \right\}. \tag{1.21}$$

**(iv)** *Esiste una funzione di penalità $\alpha \colon \mathcal{P} \to ]-\infty, +\infty]$ tale per cui valga la seguente formula di rappresentazione per $\rho$: per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,*

$$\rho(X) = \sup_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \alpha(\mathbf{Q}) < +\infty}} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha(\mathbf{Q}) \right\}. \tag{1.22}$$

*Dimostrazione.* Verifichiamo infatti la seguente successione d'implicazioni:

$$\text{(i)} \;\Rightarrow\; \text{(ii)} \;\Rightarrow\; \text{(iii)} \;\Rightarrow\; \text{(iv)} \;\Rightarrow\; \text{(i)}.$$

(i) ⇒ (ii) Si tratta semplicemente del "solo se" del corollario 1.2.1 a pagina 13.

(ii) ⇒ (iii) È una chiara conseguenza della proposizione 1.2.4 a pagina 16 unita all'osservazione 1.2.4 nella pagina precedente, e quindi all'elementare osservazione 1.1.6 a pagina 7, attraverso l'uguaglianza (1.13).

(iii) ⇒ (iv) Quest'implicazione è veramente ovvia.

(iv) ⇒ (i) È un corollario immediato sempre dell'osservazione 1.2.4 e così, con questo, la dimostrazione del teorema è senz'altro ultimata. □

*Osservazione* 1.2.5. Supponiamo che $L^1(\mathbf{P})$ sia uno spazio separabile e sia $\rho$ una misura convessa di rischio. Assumiamo che $\rho$ possieda la proprietà di Fatou. Allora l'identità (1.14) della proposizione 1.2.4 a pagina 16 permette di riconoscere subito che la funzione di penalità $\alpha_\rho$ definita come in (1.20) è la minima tra le funzioni di penalità $\alpha$ tali per cui sussista la formula di rappresentazione (1.22): in simboli,

$$\alpha_\rho^{\min} := \alpha_\rho \leq \alpha.$$

Notiamo per di più come la formula (1.21) riconfermi l'identità (1.15) sempre della proposizione 1.2.4 a pagina 16 per la funzione di penalità $\alpha_\rho$, così come allo stesso modo la formula (1.22) palesi l'analoga identità per la generica funzione di penalità $\alpha$, ovvero

$$\rho(0) = -\inf_{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}} \alpha_\rho(\mathbf{Q}) = -\inf_{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}} \alpha(\mathbf{Q}) \tag{1.23}$$

e come infine, a proposito, risulti evidente la seguente stima: per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$|\rho(X)| \leq \|X\|_\infty + |\rho(0)|$$

(chiara già dalla proprietà (R1) di monotonìa e quindi dall'osservazione 1.1.2 a pagina 4).

**Corollario 1.2.3** (Teorema di rappresentazione delle misure coerenti di rischio)**.** *Supponiamo che $L^1(\mathbf{P})$ sia uno spazio separabile e sia $\rho^\star$ una misura coerente di rischio. Allora le tre seguenti condizioni sono equivalenti.*

**(i)** *$\rho^\star$ possiede la proprietà di Fatou.*

**(ii)** *L'insieme di accettazione $\mathcal{A}_{\rho^\star}$ secondo $\rho^\star$ è $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$-chiuso.*

**(iii)** *Esiste un sottoinsieme non vuoto $\mathcal{Q} \equiv \mathcal{Q}_{\rho^\star}$ di $\mathcal{P}$ tale per cui valga la seguente formula di rappresentazione per $\rho^\star$: per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,*

$$\rho^\star(X) = \sup_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \in \mathcal{Q}}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X]. \tag{1.24}$$

*Dimostrazione.* Tutto ciò discende in modo pressoché automatico dal corollario 1.2.2 a pagina 17 e dunque dal precedente teorema 1.2.1 (più, volendo, dalla proposizione 1.2.3 a pagina 13): lasciamo come esercizio la dimostrazione di tutti i vari dettagli.

Teniamo comunque a rimarcare che per l'implicazione (ii) $\Rightarrow$ (iii) basta considerare la funzione di penalità $\alpha_\rho \equiv \alpha_{\rho^\star}$ definita come in (1.20) per poi prender così

$$\mathcal{Q} \equiv \mathcal{Q}_{\rho^\star} \doteq \{\, \mathbf{Q} \in \mathcal{P} \mid \alpha_{\rho^\star}(\mathbf{Q}) = 0 \,\}. \qquad \square$$

*Osservazione.* A riguardo della formula (1.24), fissiamo una qualsiasi probabilità $\bar{\mathbf{Q}} \in \mathcal{Q}$ e consideriamo le due misure coerenti di rischio definite ponendo, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho^\star_{\bar{\mathbf{Q}}}(X) \doteq \mathbf{E}^{\bar{\mathbf{Q}}}[-X] \quad \text{e} \quad \rho^\star_{\mathcal{P}}(X) \doteq \sup_{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X].$$

Allora, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, $\rho^\star_{\bar{\mathbf{Q}}}(X) \leq \rho^\star(X) \leq \rho^\star_{\mathcal{P}}(X)$ o equivalentemente, in effetti,

$$\mathcal{A}_{\rho^\star_{\mathcal{P}}} \equiv L^\infty_+(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{A}_{\rho^\star} \subseteq \mathcal{A}_{\rho^\star_{\bar{\mathbf{Q}}}}.$$

**Proposizione 1.2.5.** *Supponiamo che $L^1(\mathbf{P})$ sia uno spazio separabile. Allora valgono le due seguenti proprietà d'invarianza.*

- *Sia $\rho$ una misura convessa di rischio che possiede la proprietà di Fatou e sia $\alpha$ una funzione di penalità tale per cui valga la formula di rappresentazione* (1.22) *per $\rho$. Allora, per ogni $c \in \mathbb{R}$, la mappa $\rho + c$ è una misura convessa di rischio che possiede la proprietà di Fatou e tale che $\alpha - c$ sia una funzione di penalità tale per cui valga la formula di rappresentazione* (1.22) *per $\rho + c$ stessa.*

- *Sia $\mathcal{I}$ un insieme non vuoto e sia $(\rho_i)_{i\in\mathcal{I}}$ una famiglia di misure convesse di rischio che possiedono la proprietà di Fatou tale che, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, $\sup_{i\in\mathcal{I}} \rho_i(X) \in \mathbb{R}$* (*ovvero $<+\infty$*) *ed inoltre, per ogni $i \in \mathcal{I}$, sia quindi $\alpha_i$ una funzione di penalità tale per cui valga la formula di rappresentazione* (1.22) *per $\rho_i$. Allora la mappa $\sup_{i\in\mathcal{I}} \rho_i$ è una misura convessa di rischio che possiede la proprietà di Fatou e tale che $\inf_{i\in\mathcal{I}} \alpha_i$ sia una funzione di penalità tale per cui valga la formula di rappresentazione* (1.22) *per $\sup_{i\in\mathcal{I}} \rho_i$ stessa.*

*Dimostrazione.* Si tratta di calcoli del tutto elementari, lasciati come esercizio, i quali poggiano sulla proposizione 1.2.3 a pagina 13 e quindi sul precedente teorema 1.2.1. □

*Osservazione* 1.2.6. Supponiamo che $L^1(\mathbf{P})$ sia uno spazio separabile e sia $\mathcal{A}$ un qualsiasi sottoinsieme non vuoto di $L^\infty(\mathbf{P})$ il quale verifichi le tre proprietà (A1′), (A2′) e (A3′) della proposizione 1.1.5 a pagina 8. Allora, grazie anche all'osservazione 1.1.7 a pagina 10, la mappa $\rho_{\mathcal{A}} \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) \doteq \inf\{\, m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A} \,\} \tag{1.25}$$

come in (1.5) sempre della proposizione 1.1.5 è una misura convessa di rischio il cui insieme di accettazione $\mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}}$ contiene l'insieme $\mathcal{A}$ ed inoltre, assumendo che valga una formula di rappresentazione per $\rho_{\mathcal{A}}$ come la (1.22) del teorema di rappresentazione 1.2.1 (od una delle altre tre condizioni a questa equivalenti), è tale per cui la minima funzione di penalità $\alpha_{\rho_{\mathcal{A}}}$, definita come in (1.20), verifichi la seguente identità: per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$,

$$\alpha_{\rho_{\mathcal{A}}}(\mathbf{Q}) \equiv \sup_{Y\in\mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y] = \sup_{X\in\mathcal{A}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X]. \tag{1.26}$$

*Osservazione.* Supponiamo che $L^1(\mathbf{P})$ sia uno spazio separabile e sia $\rho$ una misura convessa di rischio per la quale valga una formula di rappresentazione come la (1.22) del teorema di rappresentazione 1.2.1. Allora, denotando $\mathcal{Z}$ l'insieme definito come in (1.8) a pagina 14 ed identificando quindi la funzione di penalità $\alpha_\rho \colon \mathcal{P} \to \,]-\infty, +\infty]$, definita come in (1.20), con la mappa $\alpha'_\rho \colon \mathcal{Z} \to \,]-\infty, +\infty]$ definita ponendo, per ogni $Z \in \mathcal{Z}$,

$$\alpha'_\rho(Z) \doteq \sup_{Y\in\mathcal{A}_\rho} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[-ZY]$$

risulta davvero immediato verificare che $\alpha'_\rho$ è convessa su tutto $\mathcal{Z}$ e pure semi-continua inferiormente in senso debole, ovvero rispetto alla topologia debole $\sigma(L^1(\mathbf{P}), L^\infty(\mathbf{P}))$ su $L^1(\mathbf{P})$, e come tale è a maggior ragione semi-continua inferiormente in senso forte.

Concludiamo incoraggiando il lettore a riflettere sulle varie semplificazioni conseguenti all'ipotesi aggiuntiva di finitezza $\#\Omega < +\infty$. Comunque per una trattazione piuttosto esauriente a riguardo raccomandiamo ad esempio [Föl02].

## 1.3 Misure coerenti di rischio su $L^0(\mathbf{P})$

Il risultato principale di quest'ultima breve sezione è il seguente teorema, la cui veridicità risulta davvero chiara una volta dimostrati la proposizione 1.3.1, il lemma 1.3.1 e la proposizione 1.3.2: il riferimento bibliografico chiave è [Pra16].

**Teorema 1.3.1.** *Sia $\rho^\star$ una misura coerente di rischio su tutto $\mathcal{X} = L^0(\mathbf{P})$. Allora lo scenario $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ è uno spazio di probabilità atomico.*

*Nota* 1.3.1. Ricordiamo che uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ viene chiamato atomico quando esso ammette un evento $A \in \mathcal{F}$ non $\mathbf{P}$-trascurabile, detto atomo, tale per cui non esista alcun evento $A' \in \mathcal{F}$ non $\mathbf{P}$-trascurabile tale che $A' \subseteq A$ e $\mathbf{P}[A'] < \mathbf{P}[A]$.

Al contrario, per uno spazio di probabilità non atomico, ovvero privo di atomi, è possibile dimostrare senza particolari difficoltà che, per ogni evento $A \in \mathcal{F}$ non $\mathbf{P}$-trascurabile e $\alpha \equiv \alpha_A \in \,]0, \mathbf{P}[A][$, esiste un evento $A_\alpha \in \mathcal{F}$ tale che

$$\begin{cases} A_\alpha \subseteq A \\ \mathbf{P}[A_\alpha] = \alpha \,. \end{cases}$$

**Proposizione 1.3.1.** *Sia $\rho^\star$ una misura coerente di rischio su $\mathcal{X}$. Allora esiste una applicazione lineare $F \equiv F_{\rho^\star} \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ non banale e positiva.*

*Nota* 1.3.2. Ricordiamo che un'applicazione lineare $F \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, dove $\mathcal{X} < L^0(\mathbf{P})$, viene chiamata positiva (o monotòna) quando, per ogni $X \in L^0_+(\mathbf{P}) \cap \mathcal{X}$, risulta $F(X) \geq 0$, o quando cioè, per ogni $X, Y \in \mathcal{X}$, se $X \geq Y$ ($\mathbf{P}$-q.c.) allora $F(X) \geq F(Y)$.

*Dimostrazione.* Grazie all'osservazione 1.1.3 a pagina 6 ed in virtù quindi del classico teorema di Helly-Hahn-Banach in forma analitica per $\mathcal{X}$, se denotiamo ad esempio con $V$ il sottospazio di $\mathcal{X}$ costituito da tutte e sole le costanti, allora possiamo estendere linearmente a tutto $\mathcal{X}$ l'applicazione lineare $g \colon V \to \mathbb{R}$ su $V$ definita ponendo, per ogni $k \in \mathbb{R}$, $g(k) \doteq -k$ rispettando il controllo dato dalla seminorma $p \doteq \rho^\star$ su $\mathcal{X}$: esiste dunque un'applicazione lineare $G \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ con $G\big|_V \equiv g$ e tale che $G \leq \rho^\star$ su tutto $\mathcal{X}$.

In particolare, $G$ è evidentemente non banale e tale che, per ogni $X \in L^0_+(\mathbf{P}) \cap \mathcal{X}$, risulti $G(X) \leq 0$ grazie alla proprietà (R1$^\star$) di positiva monotonìa (della quale $\rho^\star$ gode) e pertanto basta porre infine $F \doteq -G$ per ricavare la tesi desiderata. □

Prima di procedere oltre, risolviamo un elementare esercizio di probabilità usando il classico primo lemma di Borel-Cantelli che prima richiamiamo.

**Lemma** (Primo lemma di Borel-Cantelli)**.** *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità, sia $(A_n)_n$ una successione in $\mathcal{F}$ tale che la serie di termini reali non negativi $(\mathbf{P}[A_n])_n$ sia convergente e sia $A^* := \limsup_n A_n$. Allora $A^*$ è un evento $\mathbf{P}$-trascurabile: in simboli, se $\sum_n \mathbf{P}[A_n] < +\infty$, allora $\mathbf{P}[A^*] = 0$ (ovvero $\mathbf{P}[\liminf_n A_n^c] = 1$).*

*Nota* 1.3.3. Vengono adottate le due seguenti notazioni standard: per ogni successione $(A_n)_n$ in $\mathcal{F}$, o comunque d'insiemi più generici,

$$\limsup_n A_n \equiv \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k \quad \text{e} \quad \liminf_n A_n \equiv \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k.$$

**Corollario.** *Sia $(X_n)_n$ una successione in $L^0_+(\mathbf{P})$ la quale converga in probabilità $\mathbf{P}$ allo zero. Allora esiste una sua sottosuccessione $(X_{n_k})_k$ tale che $\sum_k X_{n_k} < +\infty$ $\mathbf{P}$-q.c. (dove $n_k \uparrow +\infty$).*

*Dimostrazione.* Dato come ipotesi che $X_n \geq 0$ ($\mathbf{P}$-q.c.) per ogni $n$ e che $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, è possibile trovare, per ogni $k$, un intero positivo $n_k$ grande abbastanza affinché risulti

$$\mathbf{P}[X_{n_k} > 2^{-k}] \leq 2^{-k}$$

e per ciò, grazie al primo lemma di Borel-Cantelli applicato alla successione $(A_k)_k$ in $\mathcal{F}$ definita ponendo, per ogni $k$, $A_k \coloneqq \{ X_{n_k} > 2^{-k} \}$, scopriamo subito che, per $\mathbf{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$, la successione scalare $(X_{n_k}(\omega))_k$ viene maggiorata termine per termine e definitivamente dalla successione $(2^{-k})_k$, il ché palesemente dimostra la tesi. $\square$

**Lemma 1.3.1.** *Sia $F\colon L^0(\mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ un'applicazione lineare positiva. Allora $F$ è una mappa continua su $L^0(\mathbf{P})$ (rispetto alla convergenza in probabilità $\mathbf{P}$).*

*Dimostrazione.* Ragionando per assurdo, supponiamo infatti che esista una successione $(X_n)_n$ in $L^0(\mathbf{P})$ ed esista uno scalare $\varepsilon > 0$ tali che $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ mentre, per ogni $n$, $|F(X_n)| \geq \varepsilon$. Allora, a meno di sostituire la successione $(X_n)_n$ con la successione $(|X_n|)_n$, possiamo chiaramente supporre pure che $X_n \geq 0$ ($\mathbf{P}$-q.c.) per ogni $n$.

Grazie dunque al precedente corollario del primo lemma di Borel-Cantelli, se $(X_{n_k})_{k\geq 1}$ è una sottosuccessione di $(X_n)_n$ tale che $X \coloneqq \sum_{k\geq 1} X_{n_k} < +\infty$ ($\mathbf{P}$-q.c.), allora otteniamo immediatamente che, per ogni $k \geq 1$,

$$+\infty > F(X) \geq F\bigl(\textstyle\sum_{j=1}^k X_{n_j}\bigr) = \displaystyle\sum_{j=1}^k F(X_{n_j}) \geq k \cdot \varepsilon$$

da cui l'assurdo vista la possibilità di mandare $k \to +\infty$. $\square$

**Proposizione 1.3.2.** *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità non atomico. Allora lo spazio duale dello spazio $L^0(\mathbf{P})$ è banale: in simboli, $L^0(\mathbf{P})' = \{0\}$.*

*Dimostrazione.* Ragionando per assurdo, supponiamo infatti che esista un'applicazione lineare $F\colon L^0(\mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ non banale e continua. Allora, grazie al fondamentale teorema di approssimazione $\mathbf{P}$-quasi certa su $L^0(\mathbf{P})$ con v.a.r. semplici, deve esistere anche un evento $A \in \mathcal{F}$ non $\mathbf{P}$-trascurabile tale che $F(\mathbb{1}_A) \neq 0$ e così, a meno di sostituire l'applicazione $F$ con l'applicazione $\frac{1}{F(\mathbb{1}_A)}F$, possiamo supporre direttamente che $F(\mathbb{1}_A) = 1$.

Ora, dato per ipotesi che lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ è non atomico e vista dunque la nota 1.3.1, è facile rendersi conto di poter riuscire a costruire una successione $(A^n)_{n\geq 0}$ in $\mathcal{F}$, dove $A^0 \doteq A$, con $A^n \downarrow \emptyset$ e tale che $\mathbf{P}[A^n] = 2^{-n}\,\mathbf{P}[A]$ e $F(\mathbb{1}_{A^n}) \geq 2^{-n}$.

Presentiamo per completezza il primo passo di tale procedimento: sia per questo $\alpha \equiv \alpha_A := \frac{\mathbf{P}[A]}{2}$ e sia quindi $A_\alpha \in \mathcal{F}$ un evento tale che $A_\alpha \subseteq A$ e $\mathbf{P}[A_\alpha] = \alpha$. Allora $A \setminus A_\alpha \in \mathcal{F}$ è a sua volta un evento tale che $A \setminus A_\alpha \subseteq A$ e $\mathbf{P}[A \setminus A_\alpha] = \alpha$, ed inoltre $F(\mathbb{1}_A) = 1$ dà subito che $F(\mathbb{1}_{A_\alpha}) \geq \frac{1}{2}$ oppure $F(\mathbb{1}_{A\setminus A_\alpha}) \geq \frac{1}{2}$: basta prendere pertanto $A^0 \doteq A$ ed allora $A^1 \doteq A_\alpha$ oppure $A^1 \doteq A \setminus A_\alpha$ in modo che $F(\mathbb{1}_{A^1}) \geq \frac{1}{2}$.

Comunque, da tutto ciò deduciamo che da una parte, grazie ancora al primo lemma di Borel-Cantelli, la successione $(X_n)_n$ in $L^0_+(\mathbf{P})$ definita ponendo, per ogni $n$, $X_n \doteq 2^n \mathbb{1}_{A^n}$ converge in probabilità $\mathbf{P}$ allo zero poiché anzi vi converge $\mathbf{P}$-q.c. (essendo $\{\, 2^n \mathbb{1}_{A^n} \to 0 \,\} = \liminf_n \Omega \setminus A^n$) e che d'altra parte, per ogni $n$, $F(X_n) = 2^n F(\mathbb{1}_{A^n}) \geq 1$: assurdo rispetto alla presupposta continuità della $F$. $\square$

# Capitolo 2

# Esempi notevoli di misure convesse di rischio

## 2.1 Misure di rischio definite da code negative

### 2.1.1 Funzioni di ripartizione, pseudo-inverse e quantili

Fissiamo una v.a.r. $X \in L^0(\mathbf{P})$ arbitraria e consideriamo la funzione di ripartizione, o f.d.r., $F \equiv F_X \colon \mathbb{R} \to [0,1]$ di $X$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) \equiv \mathbf{P}[X \leq x].$$

Siano dunque rispettivamente $G^- \equiv G^-_X \colon ]0,1[ \to \mathbb{R}$ e $G^+ \equiv G^+_X \colon ]0,1[ \to \mathbb{R}$ le pseudo-inverse sinistra e destra di $F$ definite ponendo, per ogni $t \in ]0,1[$,

$$G^-(t) \equiv \inf \{ x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq t \} \quad \text{e} \quad G^+(t) \equiv \inf \{ x \in \mathbb{R} \mid F(x) > t \} .$$

In particolare possiamo pensare la pseudo-inversa destra $G^+$ di $F$ anche come la funzione dei quantili di $X$ visto che, per ogni $\alpha \in ]0,1[$, lo scalare

$$q_\alpha(X) \equiv G^+(\alpha) \tag{2.1}$$

coincide esattamente col quantile di livello $\alpha$, o $\alpha$-quantile, di $X$.

Ebbene, ricordiamo che la mappa $F$ è non decrescente, continua a destra e tale che

$$\lim_{x \downarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \uparrow +\infty} F(x) = 1$$

la quale soprattutto caratterizza completamente la legge $X(\mathbf{P}) \equiv \mathbf{P}_X$ di $X$. In più $F$ è continua se e solo se $F$ è surgettiva, oppure anche se e solo se la legge $X(\mathbf{P})$ di $X$ risulta diffusa nel senso che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $X(\mathbf{P})[\{x\}] \equiv \mathbf{P}[X = x] = 0$.

D'altro canto invece la mappa $G^-$ è non decrescente e tale che l'estremo inferiore che la definisce sia in realtà un valor minimo: per ogni $t \in ]0,1[$, $F(G^-(t)) \geq t$ ed anzi, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $G^-(t) \leq x$ se e solo se $t \leq F(x)$. A tal proposito, se $F$ fosse continua allora varrebbe $F(G^-(t)) = t$, ovvero $\leq$, per ogni $t \in ]0,1[$.

Se poi $U \in L^0(\mathbf{P})$ è una v.a.r. di legge uniforme su $[0,1]$ intendendo con ciò che, per ogni $u \in \mathbb{R}$, sia $\mathbf{P}[U \leq u] = (u \vee 0) \wedge 1$, allora $G^-(U)$ è uguale in legge a $X$: in simboli,

$$G^-(U) \stackrel{\mathcal{L}}{=} X. \tag{2.2}$$

*Nota.* Vengono adottate le due seguenti notazioni standard: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a \vee b \equiv \max\{a, b\} \quad \text{e} \quad a \wedge b \equiv \min\{a, b\}.$$

A tal proposito, se $F$ fosse continua allora $F(X)$ avrebbe legge uniforme su $[0,1]$ ed in particolare, per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulterebbe $\mathbf{P}[X \leq x] = \mathbf{P}[F(X) \leq F(x)]$.

Inoltre, la mappa $G^+$ è non decrescente e tale che, per ogni $t \in ]0,1[$, $G^-(t) \leq G^+(t)$ mentre $G^-(t) < G^+(t)$ se e solo se $F(\,\cdot\,) \equiv t$ su tutto un intervallo (limitato) di $\mathbb{R}$.

Di conseguenza $G^-$ e $G^+$ differiscono su un sottoinsieme al più numerabile di $]0,1[$ ed in particolare pure $G^+$ verifica la proprietà riassunta dalla precedente identità (2.2).

Infine, per ogni $\alpha \in ]0,1[$, $\mathbf{P}[X \leq q_\alpha(X)] \geq \alpha$ e valgono le tre seguenti proprietà.

1. Se $X \geq 0$ ($\mathbf{P}$-q.c.) allora $q_\alpha(X) \geq 0$.
2. Per ogni $k \in \mathbb{R}$, $q_\alpha(X + k) = q_\alpha(X) + k$.
3. Per ogni $\lambda \in ]0,+\infty[$, $q_\alpha(\lambda X) = \lambda q_\alpha(X)$.

**Proposizione 2.1.1.** *Sia $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e sia $\alpha \in ]0,1[$. Allora vale la seguente identità:*

$$\int_0^\alpha q_t(X)\, dt = \int_{\{X \leq q_\alpha(X)\}} X(\omega)\, d\mathbf{P}(\omega). \tag{2.3}$$

*Dimostrazione.* Grazie alla (2.1) e quindi alla fondamentale formula d'integrazione rispetto ad una probabilità immagine, la tesi è che valga la seguente identità:

$$\int_{]0,\alpha]} G^+(t)\, dt = \int_{]-\infty, G^+(\alpha)]} x\, dF(x) \tag{2.4}$$

dove naturalmente $dF$ sta per $dX(\mathbf{P}) \equiv d\mathbf{P}_X$.

Si tratta in effetti di un'immediata conseguenza sempre della formula d'integrazione rispetto ad una probabilità immagine unita al fatto che, come appena richiamato, la mappa $G^+$ verifica l'elementare proprietà riassunta dall'identità (2.2): infatti, se fosse

$$\lim_{t \downarrow 0} G^+(t) = -\infty$$

allora avremmo $]0,\alpha] \stackrel{G^+}{\longmapsto} ]-\infty, G^+(\alpha)]$ e la (2.4) risulterebbe davvero evidente. Se invece fosse eventualmente

$$M := \lim_{t \downarrow 0} G^+(t) > -\infty$$

allora avremmo subito $X \geq M$ ($\mathbf{P}$-q.c.), ovvero $X(\mathbf{P})\big[]-\infty, M[\big] = \mathbf{P}[X < M] = 0$, da cui comunque la (2.4) in modo del tutto analogo al caso precedente. $\square$

### 2.1.2 Value at Risk e Tail Conditional Expectation

**Definizione 2.1.1** (Value at Risk)**.** Sia $\alpha \in ]0,1[$. Chiamiamo *il Value at Risk di livello* $\alpha$ la mappa $\mathrm{VaR}_\alpha \colon L^0(\mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $X \in L^0(\mathbf{P})$,

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) \overset{def}{=} -q_\alpha(X) \tag{2.5}$$

dove $q_\alpha(X)$ denota l'$\alpha$-quantile di $X$ definito come in (2.1) di pagina 25.

Il Value at Risk di livello $\alpha$ corrisponderebbe già ad un'intelligente intuizione di misura convessa (anzi coerente) di rischio, definita addirittura su tutto $L^0(\mathbf{P})$, e tuttavia risulta chiaramente non subadditiva e dunque ancora insufficientemente sofisticata: dovrebbe infatti insistere di più sui valori negativi delle varie posizioni finanziarie, ovvero su quelle che potremmo chiamare code negative delle rispettive funzioni di ripartizione.

Il riferimento bibliografico principale resta [Pra16].

**Proposizione 2.1.2.** *Sia* $\alpha \in ]0,1[$. *Denotiamo dunque* $\mathrm{AVaR}_\alpha \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ *la mappa definita ponendo, per ogni* $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\mathrm{AVaR}_\alpha(X) \doteq \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \mathrm{VaR}_t(X)\, dt. \tag{2.6}$$

*Allora vale la seguente identità: per ogni* $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\mathrm{AVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_{\{X \le q_\alpha(X)\}} \big(-X(\omega)\big)\, d\mathbf{P}(\omega). \tag{2.7}$$

*Dimostrazione.* Esplicitando la (2.6) per mezzo di (2.5), riconosciamo subito in (2.7) un'ovvia riformulazione di (2.3) della precedente proposizione 2.1.1. □

**Definizione 2.1.2** (Tail Conditional Expectation)**.** Sia $\alpha \in ]0,1[$. Chiamiamo *la Tail Conditional Expectation* (o *Tail Value at Risk*, o *Expected Shortfall*) *di livello* $\alpha$ la mappa $\mathrm{TCE}_\alpha \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\mathrm{TCE}_\alpha(X) \overset{def}{=} \frac{1}{\mathbf{P}[X \le q_\alpha(X)]} \int_{\{X \le q_\alpha(X)\}} \big(-X(\omega)\big)\, d\mathbf{P}(\omega). \tag{2.8}$$

*Osservazione* 2.1.1. Sia $\alpha \in ]0,1[$. Denotiamo $\mathcal{Q}_\alpha$ il sottoinsieme non vuoto della classe $\mathcal{P} \equiv \{\, \mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \,\}$, definita come in (1.7) a pagina 14, dato da

$$\mathcal{Q}_\alpha \doteq \left\{ \mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \;\middle|\; \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \le \frac{1}{\alpha}\ (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \right\} \tag{2.9}$$

e denotiamo $\rho^\star_\alpha \equiv \rho^\star_{\mathcal{Q}_\alpha} \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ la mappa definita ponendo, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho^\star_\alpha(X) \doteq \sup_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_\alpha}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X]. \tag{2.10}$$

Allora è chiaro che $\rho^\star_\alpha$ sia una misura coerente di rischio che possiede la proprietà di Fatou (si veda a proposito il corollario 1.2.3 a pagina 19) e che, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\mathrm{TCE}_\alpha(X) \le \mathrm{AVaR}_\alpha(X) \wedge \rho^\star_\alpha(X). \tag{2.11}$$

**Proposizione 2.1.3.** *Sia $\alpha \in ]0,1[$. Assumiamo che valga la seguente uguaglianza:*

$$\mathbf{P}[X \leq q_\alpha(X)] = \alpha. \tag{2.12}$$

*Allora valgono le due seguenti identità: per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,*

$$\mathrm{AVaR}_\alpha(X) = \mathrm{TCE}_\alpha(X) = \rho^\star_\alpha(X). \tag{2.13}$$

*Dimostrazione.* Grazie alla formula (2.7) della precedente proposizione 2.1.2 e quindi all'osservazione 2.1.1 di sopra, è sufficiente mostrare che, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho^\star_\alpha(X) \leq \mathrm{TCE}_\alpha(X). \tag{2.14}$$

Siano per questo $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_\alpha$ arbitrari (si veda se necessario la (2.9)), ed inoltre denotiamo per comodità

$$A \equiv A_{\alpha,X} \coloneqq \{\, X \leq q_\alpha(X) \,\} \in \mathcal{F}.$$

Allora l'uguaglianza (2.12) si riduce semplicemente a $\mathbf{P}[A] = \alpha$ (ovvero $\leq$) e così

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] = \mathrm{TCE}_\alpha(X)&\\ + \int_A \big(-X(\omega)\big)\Big(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega) - \frac{1}{\alpha}\Big)\, d\mathbf{P}(\omega) &+ \int_{\Omega\setminus A}\big(-X(\omega)\big)\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega)\, d\mathbf{P}(\omega).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Adesso basta notare che $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} - \frac{1}{\alpha} \leq 0$ ($\mathbf{P}$-q.c.) e dunque che, per $\mathbf{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$, $-X(\omega) \geq -q_\alpha(X)$ se e solo se $\omega \in A$, per procedere dall'espressione (2.15) ottenendo

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] &\leq \mathrm{TCE}_\alpha(X)\\ &\quad - q_\alpha(X)\int_A \Big(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega) - \frac{1}{\alpha}\Big)\, d\mathbf{P}(\omega) - q_\alpha(X)\int_{\Omega\setminus A}\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega)\, d\mathbf{P}(\omega)\\ &= \mathrm{TCE}_\alpha(X)\end{aligned}$$

da cui chiaramente la (2.14), ed in definitiva la (2.13), una volta ricordata la (2.10). □

**Esempio 2.** Sia $\alpha \in ]0,1[$ o meglio, idealmente, $\alpha \in [0.01, 0.05]$ e consideriamo una v.a.r. $Z$ di legge normale standard $\mathcal{N}(0,1)$, ovvero $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, denotando per essa $f \equiv f^Z \colon \mathbb{R} \to ]0,1[$ e $\Phi \equiv \Phi^Z \colon \mathbb{R} \to ]0,1[$ le funzioni definite ponendo, per ogni $z \in \mathbb{R}$,

$$f(z) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad \text{e} \quad \Phi(z) \coloneqq \int_{-\infty}^{z} f(t)\, dt$$

e quindi $\varphi_\alpha \equiv \varphi^Z_\alpha \coloneqq q_\alpha(Z) \equiv \Phi^{-1}(\alpha)$. Allora, per ogni $z \in \mathbb{R}$, è $f'(z) = (-z)f(z)$ e dunque l'integrale che definirebbe "$\mathrm{TCE}_\alpha(Z)$" come in (2.8), ma dove ovviamente $X \equiv Z$, risulta uno scalare ben definito e, per l'esattezza, vale

$$\mathrm{TCE}_\alpha(Z) \equiv \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\varphi_\alpha} (-z) f(z)\, dz = \frac{f(\varphi_\alpha)}{\alpha}.$$

Così, equivalentemente, fissata una coppia $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ qualsiasi, ogni generica v.a.r. gaussiana $X \equiv X^Z := \sigma Z + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ è tale per cui l'integrale che definirebbe "$\mathrm{TCE}_\alpha(X)$" sempre come in (2.8) resta uno scalare ben definito e vale

$$\mathrm{TCE}_\alpha(X) = \sigma \frac{f(\varphi_\alpha)}{\alpha} - \mu.$$

Di quanto scoperto è elementare svolgere esplicitamente tutti i vari calcoli collaterali servendosi ad esempio del noto software statistico **R** su sistema operativo Mac OS X (si veda il sito web `https://www.r-project.org/`): proponiamo il seguente codice.

```
> alpha = 0.01    # per esempio
> phi_alpha = qnorm(alpha,0,1)
> mu = 1; sigma = 0.25    # per esempio
> TCE_alpha = sigma*exp(-(phi_alpha^2)/2)/(sqrt(2*pi)*alpha) - mu
> TCE_alpha
[1] -0.3336964
```

Oppure, in alternativa, funziona anche il codice piuttosto rudimentale che segue.

```
> h = 1e-05
> z <- seq(-4,4,h)
> f = dnorm(z)
> alpha = 0.01    # per esempio
> phi_alpha = round(qnorm(alpha,0,1),digits=5)
> mu = 1; sigma = 0.25    # per esempio
> TCE_alpha = sigma*{f[1+(4+phi_alpha)/h]}/alpha - mu
> TCE_alpha
[1] -0.3337152
```

Suggeriamo [Fra16] per un qualsiasi approfondimento di base sul software **R**.

## 2.2 Misure di rischio definite da funzioni di perdita

### 2.2.1 Trasformata di Fenchel-Legendre e funzioni convesse

Sia $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una designata funzione a valori reali estesi su $\mathbb{R}$, dove viene adottata la notazione standard $\overline{\mathbb{R}} \equiv [-\infty, +\infty]$. Per definizione, la trasformata di Fenchel-Legendre della funzione $f$ è la funzione $f^*\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ definita ponendo, per ogni $p \in \mathbb{R}$,

$$f^*(p) \equiv \sup_{\substack{y \in \mathbb{R} \\ f(y) < +\infty}} \big\{ py - f(y) \big\} \tag{2.16}$$

per la quale conveniamo che $\sup \emptyset \equiv -\infty$ come da consuetudine. Così, naturalmente, $f^{**}\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ denota la funzione definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{**}(x) \equiv (f^*)^*(x). \tag{2.17}$$

Ricordiamo, o comunque osserviamo, che $f^*$ è una funzione convessa e semi-continua inferiormente su tutto $\mathbb{R}$ con $f^*(0) = -\inf_{y\in\mathbb{R}} f(y)$ e tale che

$$\inf_{q\in\mathbb{R}} f^*(q) \geq -f(0)$$

mentre poi $f^{**}$ è tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\inf_{y\in\mathbb{R}} f(y) \leq f^{**}(x) \leq f(x)$.

Supponiamo dunque che la funzione $f$ abbia immagine $f(\mathbb{R}) \subseteq\, ]-\infty, +\infty]$ e che inoltre non valga identicamente $+\infty$, per cui chiaramente anche la funzione $f^*$ ha immagine $f^*(\mathbb{R}) \subseteq\, ]-\infty, +\infty]$. Consideriamo, per ogni $x \in \mathbb{R}$, il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ costituito da tutti e soli i sottogradienti $p \equiv p_{f,x}$ di $f$ in $x$, ovvero il sottodifferenziale $\partial f(x)$ di $f$ in $x$, dato per definizione da

$$\partial f(x) \equiv \{\, p \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R},\ f(y) \geq f(x) + p\cdot(y - x) \,\}\,.$$

Allora, per ogni $x, p \in \mathbb{R}$, $xp \leq f(x) + f^*(p)$ e vale l'uguaglianza se e solo se $p \in \partial f(x)$, eventualità per la quale risulta che sia $f(x) < +\infty$ sia $f^*(p) < +\infty$ ed in particolare che pure $f^*$ non vale identicamente $+\infty$.

Analogamente, se $f^*$ non vale identicamente $+\infty$ e se consideriamo, per ogni $p \in \mathbb{R}$, il sottodifferenziale $\partial f^*(p)$ di $f^*$ in $p$ allora, per ogni $p, x \in \mathbb{R}$, $px \leq f^*(p) + f^{**}(x)$ e vale l'uguaglianza se e solo se $x \in \partial f^*(p)$.

D'altro canto, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\partial f(x) \neq \emptyset$ se e solo se $f^{**}(x) = f(x)$ e pertanto, riassumendo in modo conciso, valgono le seguenti equivalenze: per ogni $x, p \in \mathbb{R}$,

$$f^{**}(x) = f(x) \;\Leftrightarrow\; p \in \partial f(x) \;\Leftrightarrow\; xp = f(x) + f^*(p) \;\Leftrightarrow\; x \in \partial f^*(p). \tag{2.18}$$

Sia inoltre $g\colon \mathbb{R} \to\, ]-\infty, +\infty]$ una funzione tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x)$. Allora, per ogni $p \in \mathbb{R}$, $g^*(p) \leq f^*(p)$ e così, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f^{**}(x) \leq g^{**}(x) \leq g(x)$.

Supponiamo infine che $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia una funzione scalare convessa, quindi continua, su tutto $\mathbb{R}$ e consideriamo, per ogni $x \in \mathbb{R}$, la derivata destra $f'_+(x)$ di $f$ calcolata in $x$:

$$f'_+(x) \equiv \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \equiv \inf_{\substack{y\in\mathbb{R}\\ y>x}} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Allora, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f'_+(x) \in \partial f(x)$ (ed anzi ne è l'elemento massimo) e per ciò $f^{**}(x) = f(x)$, ovvero $f^{**} \equiv f$, ed in particolare $f^*$ non vale identicamente $+\infty$.

Come conseguenza notevole di tutto questo, ogni funzione $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ammette come inviluppo convesso, o cioè come convessificata, la funzione $g^{**}$.

**Proposizione 2.2.1.** *Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione scalare convessa e non decrescente su tutto $\mathbb{R}$ e sia $f^*\colon \mathbb{R} \to\, ]-\infty, +\infty]$ la trasformata di Fenchel-Legendre della funzione $f$ definita come in* (2.16)*. Allora valgono le tre seguenti proprietà basilari.*

- *Denotiamo $D \equiv D_{f^*}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dato da*

$$D := (f^*)^{-1}(\mathbb{R}) \equiv \{\, p \in \mathbb{R} \mid f^*(p) < +\infty \,\}$$

*e quindi $p_0 := \inf D$. Allora $D$ è non vuoto e $p_0 \geq 0$.*

- *Denotiamo* $A \equiv A_{f^*}$ *il sottoinsieme di* $\mathbb{R}$ *dato da*

$$A \coloneqq \operatorname{argmin}_{\mathbb{R}} f^* \equiv \{\, p \in \mathbb{R} \mid f^*(p) = -f(0) \,\}$$

*e quindi* $\overline{p} \coloneqq \inf A$. *Allora* $A$ *è non vuoto,* $\overline{p} \geq 0$ *e* $\overline{p} \in A$. *Inoltre, per ogni* $p \in [\overline{p}, +\infty[$,

$$f^*(p) = \sup_{y \in [0,+\infty[} \{py - f(y)\}$$

*ed in particolare* $f^*\big|_{[\overline{p},+\infty[} : [\overline{p}, +\infty[ \,\to\, ]-\infty, +\infty]$ *è una funzione non decrescente.*

- *Se la funzione* $f$ *verifica* $\lim_{x\uparrow+\infty} f(x) = +\infty$, *allora la funzione* $f^*$ *verifica*

$$\lim_{p\uparrow+\infty} \frac{f^*(p)}{p} = +\infty.$$

*Dimostrazione.* È tutto piuttosto immediato e tuttavia si rivela essenziale l'ipotesi che $f$ sia una funzione convessa e non decrescente su tutto $\mathbb{R}$. Infatti, a riguardo della prima proprietà, il fatto che la funzione $f^*$ non valga identicamente $+\infty$ equivale ad avere $D \neq \emptyset$, mentre il fatto che, per ogni $p \in \,]-\infty, 0[$, $f^*(p) = +\infty$ equivale ad avere $p_0 \geq 0$.

A riguardo invece della seconda proprietà, osserviamo per cominciare che vale

$$A = \partial f(0) \equiv \{\, p \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R},\ py \leq f(y) - f(0) \,\} \subseteq D$$

e che quindi da una parte $f'_+(0) \in A$, ad esempio, da cui $A \neq \emptyset$, mentre d'altra parte $\overline{p} \geq p_0 \geq 0$. Così $\overline{p} \in A$, ovvero $f^*(\overline{p}) \leq -f(0)$, grazie alla semi-continuità di $f^*$ ed inoltre, per ogni $p \in [\overline{p}, +\infty[$ e $y \in \,]-\infty, 0[$, da $py \leq \overline{p}y \leq f(y) - f(0)$ deduciamo subito

$$\sup_{y \in ]-\infty,0[} \{py - f(y)\} \leq -f(0) \equiv \min_{q \in \mathbb{R}} f^*(q).$$

A riguardo della terza proprietà, infine, notiamo anzitutto che, per ogni $p \in \,]\overline{p}, +\infty[$, risulta $p > 0$ e per ciò

$$\frac{f^*(p)}{p} = \sup_{y \in [0,+\infty[} \left\{ y - \frac{f(y)}{p} \right\}$$

grazie a quanto appena dimostrato. Dunque, sempre per ogni $p \in \,]\overline{p}, +\infty[$, denotiamo $S_p \equiv S_p(f)$ il $p$-sottolivello di $f$ dato per definizione da

$$S_p \coloneqq f^{-1}(]-\infty, p]) \equiv \{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq p \,\}$$

e restringiamoci ai soli $p > \overline{p}$ grandi abbastanza affinché $S_p \neq \emptyset$ ($S_p \uparrow \mathbb{R}$ per $p \uparrow +\infty$), in corrispondenza dei quali denotiamo quindi $x_p \coloneqq \sup S_p$. Allora, grazie alla ipotesi, per ciascuno di tali $p$ è $x_p \in S_p$ e precisamente $f(x_p) = p$, da cui $x_p \uparrow +\infty$ per $p \uparrow +\infty$, e di conseguenza possiamo supporre che $x_p \geq 0$ e concludere pertanto osservando che

$$\frac{f^*(p)}{p} \geq x_p - 1 \uparrow +\infty \text{ per } p \uparrow +\infty. \qquad \square$$

*Osservazione* 2.2.1. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione scalare convessa e non decrescente su tutto $\mathbb{R}$ per la quale esista $\widehat{x} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tale che $f\big|_{]\widehat{x},+\infty[}$ sia di classe $C^1$ su tutto $]\widehat{x}, +\infty[$ e la cui funzione derivata prima

$$f' \coloneqq \frac{d}{dx}\Big(f\big|_{]\widehat{x},+\infty[}\Big)\colon\, ]\widehat{x}, +\infty[\, \to [0, +\infty[$$

abbia immagine $f'(]\widehat{x}, +\infty[) \supseteq\, ]0, +\infty[$ sulla quale inoltre risulti biunivoca. Sia quindi $f^*\colon \mathbb{R} \to\, ]-\infty, +\infty]$ la trasformata di Fenchel-Legendre della funzione $f$ definita come in (2.16) a pagina 29. Allora, per ogni $p \in \mathbb{R}$,

$$f^*(p) = \begin{cases} [\, px - f(x)\,]\big|_{x=(f')^{-1}(p)}, & \text{se } p > 0, \\ -\inf_{y\in\mathbb{R}} f(y), & \text{se } p = 0, \\ +\infty, & \text{se } p < 0, \end{cases}$$

ed in particolare, per ogni $p \in\, ]0, +\infty[$, è $f^*(p) < +\infty$. Come esempio, la funzione esponenziale $f(x) \coloneqq e^x$, $x \in \mathbb{R}$, è tale che, per ogni $p \in\, ]0, +\infty[$, $f^*(p) = p(\log p - 1)$. Oppure, modificando leggermente la notazione, la funzione $f(x) \equiv f_p(x) \coloneqq \frac{1}{p}(x^+)^p$, $x \in \mathbb{R}$, dove $p \in\, ]1, +\infty[$, è tale che, se $q \equiv q_p \in\, ]1, +\infty[$ denota l'esponente coniugato di $p$, ossia $q \coloneqq \frac{p}{p-1}$ (quello che verifica $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) allora, per ogni $z \in [0, +\infty[$, $f^*(z) = \frac{1}{q} z^q$.

*Nota.* Vengono adottate le due seguenti notazioni standard: per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$a^+ \equiv a \vee 0 \quad \text{e} \quad a^- \equiv -(a \wedge 0).$$

Come manuale di analisi convessa si consulti se necessario [Roc70].

### 2.2.2 Funzioni di perdita e formula di rappresentazione

**Definizione 2.2.1** (Funzione di perdita)**.** Chiamiamo *funzione di perdita* ogni funzione $\ell\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia non identicamente costante, non decrescente e convessa su tutto $\mathbb{R}$.

*Osservazione* 2.2.2. Sia $\ell\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di perdita. Allora è evidente che $\ell$ sia continua su tutto $\mathbb{R}$, la cui immagine abbia parte interna $\operatorname{int} \ell(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, e che verifichi

$$\lim_{x\uparrow+\infty} \ell(x) = +\infty. \tag{2.19}$$

Fissiamo una qualsiasi funzione $\ell\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di perdita e quindi un elemento $a \equiv a_\ell \in \mathbb{R}$ che appartenga alla parte interna dell'immagine di $\ell$ stessa: in simboli,

$$a \in \operatorname{int} \ell(\mathbb{R}). \tag{2.20}$$

Denotiamo dunque $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_{\ell,a} \equiv \mathcal{A}^{\mathbf{P}}_{\ell,a}$ il sottoinsieme non vuoto di $L^\infty(\mathbf{P})$ dato da

$$\mathcal{A} \doteq \Big\{\, X \in L^\infty(\mathbf{P}) \;\Big|\; \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[\,\ell(-X)\,\big] \leq a \,\Big\} \tag{2.21}$$

e consideriamo la mappa $\rho \equiv \rho_{\mathcal{A}} \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho(X) \doteq \inf\{\, m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A} \,\} \tag{2.22}$$

come in (1.6) del corollario 1.1.1 a pagina 9. Allora, grazie tra l'altro alla precedente osservazione 2.2.2, l'insieme $\mathcal{A}$ verifica chiaramente le quattro proprietà (A1′), (A2′), (A3′) e (A4′) della proposizione 1.1.5 a pagina 8 e per ciò, grazie ancora al corollario 1.1.1 a pagina 9, $\rho$ è una misura convessa di rischio e l'insieme di accettazione $\mathcal{A}_\rho$ secondo $\rho$ coincide proprio con l'insieme $\mathcal{A}$: in simboli,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\rho \tag{2.23}$$

(sebbene $\rho$ non possa esser uguale a $X \mapsto \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[\,\ell\big(-X\big)\,\big] - a$, $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, in generale).

L'insieme $\mathcal{A}$ soddisfa inoltre la proprietà ($\mathrm{RF}''_\infty$) dell'osservazione 1.2.2 a pagina 12 e così, equivalentemente, la misura convessa di rischio $\rho$ possiede la proprietà di Fatou (si veda a proposito la proposizione 1.2.2 a pagina 11). Pertanto, supponendo che $L^1(\mathbf{P})$ sia uno spazio separabile ed in virtù quindi del corollario 1.2.1 a pagina 13, della proposizione 1.2.4 a pagina 16 ed in definitiva del teorema 1.2.1 di rappresentazione a pagina 18, e se $\mathcal{P} \equiv \{\, \mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \,\}$ denota la classe definita come in (1.7) a pagina 14, allora la mappa $\alpha_\rho \colon \mathcal{P} \to \,]-\infty, +\infty]$ definita ponendo, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$,

$$\alpha_\rho(\mathbf{Q}) \doteq \sup_{Y \in \mathcal{A}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y] \tag{2.24}$$

è una funzione di penalità tale che, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, risulti

$$\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \sup_{X \in L^\infty(\mathbf{P})} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \rho(X) \Big\} \tag{2.25}$$

e tale che valga la seguente formula di rappresentazione per $\rho$: per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho(X) = \sup_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \alpha_\rho(\mathbf{Q}) < +\infty}} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha_\rho(\mathbf{Q}) \Big\}. \tag{2.26}$$

**Teorema 2.2.1.** *All'interno dell'ambito fin ora delineato, sia in più $\ell^* \colon \mathbb{R} \to \,]-\infty, +\infty]$ la trasformata di Fenchel-Legendre della funzione $\ell$ definita come in* (2.16) *a pagina 29 ed inoltre, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, denotiamo $f^{\mathbf{Q}} \equiv f^{\mathbf{Q},\mathbf{P}}$ la funzione di densità data da*

$$f^{\mathbf{Q}} \doteq \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\,. \tag{2.27}$$

*Allora vale la seguente identità: per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$,*

$$\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \inf_{\lambda \in ]0, +\infty[} \frac{1}{\lambda} \Big\{ a + \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[\,\ell^*\big(\lambda f^{\mathbf{Q}}\big)\,\big] \Big\}. \tag{2.28}$$

*Dimostrazione. Passo 1*: "$\leq$". Tenendo presente la (2.24), la tesi di questo primo risultato parziale diventa la seguente: per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, e per ogni $\lambda \in \,]0, +\infty[$ e $X \in \mathcal{A}$,

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] \leq \frac{1}{\lambda} \Big\{ a + \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[\,\ell^*\big(\lambda f^{\mathbf{Q}}\big)\,\big] \Big\}. \tag{2.29}$$

Siano per questo $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, $\lambda \in \,]0, +\infty[$ e $X \in \mathcal{A}$ arbitrari. Allora, per definizione di $\ell^*$,

$$\begin{aligned} -Xf^{\mathbf{Q}} &= \frac{1}{\lambda}\,(-X)\big(\lambda f^{\mathbf{Q}}\big) \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\,\big[\ell(-X) + \ell^*\big(\lambda f^{\mathbf{Q}}\big)\big] \end{aligned}$$

almeno $\mathbf{P}$-q.c., da cui la (2.29) passando alla speranza $\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[\,\cdot\,]$ e ricordando la (2.21).

*Passo 2*: è sufficiente dimostrare il teorema 2.2.1 sotto l'ipotesi aggiuntiva

$$\ell(0) < a. \tag{2.30}$$

Supponiamo infatti che valga la (2.28) del teorema sotto un'ipotesi tipo la (2.30) e, tornando invece al nostro contesto generale, consideriamo un qualsiasi $x_a \in \mathbb{R}$ tale che

$$\ell(-x_a) < a$$

e quindi la funzione $\widetilde{\ell} \equiv \widetilde{\ell}_{x_a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\widetilde{\ell}(x) \doteq \ell(x - x_a).$$

Allora $\widetilde{\ell}$ è evidentemente una funzione di perdita con $a \in \operatorname{int} \widetilde{\ell}(\mathbb{R})$ e la quale anzi verifica la rispettiva (2.30): per ciò, se come in (2.21) denotiamo

$$\widetilde{\mathcal{A}} \coloneqq \mathcal{A}_{\widetilde{\ell},a} \equiv \Big\{ \widetilde{X} \in L^\infty(\mathbf{P}) \;\Big|\; \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[\,\widetilde{\ell}(-\widetilde{X})\,\big] \leq a \Big\}$$

mentre $\widetilde{\ell^*} : \mathbb{R} \to \,]-\infty, +\infty]$ denota la trasformata di Fenchel-Legendre della funzione $\widetilde{\ell}$, allora la nostra supposizione implica che, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$,

$$\sup_{\widetilde{X} \in \widetilde{\mathcal{A}}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\big[-\widetilde{X}\big] = \inf_{\lambda \in ]0,+\infty[} \frac{1}{\lambda} \Big\{ a + \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[\,\widetilde{\ell^*}\big(\lambda f^{\mathbf{Q}}\big)\,\big] \Big\}.$$

A questo punto l'identità (2.28) del teorema discende in modo immediato per $\ell$ semplicemente perché $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} - x_a \equiv \{\, X - x_a \mid X \in \mathcal{A} \,\}$ mentre, per ogni $z \in \mathbb{R}$,

$$\widetilde{\ell^*}(z) = \ell^*(z) + z x_a.$$

*Passo 3*: "$\geq$". La tesi di quest'ultimo risultato parziale diventa dunque la seguente: per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$ con $\alpha_\rho(\mathbf{Q}) < +\infty$ e $\varepsilon \in \,]0, 1[$ con $\varepsilon \simeq 0$, esiste $\lambda_{\mathbf{Q},\varepsilon} \in \,]0, +\infty[$ tale che

$$\frac{1}{\lambda_{\mathbf{Q},\varepsilon}} \Big\{ a + \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[\,\ell^*\big(\lambda_{\mathbf{Q},\varepsilon} f^{\mathbf{Q}}\big)\,\big] \Big\} \leq \alpha_\rho(\mathbf{Q}) + \varepsilon. \tag{2.31}$$

Fissiamo per questo $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$ con $\alpha_\rho(\mathbf{Q}) < +\infty$ e procediamo ragionando per casi.

*Caso 1.* Supponiamo che le funzioni $\ell$ e $\ell^*$ verifichino le due seguenti proprietà.

**(i)** Esiste $\widehat{x} \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in \,]-\infty, \widehat{x}]$, è $\ell(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}} \ell(y) \equiv \min_{y \in \mathbb{R}} \ell(y)$. Inoltre, per ogni $z \in \,]0, +\infty[$, risulta $\ell^*(z) < +\infty$.

**(ii)** Sotto la precedente condizione (i), denotiamo $u\colon ]0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ la funzione derivata destra di $\ell^*\big|_{]0,+\infty[}$: in simboli, per ogni $z \in\, ]0,+\infty[$,

$$u(z) := \left(\ell^*\big|_{]0,+\infty[}\right)'_+(z).$$

Allora $u$ è continua su tutto $]0,+\infty[$ (anziché solo semi-continua superiormente).

Così, anzitutto, grazie anche alla (2.18) di pagina 30 deduciamo immediatamente che, per ogni $x \in\, ]-\infty, \widehat{x}\,[$, vale $0 \in \partial\ell(x)$ o cioè $x \in \partial\ell^*(0)$, e come facile conseguenza

$$\lim_{z\downarrow 0} u(z) \geq \widehat{x} \tag{2.32}$$

da cui certamente, in particolare,

$$\lim_{z\downarrow 0} \ell(u(z)) \geq \ell(\widehat{x}) \equiv \min_{y\in\mathbb{R}} \ell(y) \quad \text{e} \quad \lim_{z\downarrow 0} z\cdot u(z) = 0.$$

A questo punto, per ogni $z \in\, ]0,+\infty[$, il fatto che $u(z) \in \partial\ell^*(z)$ implica subito che $\ell(u(z)) + \ell^*(z) = zu(z)$ grazie nuovamente alla (2.18) e pertanto, visto poi che

$$\inf_{q\in\mathbb{R}} \ell^*(q) \geq -\ell(0) > -a$$

grazie invece alla (2.30) del passo precedente, otteniamo che, per ogni $z \in\, ]0,+\infty[$,

$$\ell(u(z)) - a < \ell(u(z)) - \ell(0) \leq zu(z)$$

e dunque, mettendo assieme il tutto, che

$$\lim_{z\downarrow 0} \ell(u(z)) < a. \tag{2.33}$$

D'altro canto, grazie alla (2.19) dell'osservazione 2.2.2 unita alla terza proprietà della proposizione 2.2.1 a pagina 30, ed una volta notato che, per ogni $z \in\, ]0,+\infty[$,

$$u(z) = \frac{\ell(u(z))}{z} + \frac{\ell^*(z)}{z} \geq \frac{1}{z} \cdot \min_{y\in\mathbb{R}} \ell(y) + \frac{\ell^*(z)}{z}$$

deduciamo subito che $\lim_{z\uparrow+\infty} u(z) = +\infty$ e quindi che

$$\lim_{z\uparrow+\infty} \ell(u(z)) = +\infty. \tag{2.34}$$

Ebbene, restringendoci ai soli $n \equiv n_{\mathbf{Q}} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tali per cui risulti definitivamente $\{\, f^{\mathbf{Q}} \leq n \,\} \neq \emptyset$ (eventi i quali $\uparrow \Omega$ per $n \to +\infty$), possiamo contare senza dubbio sull'esistenza di una successione non crescente $(\lambda_n)_n$ in $]0,+\infty[$ tale che, per ogni $n$,

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[\, \ell\Big(u\big(\lambda_n f^{\mathbf{Q}}\big)\mathbb{1}_{\{f^{\mathbf{Q}}\leq n\}}\Big) \,\right] = a \tag{2.35}$$

grazie proprio alla (2.33) ed alla (2.34) precedenti.

Consideriamo adesso la successione $(X_n)_n$ in $L^\infty(\mathbf{P})$ data da, per ogni $n$ (e $\mathbf{P}$-q.c.),

$$X_n \doteq -u\big(\lambda_n f^{\mathbf{Q}}\big)\,\mathbb{1}_{\{f^{\mathbf{Q}}\le n\}}.$$

Allora tale $(X_n)_n$ è in realtà a valori in $\mathcal{A}$, come risulta evidente dalla (2.35), ed inoltre è limitata superiormente giacché, come conseguenza della (2.32) di poc'anzi, la funzione $u$ è limitata inferiormente su $]0,+\infty[$ (si osservi a proposito quanto sia stata adoperata fin ora la non decrescenza e soprattutto la supposta continuità della funzione $u$).

In più, valgono pure le due seguenti elementari identità: per ogni $n$ (e $\mathbf{P}$-q.c.),

$$\begin{aligned}
-X_n f^{\mathbf{Q}} &= \frac{1}{\lambda_n}\,\big(-X_n\big)\big(\lambda_n f^{\mathbf{Q}}\big)\\
&= \frac{1}{\lambda_n}\,\Big(u\big(\lambda_n f^{\mathbf{Q}}\big)\Big)\Big(\lambda_n f^{\mathbf{Q}}\Big)\,\mathbb{1}_{\{f^{\mathbf{Q}}\le n\}}\\
&= \frac{1}{\lambda_n}\,\Big[\ell\Big(u\big(\lambda_n f^{\mathbf{Q}}\big)\Big)+\ell^*\Big(\lambda_n f^{\mathbf{Q}}\Big)\Big]\,\mathbb{1}_{\{f^{\mathbf{Q}}\le n\}}
\end{aligned}$$

e $\ell\big(u\big(\lambda_n f^{\mathbf{Q}}\big)\big)\mathbb{1}_{\{f^{\mathbf{Q}}\le n\}} = \ell\big(u\big(\lambda_n f^{\mathbf{Q}}\big)\mathbb{1}_{\{f^{\mathbf{Q}}\le n\}}\big) - \ell\big(0\big)\mathbb{1}_{\{f^{\mathbf{Q}}> n\}}$. Calcolando per entrambe la speranza $\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[\,\cdot\,]$ dei rispettivi membri ed usando ancora la (2.35), arriviamo così a

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X_n] = \frac{1}{\lambda_n}\Big\{a-\ell\big(0\big)\cdot\mathbf{P}\big[f^{\mathbf{Q}}>n\big]+\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[\,\ell^*\big(\lambda_n f^{\mathbf{Q}}\big)\mathbb{1}_{\{f^{\mathbf{Q}}\le n\}}\,\big]\Big\}. \tag{2.36}$$

Ma ora, per ogni $n$, $\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[\,\ell^*\big(\lambda_n f^{\mathbf{Q}}\big)\mathbb{1}_{\{f^{\mathbf{Q}}\le n\}}\,\big] \ge \big(-\ell(0)\big)\cdot\mathbf{P}\big[f^{\mathbf{Q}}\le n\big]$ e dunque

$$+\infty > \alpha_\rho(\mathbf{Q}) \ge \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X_n] \ge \frac{a-\ell(0)}{\lambda_n} > 0 \tag{2.37}$$

(tenendo presente anche la (2.30) del passo precedente). Pertanto, se denotiamo

$$\lambda_\infty := \inf\nolimits_n \lambda_n$$

allora $\lambda_\infty > 0$ grazie alla (2.37) e quindi, non dimenticando la solita $\inf_{q\in\mathbb{R}}\ell^*(q)\ge-\ell(0)$, la (2.36) ed il classico lemma di Fatou danno subito che, per ogni $\varepsilon\in\,]0,1[$ con $\varepsilon\simeq 0$,

$$\begin{aligned}
\alpha_\rho(\mathbf{Q})+\varepsilon > \alpha_\rho(\mathbf{Q})&\\
&\ge \liminf\nolimits_n\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X_n]\\
&\ge \frac{1}{\lambda_\infty}\Big\{a+\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[\,\ell^*\big(\lambda_\infty f^{\mathbf{Q}}\big)\,\big]\Big\}
\end{aligned}$$

ed in ciò riconosciamo la desiderata (2.31) con $\lambda_{\mathbf{Q},\varepsilon}\equiv\lambda_\infty\in\,]0,+\infty[$ (costante in $\varepsilon$).

*Caso 2.* Supponiamo che le funzioni $\ell$ e $\ell^*$ verifichino la proprietà (i) ma non necessariamente la proprietà (ii). Allora la funzione $u$ risulta soltanto semi-continua superiormente e non decrescente su $]0,+\infty[$ ed in particolare, come tale, è il limite puntuale e dall'alto di una successione non crescente di funzioni $]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ costanti a tratti e a loro volta semi-continue superiormente e non decrescenti. Comprendiamo così che, per ogni fissato $\varepsilon\in\,]0,1[$ con $\varepsilon\simeq 0$, la $u$ può esser approssimata puntualmente e dall'alto da una funzione $\widetilde{u} \equiv (\widetilde{u})_\varepsilon \colon ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ continua e non decrescente tale che, se denotiamo $\widetilde{\ell^*} \equiv (\widetilde{\ell^*})_{\widetilde{u}} \colon \mathbb{R} \to ]-\infty,+\infty]$ la mappa definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{R}$,

$$\widetilde{\ell^*}(z) \doteq \begin{cases} \ell^*(0) + \displaystyle\int_0^z \widetilde{u}(q)\,dq, & \text{se } z \geq 0, \\ +\infty, & \text{se } z < 0, \end{cases}$$

allora, per ogni $z \in [0,+\infty[$ o meglio per ogni $z \in \mathbb{R}$, risulta

$$\ell^*(z) \leq \widetilde{\ell^*}(z) \leq \ell^*((1+\varepsilon)z). \tag{2.38}$$

Dunque la funzione $\widetilde{\ell^*}$ è limitata inferiormente da $-\ell(0) > -a$ su tutto $\mathbb{R}$ mentre risulta finita, non decrescente, convessa e derivabile con continuità su tutto $]0,+\infty[$ con funzione derivata uguale identicamente a $\widetilde{u}$.

Continuando a rispettare le due solite definizioni generali (2.16) e (2.17) di pagina 29, e se in particolare denotiamo $\widetilde{\ell} \coloneqq (\widetilde{\ell^*})^* \colon \mathbb{R} \to ]-\infty,+\infty]$ e $\widetilde{\ell}^* \coloneqq (\widetilde{\ell^*})^{**} \colon \mathbb{R} \to ]-\infty,+\infty]$ (notando tra l'altro che $(\widetilde{\ell^*})^*(0) < a < +\infty$) allora, per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale

$$\ell\Big(\frac{x}{1+\varepsilon}\Big) \leq \widetilde{\ell}(x) \leq \ell(x)$$

grazie alla precedente (2.38) e quindi alle due identità fondamentali $\ell^{**}(x) = \ell(x)$ e

$$\Big(\ell^*\big((1+\varepsilon)(\,\cdot\,)\big)\Big)^*(x) = \ell^{**}\Big(\frac{x}{1+\varepsilon}\Big) = \ell\Big(\frac{x}{1+\varepsilon}\Big).$$

Inoltre, per ogni $z \in ]0,+\infty[$, $\partial\widetilde{\ell^*}(z) \neq \emptyset$ implica subito $(\,\widetilde{\ell}\,)^*(z) \equiv \widetilde{\ell}^*(z) = \widetilde{\ell^*}(z)$ grazie alla (2.18) di pagina 30 e così, in definitiva, $\widetilde{\ell} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione di perdita con $a \in \operatorname{int} \widetilde{\ell}(\mathbb{R})$ e la quale verifica sia la proprietà (i) ché la proprietà (ii) (dove in quest'ultima $\widetilde{u}$ è al posto di $u$, ovviamente).

Pertanto, in virtù del precedente caso dimostrativo, se come in (2.21) denotiamo

$$\widetilde{\mathcal{A}} \coloneqq \mathcal{A}_{\widetilde{\ell},a} \equiv \Big\{\, \widetilde{X} \in L^\infty(\mathbf{P}) \;\Big|\; \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[\,\widetilde{\ell}(-\widetilde{X})\,\big] \leq a \,\Big\}$$

e per ciò evidentemente $\widetilde{\mathcal{A}} \subseteq (1+\varepsilon)\mathcal{A} \equiv \{\,(1+\varepsilon)X \mid X \in \mathcal{A}\,\}$, allora in conclusione

$$\begin{aligned} \inf_{\lambda \in ]0,+\infty[} \frac{1}{\lambda}\Big\{a + \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[\,\ell^*(\lambda f^{\mathbf{Q}})\,\big]\Big\} &\leq \inf_{\lambda \in ]0,+\infty[} \frac{1}{\lambda}\Big\{a + \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[\,\widetilde{\ell^*}(\lambda f^{\mathbf{Q}})\,\big]\Big\} \\ &= \sup_{\widetilde{X} \in \widetilde{\mathcal{A}}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\big[-\widetilde{X}\big] \\ &\leq \sup_{X_\varepsilon \in (1+\varepsilon)\mathcal{A}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\big[-X_\varepsilon\big] \\ &= (1+\varepsilon) \cdot \alpha_\rho(\mathbf{Q}) \\ &\approx_{\varepsilon \downarrow 0} \alpha_\rho(\mathbf{Q}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

*Caso 3.* Supponiamo infine che le funzioni $\ell$ e $\ell^*$ non verifichino necessariamente nemmeno la proprietà (i). Tuttavia la funzione $\ell$ è il limite puntuale e dall'alto di una successione non crescente $(\ell_n)_n$ di altre funzioni di perdita tali che, per ogni $n$, la $\ell_n$ abbia $\ell_n(0) = \ell(0) < a$ e verifichi inoltre la proprietà (i) con naturalmente un proprio punto di minimo $\widehat{x}_n \in \mathbb{R}$ ed una propria trasformata di Fenchel-Legendre $\ell_n^* := (\ell_n)^*$.

Ad esempio infatti, se $(\widehat{m}_n)_{n\geq 1}$ è una qualsiasi successione scalare non crescente, limitata superiormente da $\ell(0)$ e tale che $\widehat{m}_n \downarrow \inf_{y\in\mathbb{R}} \ell(y)$ (per $n \to +\infty$), allora basta considerare, per ogni $n \geq 1$, la funzione $\ell_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\ell_n(x) \doteq \ell(x) \vee \widehat{m}_n + \frac{1}{n}(e^x - 1)^+$$

(si tenga presente pure l'elementare osservazione 2.2.1 a pagina 32).

Così, per ogni $n$, se $\ell_n^* := (\ell_n)^* \colon \mathbb{R} \to \,]-\infty, +\infty]$ denota come sopra la trasformata di Fenchel-Legendre della funzione $\ell_n$, allora il fatto che, per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed ogni $n$, risulti appunto $\ell(x) \equiv \inf_k \ell_k(x) \leq \ell_{n+1}(x) \leq \ell_n(x)$ implica immediatamente che viceversa, per ogni $z \in \mathbb{R}$ ed ogni $n$, valga $\ell_n^*(z) \leq \ell_{n+1}^*(z) \leq \sup_k \ell_k^*(z) = \ell^*(z)$: in simboli,

$$\ell_n^*(z) \uparrow \ell^*(z).$$

Inoltre, limitandoci ora a considerare i soli indici $n$ per i quali risulti definitivamente $a \in \operatorname{int} \ell_n(\mathbb{R})$, e se come in (2.21) ed in (2.24) denotiamo rispettivamente, per ogni $n$,

$$\mathcal{A}^n := \mathcal{A}_{\ell_n,a} \equiv \left\{ X^n \in L^\infty(\mathbf{P}) \;\middle|\; \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[\,\ell_n\big(-X^n\big)\,\big] \leq a \right\} \quad \text{e} \quad \alpha_\rho^n(\mathbf{Q}) := \sup_{Y^n \in \mathcal{A}^n} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\big[-Y^n\big]$$

allora vediamo chiaramente che, per ogni $n$, $\mathcal{A}^n \subseteq \mathcal{A}^{n+1} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \liminf_k \mathcal{A}^k$ e che quindi

$$\alpha_\rho^n(\mathbf{Q}) \uparrow \alpha_\rho(\mathbf{Q})$$

(si veda se necessario la nota 1.3.3 a pagina 22).

Dunque il precedente caso dimostrativo garantisce senz'altro che, per ogni $n$ e $\varepsilon \in \,]0, 1[$ con $\varepsilon \simeq 0$, ambedue fissati, esiste $\lambda_\varepsilon^n \equiv \lambda_{\mathbf{Q},\varepsilon}^n \in \,]0, +\infty[$ tale che

$$\begin{aligned} +\infty &> \alpha_\rho(\mathbf{Q}) + \varepsilon \\ &\geq \alpha_\rho^n(\mathbf{Q}) + \varepsilon \\ &\geq \frac{1}{\lambda_\varepsilon^n} \Big\{ a + \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[\,\ell_n^*\big(\lambda_\varepsilon^n f^{\mathbf{Q}}\big)\,\big] \Big\}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Ricordata adesso la proposizione 2.2.1 a pagina 30 ed in particolare che, per ogni $n$,

$$\inf_{q\in\mathbb{R}} \ell_n^*(q) = -\ell_n(0) = -\ell(0) \quad \text{e} \quad \lim_{z\uparrow+\infty} \frac{\ell_n^*(z)}{z} = +\infty$$

deduciamo subito dalla (2.39) che $\liminf_k \lambda_\varepsilon^k > 0$ e $\sup_k \lambda_\varepsilon^k < +\infty$ e per ciò che esiste $\lambda_\varepsilon \in \,]0, +\infty[$ tale che, a meno di passare ad opportune sottosuccessioni di $(\lambda_\varepsilon^n)_n$, valga

$$\lim_n \lambda_\varepsilon^n = \lambda_\varepsilon.$$

Pertanto, grazie nuovamente alla limitazione inferiore uniforme $\inf_{q\in\mathbb{R}} \ell_n^*(q) = -\ell(0)$ e quindi al classico lemma di Fatou, ricaviamo

$$\begin{aligned}\alpha_\rho(\mathbf{Q}) + \varepsilon &\geq \liminf_n \frac{1}{\lambda_\varepsilon^n}\Big\{a + \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[\,\ell_n^*\big(\lambda_\varepsilon^n f^{\mathbf{Q}}\big)\,\big]\Big\}\\ &\geq \frac{1}{\lambda_\varepsilon}\Big\{a + \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[\,\ell^*\big(\lambda_\varepsilon f^{\mathbf{Q}}\big)\,\big]\Big\}\end{aligned}$$

ovvero la (2.31) con $\lambda_{\mathbf{Q},\varepsilon} \equiv \lambda_\varepsilon \in\, ]0,+\infty[$ e di conseguenza, finalmente, la (2.28). □

Consideriamo adesso un qualsiasi sottoinsieme non vuoto $\widetilde{\mathcal{P}}$ della classe $\mathcal{P}$ costituito solamente da probabilità $\widetilde{\mathbf{P}}$ su $\mathcal{F}$ le quali siano tutte equivalenti alla probabilità $\mathbf{P}$, ovvero $\widetilde{\mathbf{P}} \approx \mathbf{P}$, ed in particolare tali per cui resti $L^\infty(\widetilde{\mathbf{P}}) = L^\infty(\mathbf{P})$. Così, analogamente a (2.21) e per ogni $\widetilde{\mathbf{P}} \in \widetilde{\mathcal{P}}$, sia $\mathcal{A}^{\widetilde{\mathbf{P}}} := \mathcal{A}^{\widetilde{\mathbf{P}}}_{\ell,a}$ il sottoinsieme non vuoto di $L^\infty(\mathbf{P})$ dato da

$$\mathcal{A}^{\widetilde{\mathbf{P}}} \equiv \Big\{\, X \in L^\infty(\mathbf{P}) \,\Big|\, \mathbf{E}^{\widetilde{\mathbf{P}}}\big[\,\ell(-X)\,\big] \leq a \,\Big\}$$

e quindi, analogamente a (2.22) e sempre per ogni $\widetilde{\mathbf{P}} \in \widetilde{\mathcal{P}}$, sia $\rho_{\widetilde{\mathbf{P}}} := \rho_{\mathcal{A}^{\widetilde{\mathbf{P}}}} : L^\infty(\mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ la mappa definita ponendo, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho_{\widetilde{\mathbf{P}}}(X) \equiv \inf\Big\{\, m \in \mathbb{R} \,\Big|\, X + m \in \mathcal{A}^{\widetilde{\mathbf{P}}} \,\Big\}\,.$$

Allora, in virtù di tutte le diverse ragioni che portano alle quattro identità generali (2.23), (2.25), (2.26) e, da ultima, la (2.28) del precedente teorema 2.2.1, rimane chiaro che, per ogni $\widetilde{\mathbf{P}} \in \widetilde{\mathcal{P}}$, $\rho_{\widetilde{\mathbf{P}}}$ è una misura convessa di rischio il cui insieme di accettazione coincide con l'insieme $\mathcal{A}^{\widetilde{\mathbf{P}}}$, la quale possiede la proprietà di Fatou e di conseguenza tale per cui, supponendo che $L^1(\mathbf{P})$ sia uno spazio separabile e se, analogamente a (2.24) e per ogni $\widetilde{\mathbf{P}} \in \widetilde{\mathcal{P}}$, $\alpha_{\rho_{\widetilde{\mathbf{P}}}} : \mathcal{P} \to\, ]-\infty,+\infty]$ è la mappa definita ponendo, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$,

$$\alpha_{\rho_{\widetilde{\mathbf{P}}}}(\mathbf{Q}) \equiv \sup_{Y \in \mathcal{A}^{\widetilde{\mathbf{P}}}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y] \equiv \sup_{X \in L^\infty(\mathbf{P})} \Big\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \rho_{\widetilde{\mathbf{P}}}(X)\Big\}$$

mentre poi, per ogni $\widetilde{\mathbf{P}} \in \widetilde{\mathcal{P}}$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, $f^{\mathbf{Q},\widetilde{\mathbf{P}}}$ resta definita in modo analogo alla (2.27), allora $\alpha_{\rho_{\widetilde{\mathbf{P}}}}$ risulta una funzione di penalità tale che valgano le due seguenti formule di rappresentazione per $\rho_{\widetilde{\mathbf{P}}}$ e $\alpha_{\rho_{\widetilde{\mathbf{P}}}}$ stessa: rispettivamente, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$,

$$\rho_{\widetilde{\mathbf{P}}}(X) = \sup_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \alpha_{\rho_{\widetilde{\mathbf{P}}}}(\mathbf{Q}) < +\infty}} \Big\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha_{\rho_{\widetilde{\mathbf{P}}}}(\mathbf{Q})\Big\},\ \alpha_{\rho_{\widetilde{\mathbf{P}}}}(\mathbf{Q}) = \inf_{\lambda \in ]0,+\infty[} \frac{1}{\lambda}\Big\{a + \mathbf{E}^{\widetilde{\mathbf{P}}}\big[\ell^*\big(\lambda f^{\mathbf{Q},\widetilde{\mathbf{P}}}\big)\big]\Big\}.$$

**Corollario 2.2.1.** *Sempre all'interno dell'ambito fin ora delineato, sia in più*

$$\mathcal{A}^{\widetilde{\mathcal{P}}} \doteq \bigcap_{\widetilde{\mathbf{P}} \in \widetilde{\mathcal{P}}} \mathcal{A}^{\widetilde{\mathbf{P}}}$$

*e sia* $\rho_{\widetilde{\mathcal{P}}} \coloneqq \rho_{\mathcal{A}^{\widetilde{\mathcal{P}}}} : L^\infty(\mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ *la mappa definita ponendo, per ogni* $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho_{\widetilde{\mathcal{P}}}(X) \doteq \inf \left\{ m \in \mathbb{R} \,\middle|\, X + m \in \mathcal{A}^{\widetilde{\mathcal{P}}} \right\}.$$

*Allora* $\rho_{\widetilde{\mathcal{P}}}$ *è una misura convessa di rischio il cui insieme di accettazione coincide con l'insieme* $\mathcal{A}^{\widetilde{\mathcal{P}}}$, *la quale possiede la proprietà di Fatou e tale per cui la mappa* $\alpha_{\widetilde{\mathcal{P}}} \coloneqq \inf_{\widetilde{\mathbf{P}} \in \widetilde{\mathcal{P}}} \alpha_{\rho_{\widetilde{\mathbf{P}}}}$ *sia una funzione di penalità tale che valgano le due seguenti formule di rappresentazione per* $\rho_{\widetilde{\mathcal{P}}}$ *e* $\alpha_{\widetilde{\mathcal{P}}}$ *stessa: rispettivamente, per ogni* $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ *e* $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$,

$$\rho_{\widetilde{\mathcal{P}}}(X) = \sup_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \alpha_{\widetilde{\mathcal{P}}}(\mathbf{Q}) < +\infty}} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha_{\widetilde{\mathcal{P}}}(\mathbf{Q}) \right\}, \ \alpha_{\widetilde{\mathcal{P}}}(\mathbf{Q}) = \inf_{\lambda \in ]0,+\infty[} \frac{1}{\lambda} \left\{ a + \inf_{\widetilde{\mathbf{P}} \in \widetilde{\mathcal{P}}} \mathbf{E}^{\widetilde{\mathbf{P}}} \left[ \ell^*\left(\lambda f^{\mathbf{Q},\widetilde{\mathbf{P}}}\right) \right] \right\}.$$

*Dimostrazione.* Grazie alle due elementari proposizioni 1.2.3 a pagina 13 e quindi 1.2.5 a pagina 20, è sufficiente proseguire col ragionamento di sopra osservando che vale

$$\rho_{\widetilde{\mathcal{P}}}(\,\cdot\,) = \sup_{\widetilde{\mathbf{P}} \in \widetilde{\mathcal{P}}} \rho_{\widetilde{\mathbf{P}}}(\,\cdot\,) < +\infty. \qquad \square$$

**Esempio 3.** Sia $\ell(x) \coloneqq e^x$, $x \in \mathbb{R}$, e sia $a \coloneqq 1$. Allora, per ogni $z \in [0, +\infty[$, vale

$$\ell^*(z) = \begin{cases} z(\log z - 1), & \text{se } z > 0, \\ 0, & \text{se } z = 0, \end{cases}$$

(si veda se necessario l'osservazione 2.2.1 a pagina 32) e così, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, troviamo

$$\begin{aligned} \alpha_\rho(\mathbf{Q}) &= \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[ \mathbb{1}_{\{f^{\mathbf{Q}} > 0\}} f^{\mathbf{Q}} \log f^{\mathbf{Q}} \right] \\ &\equiv H(\mathbf{Q} \,|\, \mathbf{P}) \in [0, +\infty] \end{aligned}$$

(grazie pure al fatto che l'estremo inferiore $\inf_{\lambda \in ]0,+\infty[} \left\{ \frac{1}{\lambda} + \log \lambda \right\}$ è in realtà un valor minimo il quale viene raggiunto se e solo se $\lambda \equiv \lambda_a = 1$), dove $H(\mathbf{Q} \,|\, \mathbf{P})$ denota per definizione l'entropia relativa di $\mathbf{Q}$ dato $\mathbf{P}$, talvolta chiamata anche informazione di Kullback-Leibler di $\mathbf{Q}$ dato, o contro, $\mathbf{P}$.

Notiamo che d'altro canto la (2.22) dà in modo immediato che, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\begin{aligned} \rho(X) &\equiv \inf \left\{ m \in \mathbb{R} \,\middle|\, \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[ e^{-X-m} \right] \le 1 \right\} \\ &= \log \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[ e^{-X} \right] \end{aligned}$$

(dunque $\rho$ si rivela una misura di rischio normalizzata) ed in particolare, unendo queste due cose, riconosciamo nella (2.25) la seguente formula notevole: per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$,

$$H(\mathbf{Q} \,|\, \mathbf{P}) = \sup_{X \in L^\infty(\mathbf{P})} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ -X \right] - \log \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[ e^{-X} \right] \right\}.$$

Se invece $\ell(x) := \frac{1}{p}(x^+)^p$, $x \in \mathbb{R}$, dove $p \in \,]1, +\infty[$, e se $a > 0$ è arbitrario, allora, per ogni $z \in [0, +\infty[$, vale $\ell^*(z) = \frac{1}{q} z^q$, dove $q \equiv q_p := \frac{p}{p-1}$ (si veda se necessario ancora l'osservazione 2.2.1 a pagina 32) e di conseguenza, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, otteniamo

$$\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \begin{cases} (ap)^{\frac{1}{p}} \cdot \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[\,(f^{\mathbf{Q}})^q\,\big]^{\frac{1}{q}} \equiv (ap)^{\frac{1}{p}}\,\|f^{\mathbf{Q}}\|_{L^q(\mathbf{P})}, & \text{se } f^{\mathbf{Q}} \in L^q(\mathbf{P}), \\ +\infty, & \text{se } f^{\mathbf{Q}} \notin L^q(\mathbf{P}), \end{cases}$$

(grazie pure al fatto che, per ogni $\mu \in \,]0, +\infty[$, l'estremo inferiore $\inf_{\lambda \in ]0,+\infty[} \frac{1}{\lambda}\big\{a + \frac{\mu\lambda^q}{q}\big\}$ è in realtà un valor minimo il quale viene raggiunto se e solo se $\lambda \equiv \lambda_{p,a,\mu} = (\frac{ap}{\mu})^{\frac{1}{q}}$).

*Osservazione.* A riguardo del caso $\ell(x) := e^x$, $x \in \mathbb{R}$, nel precedente esempio 3, risulta davvero semplice arrivare all'identità $\rho(X) = \log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[e^{-X}\big]$, $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, anche passando dalla formula di rappresentazione (2.26) per la quale $\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = H(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P})$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$.

Infatti da una parte il $\geq$ viene immediato dalla possibilità di valutare il termine $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha_\rho(\mathbf{Q})$, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, nella probabilità $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q}_X \in \mathcal{P}$ avente

$$f^{\mathbf{Q}} \equiv \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} := \frac{e^{-X}}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[e^{-X}\big]}\,.$$

D'altra parte, infine, il $\leq$ è dovuto in modo elementare alla classica disuguaglianza di Jensen per uno spazio di probabilità: per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$ (con $\alpha_\rho(\mathbf{Q}) < +\infty$),

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\big[-X\big] - \alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{f^{\mathbf{Q}}>0\}} \log \frac{e^{-X}}{f^{\mathbf{Q}}}\right] \leq \log \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{f^{\mathbf{Q}}>0\}} \frac{e^{-X}}{f^{\mathbf{Q}}}\right] \leq \log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[e^{-X}\big].$$

## 2.3 Misure di rischio definite da vincoli di commercio

### 2.3.1 Prevedibile convessità e formula di rappresentazione

Supponiamo assegnati due interi positivi $T, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e prendiamo in esame il modello matematico finanziario costituito alle sua fondamenta dallo scenario $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, da una data filtrazione $\mathbb{F} \equiv (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ a tempi in $\{0, 1, \ldots, T\}$ su di esso e da $d$ processi stocastici $\mathbb{F}$-adattati $S^i \equiv (S^i_t)_{t=0}^T$, $i = 1, \ldots, d$, i quali descrivano l'evoluzione del valore commercializzato di altrettanti stocks sul mercato (titoli rischiosi) e che assumiamo già attualizzati, ossia rapportati, rispetto ad un processo deterministico reale positivo $B^0 \equiv (B^0_t)_{t=0}^T$ il quale descriva invece il progresso del valore commercializzato di un dato bond sul mercato (titolo privo di rischio) e che dunque trascuriamo senza indugio.

Assumiamo a proposito che $\mathcal{F}_0$ sia $\mathbf{P}$-banale, che $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ e che, per ogni $i = 1, \ldots, d$, il processo $S^i$ sia a valori in $\mathbb{R}_+$ ($\mathbf{P}$-q.c.) e denotiamo $S \equiv (S_t)_{t=0}^T$ il processo stocastico a valori in $\mathbb{R}^d_+ \equiv (\mathbb{R}_+)^d$ definito ponendo, per ogni $t = 0, \ldots, T$,

$$S_t \doteq (S^1_t, \ldots, S^d_t)^{\mathsf{T}}.$$

*Nota.* Per ogni $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $v \in \mathbb{R}^N$, consideriamo $v$ per convenzione come vettore colonna di $N$ componenti scalari ordinate $v_1, \ldots, v_N$, quindi come matrice reale $N \times 1$, e denotiamo $v^\mathsf{T}$ il vettore trasposto di $v$. In particolare, vale $v = (v_1, \ldots, v_N)^\mathsf{T}$.

Viene adottata inoltre la seguente notazione standard: per ogni altro $w \in \mathbb{R}^N$,

$$v \cdot w \equiv \langle v, w \rangle_{2,\mathbb{R}^N} \equiv v^\mathsf{T} w = \sum_{n=1}^{N} v_n w_n.$$

Ogni dinamica ammissibile fra i $d$ processi $S^i$ corrisponde unicamente alle strategie di portafoglio (o di commercio) autofinanziato e cioè, in modo equivalente, denotando

$$\mathcal{F}_{-1} \coloneqq \mathcal{F}_0$$

a quei processi stocastici $H \equiv (H_t)_{t=0}^T \equiv ((H_t^1, \ldots, H_t^d)^\mathsf{T})_{t=0}^T$ a valori in $\mathbb{R}^d$ che risultino $\mathbb{F}$-prevedibili, ossia $(\mathcal{F}_{t-1})_{t=0}^T$-adattati, per ciascun dei quali e per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ il processo valore $V \equiv V^{x_0,H} \equiv (V_t)_{t=0}^T$ attualizzato del rispettivo portafoglio autofinanziato di investimento a costo $V_0 \equiv x_0$ sui $d$ attivi in oggetto è dato da, per ogni $t = 1, \ldots, T$,

$$V_t \doteq x_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \cdot \Delta S_s. \tag{2.40}$$

*Nota* 2.3.1. Per ogni $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ed ogni processo $X \equiv (X_t)_{t=0}^T \equiv ((X_t^1, \ldots, X_t^N)^\mathsf{T})_{t=0}^T$ a valori in $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{F}$-adattato, denotiamo $\Delta \equiv \Delta_- \equiv \Delta_{-,1}$ la differenza finita all'indietro di passo unitario in maniera che valga, per ogni $t = 0, \ldots, T$,

$$\Delta X_t \coloneqq \Delta(X_t) \equiv \begin{cases} X_0, & \text{se } t = 0, \\ X_t - X_{t-1}, & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

Allora il processo $\Delta X \equiv ((\Delta X)_t)_{t=0}^T \doteq (\Delta X_t)_{t=0}^T$ resta a valori in $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{F}$-adattato, ed inoltre vale la seguente identità fondamentale: per ogni $t = 1, \ldots, T$,

$$X_t = \sum_{s=0}^{t} \Delta X_s \equiv X_0 + \sum_{s=1}^{t} \Delta X_s.$$

Assumiamo adesso e per l'intera sezione la cosiddetta ipotesi di non arbitraggio per il modello, o più brevemente ipotesi NA, secondo la quale escludiamo dal modello stesso tutte le eventuali strategie di arbitraggio autofinanziato, o equivalentemente i processi $\widehat{H} \equiv (\widehat{H}_t)_{t=0}^T$ a valori in $\mathbb{R}^d$ e $\mathbb{F}$-prevedibili tali per cui il processo valore $\widehat{V} \equiv V^{0,\widehat{H}} \equiv (\widehat{V}_t)_{t=0}^T$ attualizzato del corrispondente portafoglio autofinanziato a costo zero, definito come in (2.40) dove $x_0 = 0$, soddisfi e $\widehat{V}_T \geq 0$ ($\mathbf{P}$-q.c.) e $\mathbf{P}\big[\widehat{V}_T > 0\big] > 0$.

Così, sotto l'ipotesi NA, le strategie $H \equiv (H_t)_{t=0}^T$ di portafoglio autofinanziato che ammettiamo all'interno del modello in questione devono verificare la seguente proprietà:

$$V_T \equiv \sum_{t=1}^{T} H_t \cdot \Delta S_t \geq 0 \;\Rightarrow\; V_T = 0 \text{ } (\mathbf{P}\text{-q.c.}).$$

*Osservazione* 2.3.1. Per ogni probabilità $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, per ogni strategia $H \equiv (H_t)_{t=0}^T$ di portafoglio autofinanziato ed ogni capitale iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$, possiamo sempre vedere il processo valore $V \equiv V^{x_0,H} \equiv (V_t)_{t=0}^T$ attualizzato del portafoglio autofinanziato a costo $V_0 \equiv x_0$, definito come in (2.40), come un processo $\mathbf{Q}$-integrabile nel senso che, per ogni $t = 1, \ldots, T$, risulti $V_t \in L^1(\mathbf{Q})$. Infatti, se $\widetilde{\mathbf{P}} \equiv \widetilde{\mathbf{P}}_{S,H} \approx \mathbf{P}$ è una probabilità equivalente rispetto alla quale, per ogni $i = 1, \ldots, d$ e $s = 1, \ldots, T$, sia $S_s^i, H_s^i \in L^2(\widetilde{\mathbf{P}})$ allora, per ogni $t = 1, \ldots, T$, è $V_t \in L^1(\widetilde{\mathbf{P}}) < L^1(\mathbf{Q})$.

**Definizione 2.3.1** (Insieme prevedibilmente convesso)**.** Sia $\mathscr{H} \equiv \mathscr{H}_{T,d,\mathbb{F},S}$ un insieme non vuoto formato soltanto da processi a valori in $\mathbb{R}^d$ i quali siano $\mathbb{F}$-prevedibili e tali che, per ogni $H \equiv (H_t)_{t=0}^T \in \mathscr{H}$, la v.a.r. $\sum_{t=1}^T H_t \cdot \Delta S_t$ risulti inferiormente limitata. Diciamo che $\mathscr{H}$ è un *insieme prevedibilmente convesso* se il processo $d$-dimensionale nullo appartiene a $\mathscr{H}$, ovvero $0 \in \mathscr{H}$, e se ogni processo reale e $\mathbb{F}$-prevedibile $\xi \equiv (\xi_t)_{t=0}^T$ a valori in $[0,1]$ verifica la seguente proprietà: per ogni coppia $H \equiv (H_t)_{t=0}^T \in \mathscr{H}$ e $\widetilde{H} \equiv (\widetilde{H}_t)_{t=0}^T \in \mathscr{H}$, il processo $H^\xi \equiv (H_t^\xi)_{t=0}^T$ definito ponendo, per ogni $t = 0, \ldots, T$,

$$H_t^\xi \doteq \xi_t H_t + (1 - \xi_t)\widetilde{H}_t$$

rimane un processo appartenente all'insieme $\mathscr{H}$.

*Osservazione* 2.3.2. Sia $\mathscr{H}$ un insieme prevedibilmente convesso e scegliamo un intero positivo $\tau \in \{0, 1, \ldots, T\}$ ed anche un processo $H \equiv (H_t)_{t=0}^T \in \mathscr{H}$. Allora l'elementare processo $H^{(\tau)} \equiv (H_t^{(\tau)})_{t=0}^T$ definito ponendo, per ogni $t = 0, \ldots, T$,

$$H_t^{(\tau)} \doteq \begin{cases} H_t, & \text{se } t = \tau, \\ 0, & \text{se } t \neq \tau, \end{cases}$$

resta chiaramente un membro dell'insieme $\mathscr{H}$.

Se prendiamo infine un ulteriore processo $\widetilde{H} \equiv (\widetilde{H}_t)_{t=0}^T \in \mathscr{H}$ e quindi, per ogni $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$, un evento $B_t \in \mathcal{F}_{t-1}$, allora giace in $\mathscr{H}$ pure il processo di traiettorie

$$\mathbb{1}_{B_t} H_t + \mathbb{1}_{\Omega \setminus B_t} \widetilde{H}_t, \quad t = 0, \ldots, T.$$

Fissiamo un arbitrario insieme prevedibilmente convesso $\mathscr{H} \equiv \mathscr{H}_{T,d,\mathbb{F},S}$, denotiamo $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_{\mathscr{H}}$ il sottoinsieme non vuoto di $L^\infty(\mathbf{P})$, nonché soprainsieme di $L_+^\infty(\mathbf{P})$, dato da

$$\mathcal{A} \doteq \bigcup_{H \in \mathscr{H}} \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \;\middle|\; X + \textstyle\sum_{t=1}^T H_t \cdot \Delta S_t \geq 0 \ (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \right\} \tag{2.41}$$

(a parole, l'insieme delle posizioni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ tali per cui $-X$ risulti copribile a costo zero per mezzo di una strategia di portafoglio autofinanziato tra quelle dell'insieme $\mathscr{H}$) e consideriamo la mappa $\rho \equiv \rho_{\mathcal{A}} \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho(X) \doteq \inf \{ m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A} \} \tag{2.42}$$

come in (1.5) della solita fondamentale proposizione 1.1.5 a pagina 8. Allora, sotto l'ipotesi NA e grazie anche all'osservazione 1.1.7 a pagina 10, $\rho$ è una misura convessa di rischio il cui insieme di accettazione $\mathcal{A}_\rho$ contiene l'insieme $\mathcal{A}$.

**Proposizione 2.3.1.** *All'interno dell'ambito fin ora delineato ed in particolare sotto l'ipotesi* NA*, supponiamo che* $L^1(\mathbf{P})$ *sia uno spazio separabile e che valga una formula di rappresentazione per* $\rho$ *come la* (1.22) *del teorema di rappresentazione 1.2.1 a pagina 18. Inoltre, per ogni* $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$*, denotiamo* $A^{\mathbf{Q}} \equiv (A_t^{\mathbf{Q}})_{t=0}^T$ *il processo reale non decrescente e* $\mathbb{F}$*-prevedibile con* $A_0^{\mathbf{Q}} \doteq 0$ *e determinato ponendo, per ogni* $t = 1, \ldots, T$,

$$\Delta A_t^{\mathbf{Q}} \doteq \operatorname*{ess\,sup}_{H \in \mathscr{H}} \Big\{ H_t \cdot \big( \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[S_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] - S_{t-1} \big) \Big\}.$$

*Allora la minima funzione di penalità* $\alpha_\rho$*, definita come in* (1.20) *sempre del teorema di rappresentazione 1.2.1, verifica la seguente identità: per ogni* $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$,

$$\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\big[A_T^{\mathbf{Q}}\big]. \tag{2.43}$$

*Nota.* Naturalmente ogni estremo superiore essenziale, così come ogni estremo inferiore essenziale, sarà da ritenere come definito rispetto alla probabilità $\mathbf{P}$ di riferimento.

*Dimostrazione.* Alla luce della nota 2.3.1, dell'osservazione 2.3.1 e dell'osservazione 2.3.2, e per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, il processo $A^{\mathbf{Q}}$ risulta effettivamente ben definito e tale che, per ogni $H \equiv (H_t)_{t=0}^T \in \mathscr{H}$ ed ogni $t = 1, \ldots, T$, sia

$$H_t \cdot \big( \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[S_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] - S_{t-1} \big) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[H_t \cdot \Delta S_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}].$$

In virtù quindi dell'osservazione 1.2.6 a pagina 20, specialmente della (1.26), il "$\leq$" nella (2.43) viene ottenuto verificando che, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$ ed ogni $X \in \mathcal{A}$,

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\big[A_T^{\mathbf{Q}}\big].$$

Siano per questo $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$ e $X \in \mathcal{A}$ qualsiasi. Notando subito che

$$A_T^{\mathbf{Q}} \equiv \sum_{t=1}^T \operatorname*{ess\,sup}_{H \in \mathscr{H}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[H_t \cdot \Delta S_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] \geq \operatorname*{ess\,sup}_{H \in \mathscr{H}} \sum_{t=1}^T \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[H_t \cdot \Delta S_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] \tag{2.44}$$

e se $H \equiv H^X \equiv (H_t)_{t=0}^T \in \mathscr{H}$ è tale che $-X \leq \sum_{t=1}^T H_t \cdot \Delta S_t$ ($\mathbf{P}$-q.c.), allora appunto

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\sum_{t=1}^T H_t \cdot \Delta S_t\right] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\sum_{t=1}^T \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[H_t \cdot \Delta S_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]\right] \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\big[A_T^{\mathbf{Q}}\big].$$

Viceversa, per arrivare al "$\geq$" della (2.43) fissiamo solamente $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$ ed osserviamo anzitutto che, per ogni $H \equiv (H_t)_{t=0}^T \in \mathscr{H}$ e $\widetilde{H} \equiv (\widetilde{H}_t)_{t=0}^T \in \mathscr{H}$, ed ogni $t = 0, \ldots, T$, se denotiamo $B_t \equiv B_t^{S,H,\widetilde{H},\mathbf{Q}} \in \mathcal{F}_{t-1}$ l'evento dato da

$$B_t \doteq \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[H_t \cdot \Delta S_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\widetilde{H}_t \cdot \Delta S_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] \ (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \Big\}$$

allora, grazie di nuovo all'osservazione 2.3.2, il processo $\bar{H} \equiv (\bar{H}_t)_{t=0}^T$ avente traiettorie

$$\bar{H}_t \doteq \mathbb{1}_{B_t} H_t + \mathbb{1}_{\Omega \setminus B_t} \widetilde{H}_t, \quad t = 0, \ldots, T,$$

è un processo appartenente all'insieme $\mathscr{H}$ e tale che, per ogni $t = 1, \dots, T$ (e $\mathbf{P}$-q.c.),

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\bar{H}_t \cdot \Delta S_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[H_t \cdot \Delta S_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] \vee \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\widetilde{H}_t \cdot \Delta S_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]. \tag{2.45}$$

Denotiamo dunque $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}^{\mathbf{Q}}_{\mathscr{H}}$ il sottoinsieme di $L^1(\Omega, \mathcal{F}_{T-1}, \mathbf{Q}) < L^1(\mathbf{Q})$ dato da

$$\mathcal{H} \doteq \left\{ \sum_{t=1}^{T} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[H_t \cdot \Delta S_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] \;\middle|\; H \equiv (H_t)_{t=0}^{T} \in \mathscr{H} \right\}.$$

A partire proprio dalla (2.45) capiamo allora che, per ogni $K, \widetilde{K} \in \mathcal{H}$, esiste $\bar{K} \in \mathcal{H}$ tale per cui $K \vee \widetilde{K} \leq \bar{K}$ ($\mathbf{P}$-q.c.) e così, tenendo presente pure la (2.44), $A^{\mathbf{Q}}_T$ si rivela il limite in senso $\mathbf{P}$-quasi certo di una successione in $\mathcal{H}$ non decrescente: in simboli,

$$A^{\mathbf{Q}}_T = \operatorname*{ess\,sup}_{K \in \mathcal{H}} K.$$

D'altro canto infine, per ogni $H \equiv (H_t)_{t=0}^{T} \in \mathscr{H}$ ed ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo chiaramente che $-\left(\sum_{t=1}^{T} H_t \cdot \Delta S_t\right) \wedge n \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\rho$ e pertanto

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\big[A^{\mathbf{Q}}_T\big] = \sup_{H \in \mathscr{H}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\sum_{t=1}^{T} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[H_t \cdot \Delta S_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]\right] = \sup_{\substack{H \in \mathscr{H} \\ n \in \mathbb{N}}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\left(\sum_{t=1}^{T} H_t \cdot \Delta S_t\right) \wedge n\right] \leq \alpha_\rho(\mathbf{Q})$$

da cui in definitiva la desiderata identità (2.43). □

È possibile dimostrare a proposito anche il seguente risultato: rimandiamo a [Föl02] e [Föl08] per opportune precisazioni.

**Teorema.** *Sempre all'interno dell'ambito fin ora delineato ed in particolare sotto l'ipotesi* NA, *supponiamo che $L^1(\mathbf{P})$ sia uno spazio separabile e che l'insieme $\mathscr{H}$ risulti chiuso rispetto alla convergenza in probabilità $\mathbf{P}$, ovvero alla convergenza $\mathbf{P}$-quasi certa. Allora valgono le quattro seguenti condizioni.*

1. *Per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, se $X \leq 0$ ($\mathbf{P}$-q.c.) e $\mathbf{P}[X < 0] > 0$, allora $\rho(X) > 0$.*
2. *Esiste una probabilità equivalente $\widetilde{\mathbf{P}} \equiv \widetilde{\mathbf{P}}_{\mathscr{H}} \approx \mathbf{P}$ che verifica le due seguenti proprietà.*
   - *$S$ è un processo $\widetilde{\mathbf{P}}$-integrabile.*
   - *Per ogni $H \equiv (H_t)_{t=0}^{T} \in \mathscr{H}$ ed ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, il processo $V \equiv V^{x_0,H} \equiv (V_t)_{t=0}^{T}$ definito come in* (2.40) *è una $\widetilde{\mathbf{P}}$-supermartingala rispetto a $\mathbb{F}$.*
3. *Le due precedenti condizioni 1 e 2 sono equivalenti all'ipotesi* NA.
4. *Vale una formula di rappresentazione per $\rho$ come la* (1.22) *del fondamentale teorema di rappresentazione 1.2.1 a pagina 18.*

*Nota.* L'insieme $\mathscr{H}$ è chiuso rispetto alla convergenza in probabilità $\mathbf{P}$, ovvero alla convergenza $\mathbf{P}$-quasi certa, se e solo se, per ogni successione di processi in $\mathscr{H}$

$$H^{(n)} \equiv (H^{(n)}_t)_{t=0}^{T} \equiv ((H^{(n),1}_t, \dots, H^{(n),d}_t)^\mathsf{T})_{t=0}^{T}$$

tale che, per ogni $i = 1, \dots, d$ e $t = 0, \dots, T$, esista $H^i_t \in L^0(\mathbf{P})$ tale per cui $H^{(n),i}_t \xrightarrow{\mathbf{P}} H^i_t$, oppure $\mathbf{P}$-q.c. (per $n \to +\infty$), il processo limite $H \equiv (H_t)_{t=0}^{T} \doteq ((H^1_t, \dots, H^d_t)^\mathsf{T})_{t=0}^{T}$ risulta a sua volta un elemento dell'insieme $\mathscr{H}$.

### 2.3.2 Funzioni di perdita combinate a vincoli di commercio

Supponiamo ancora che $L^1(\mathbf{P})$ risulti uno spazio separabile. Sia $\ell\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una designata funzione di perdita, sia $a \equiv a_\ell \in \operatorname{int} \ell(\mathbb{R})$ ed in loro corrispondenza denotiamo $\mathcal{A}_{\ell,a}$ come in (2.21) a pagina 32 mentre $\rho_{\ell,a} \equiv \rho_{\mathcal{A}_{\ell,a}}$ come in (2.22) (sempre a pagina 33). Allora, grazie a quanto precedentemente appurato in dettaglio, $\rho_{\ell,a}$ è una misura convessa di rischio il cui insieme di accettazione coincide con l'insieme $\mathcal{A}_{\ell,a}$, la quale possiede la proprietà di Fatou e tale che valga per essa la formula di rappresentazione (1.21) del teorema di rappresentazione 1.2.1 a pagina 18 dove la minima funzione di penalità $\alpha_{\rho_{\ell,a}}$ può esser calcolata tramite la formula (2.28) del teorema 2.2.1 a pagina 33.

D'altra parte, mantenendo come vera pure l'ipotesi NA, sia invece $\mathscr{H} \equiv \mathscr{H}_{T,d,\mathbb{F},S}$ un insieme prevedibilmente convesso e denotiamo $\mathcal{A}_{\mathscr{H}}$ come in (2.41) mentre quindi $\rho_{\mathscr{H}} \equiv \rho_{\mathcal{A}_{\mathscr{H}}}$ come in (2.42). Allora abbiamo scoperto poc'anzi che $\rho_{\mathscr{H}}$ è una misura convessa di rischio il cui insieme di accettazione $\mathcal{A}_{\rho_{\mathscr{H}}}$ contiene l'insieme $\mathcal{A}_{\mathscr{H}}$ ed inoltre, assumendo che valga una formula di rappresentazione per $\rho_{\mathscr{H}}$ come la (1.22) sempre del teorema di rappresentazione 1.2.1, che la minima funzione di penalità $\alpha_{\rho_{\mathscr{H}}}$ può venir calcolata attraverso la formula (2.43) della precedente proposizione 2.3.1.

A questo punto sia più in generale $\rho_0$ una qualsiasi misura convessa di rischio per la quale valga una formula di rappresentazione di nuovo come la (1.22) del teorema di rappresentazione 1.2.1, e denotiamo naturalmente $\mathcal{A}_{\rho_0}$ l'insieme di accettazione secondo $\rho_0$ stessa e $\alpha_{\rho_0}$ la minima funzione di penalità corrispettiva.

Denotiamo così $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_{\mathscr{H},\rho_0}$ il sottoinsieme non vuoto di $L^\infty(\mathbf{P})$ dato da

$$\mathcal{A} \doteq \bigcup_{\substack{H \in \mathscr{H} \\ Y \in \mathcal{A}_{\rho_0}}} \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \;\middle|\; X + \textstyle\sum_{t=1}^T H_t \cdot \Delta S_t \geq Y \ (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \right\}$$

e consideriamo la mappa $\rho \equiv \rho_{\mathcal{A}}\colon L^\infty(\mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho(X) \doteq \inf \{ m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A} \}$$

ancora come in (1.5) della proposizione 1.1.5 a pagina 8. Allora, assunta come ipotesi

$$\rho(0) > -\infty \tag{2.46}$$

$\rho$ è una misura convessa di rischio il cui insieme di accettazione $\mathcal{A}_\rho$ verifica le due relazioni insiemistiche $\mathcal{A}_{\rho_0} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\rho$ e per ciò vale in particolare che $\rho \leq \rho_0$ (si vedano se necessario l'osservazione 1.2.6 a pagina 20 e l'osservazione 1.1.6 a pagina 7).

*Osservazione.* L'ipotesi (2.46) di sopra risulta consistente con l'ipotesi NA nel senso che

$$\rho(0) > -\infty \;\Rightarrow\; \rho_{\mathscr{H}}(0) > -\infty. \tag{2.47}$$

Per questo, in effetti, è sufficiente accorgersi che vale

$$\bigcup_{H \in \mathscr{H}} \left\{ m \in \left]-\infty, -2\rho_0(0)\right] \;\middle|\; m + \textstyle\sum_{t=1}^T H_t \cdot \Delta S_t \geq 0 \ (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \right\}$$
$$\subseteq \bigcup_{\substack{H' \in \mathscr{H} \\ Y \in \mathcal{A}_{\rho_0}}} 2 \cdot \left\{ m' \in \mathbb{R} \;\middle|\; m' + \textstyle\sum_{t=1}^T H'_t \cdot \Delta S_t \geq Y \ (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \right\}.$$

*Osservazione* 2.3.3. Risulta immediato accertarsi della seguente uguaglianza insiemistica:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\rho_0} + \mathcal{A}_{\mathscr{H}}. \tag{2.48}$$

Supponendo dunque che valga una formula di rappresentazione anche per $\rho$ come la solita (1.22) del teorema di rappresentazione 1.2.1, allora la minima funzione di penalità $\alpha_\rho$ associata verifica la seguente identità: per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$,

$$\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \alpha_{\rho_0}(\mathbf{Q}) + \alpha_{\rho_{\mathscr{H}}}(\mathbf{Q})$$

(da cui la precedente implicazione (2.47) via la (1.23) dell'osservazione 1.2.5 a pagina 19). Infatti, dall'osservazione 1.2.6 a pagina 20 e specialmente dalla (1.26), per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$ è

$$\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \sup_{X \in \mathcal{A}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] = \sup_{X_0 \in \mathcal{A}_{\rho_0}} \sup_{X_{\mathscr{H}} \in \mathcal{A}_{\mathscr{H}}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X_0 - X_{\mathscr{H}}] = \alpha_{\rho_0}(\mathbf{Q}) + \alpha_{\rho_{\mathscr{H}}}(\mathbf{Q}).$$

Finalmente denotiamo $\widetilde{\mathcal{A}} \equiv \widetilde{\mathcal{A}}_{\ell,a,\mathscr{H}}$ il sottoinsieme non vuoto di $L^\infty(\mathbf{P})$ dato da

$$\widetilde{\mathcal{A}} \doteq \bigcup_{H \in \mathscr{H}} \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \,\middle|\, \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[\,\ell\big(-X - \textstyle\sum_{t=1}^T H_t \cdot \Delta S_t\big)\,\big] \le a \right\}$$

e consideriamo la mappa $\widetilde{\rho} \equiv \rho_{\widetilde{\mathcal{A}}} \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\widetilde{\rho}(X) \doteq \inf \left\{ m \in \mathbb{R} \,\middle|\, X + m \in \widetilde{\mathcal{A}} \right\}$$

in modo ormai familiare. Allora, assunta come ipotesi $\widetilde{\rho}(0) > -\infty$, $\widetilde{\rho}$ è una misura convessa di rischio il cui insieme di accettazione $\mathcal{A}_{\widetilde{\rho}}$ verifica le due relazioni insiemistiche $\mathcal{A}_{\ell,a} \cup \mathcal{A} \subseteq \widetilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}_{\widetilde{\rho}}$, e di conseguenza $\widetilde{\rho} \le \rho_{\ell,a}$.

**Proposizione 2.3.2.** *All'interno dell'ambito fin ora delineato ed in particolare sotto l'ipotesi* NA, *assumiamo in più che la misura di rischio $\rho_0$ combaci con $\rho_{\ell,a}$, ovvero*

$$\rho_0 \equiv \rho_{\ell,a}.$$

*Allora vale la* (2.46) *e $\widetilde{\rho}$ coincide identicamente con la misura di rischio $\rho$: in simboli,*

$$\widetilde{\rho} = \rho.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $m \in \mathbb{R}$, se $m \in \mathcal{A}$ e se quindi $Y_m \in \mathcal{A}_{\rho_0} \equiv \mathcal{A}_{\ell,a}$ è tale per cui $m - Y_m \in \mathcal{A}_{\mathscr{H}}$, coerentemente tra l'altro con la (2.48) dell'osservazione 2.3.3, allora la famiglia $(Y_m)_{m \in \mathcal{A}}$ è inferiormente limitata ($\mathbf{P}$-q.c.) in quanto vale, per ogni $m \in \mathcal{A}$,

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[\,\ell(-Y_m)\,] \le a.$$

Così, per ogni $m \in \mathcal{A}$, se $H^{(m)} \equiv (H_t^{(m)})_{t=0}^T \in \mathscr{H}$ verifica $\sum_{t=1}^T H_t^{(m)} \cdot \Delta S_t \ge -m + Y_m$ ($\mathbf{P}$-q.c.), allora la (2.46) discende in modo elementare dall'ipotesi NA.

Fissiamo adesso $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ arbitraria. Allora, visto che $\mathcal{A} \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}$, la disuguaglianza $\widetilde{\rho}(X) \le \rho(X)$ risulta evidente già dalle rispettive definizioni, mentre per la relazione opposta consideriamo una successione scalare non crescente $(m_j)_j$ tale che $m_j \downarrow \widetilde{\rho}(X)$ (per $j \to +\infty$) in maniera che, per ogni $j$, $m_j > \widetilde{\rho}(X)$, ed in corrispondenza della quale, per ogni $j$, esista un processo $H^{(j)} \equiv (H_t^{(j)})_{t=0}^T \in \mathscr{H}$ tale per cui

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}} \big[ \, \ell\big(-X - m_j - \textstyle\sum_{t=1}^T H_t^{(j)} \cdot \Delta S_t\big) \, \big] < a.$$

Dunque, sempre per ogni $j$, sia $n_j \in \mathbb{N}$ grande abbastanza affinché si abbia

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}} \big[ \, \ell\big(-X - m_j - \big(\textstyle\sum_{t=1}^T H_t^{(j)} \cdot \Delta S_t\big) \wedge n_j\big) \, \big] \leq a$$

(essendo, per ogni $j$, $\big(\sum_{t=1}^T H_t^{(j)} \cdot \Delta S_t\big) \wedge n_j \uparrow \sum_{t=1}^T H_t^{(j)} \cdot \Delta S_t$ ($\mathbf{P}$-q.c.) per $n_j \to +\infty$). Allora segue subito che, per ogni $j$, $X + m_j + \big(\sum_{t=1}^T H_t^{(j)} \cdot \Delta S_t\big) \wedge n_j \in \mathcal{A}_{\ell,a} \equiv \mathcal{A}_{\rho_0}$ e che quindi, dalla definizione stessa di $\mathcal{A}$, $X + m_j \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\rho$: in conclusione $\rho(X + m_j) \leq 0$ o cioè $\rho(X) \leq m_j$ (grazie alla proprietà d'invarianza per traslazioni della quale $\rho$ gode) da cui direttamente $\rho(X) \leq \widetilde{\rho}(X)$, ovvero la tesi, mandando $j \to +\infty$. $\square$

Segnaliamo i quattro manuali [Lam07], [Föl08], [Bjö09] e [Hul14] come punti di riferimento sulla finanza matematica più generica.

# Capitolo 3

# Teoria delle misure convesse condizionali e dinamiche di rischio

## 3.1 Primo teorema di rappresentazione

Fissiamo $T \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $T \geq 1$, denotiamo $\mathcal{T} \doteq \{0, 1, \ldots, T\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ e sia $\mathbb{F} \equiv (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ una data filtrazione sullo scenario $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Supporremo per l'intero capitolo che $L^1(\mathbf{P})$ sia uno spazio separabile.

Per ogni $t \in \mathcal{T}$, per ogni $p \in \{0\} \cup [1, +\infty]$ e per ogni probabilità $\mathbf{Q}$ su $\mathcal{F}$ tale che $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$, denotiamo poi

$$L^p_t(\mathbf{Q}) \equiv L^p(\mathbf{Q}) \cap L^0(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{Q}) \quad \text{e} \quad L^p_{t,+}(\mathbf{Q}) \equiv L^p_+(\mathbf{Q}) \cap L^0(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{Q}).$$

In particolare, $L^p_t(\mathbf{Q}) < L^p_{t+1}(\mathbf{Q})$ ed inoltre $L^p_0(\mathbf{Q}) \cong \mathbb{R}$ e $L^p_T(\mathbf{Q}) = L^p(\mathbf{Q})$.

**Definizione 3.1.1** (Misura convessa condizionale di rischio)**.** Sia $t \in \mathcal{T}$. Chiamiamo *misura convessa condizionale di rischio al tempo* $t$ ogni mappa $\rho_t \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to L^\infty_t(\mathbf{P})$ la quale verifichi le quattro seguenti proprietà.

**(RC1)** Monotonìa: $\forall\, X, Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, se $X \geq Y$ ($\mathbf{P}$-q.c.) allora $\rho_t(X) \leq \rho_t(Y)$ ($\mathbf{P}$-q.c.).

**(RC2)** *Invarianza condizionale per traslazioni*: $\forall\, X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\forall\, X_t \in L^\infty_t(\mathbf{P})$, $\rho_t(X + X_t) = \rho_t(X) - X_t$ ($\mathbf{P}$-q.c.).

**(RC3)** *Convessità condizionale*: $\forall\, X, Y \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\forall\, \lambda_t \in L^\infty_t(\mathbf{P})$, se $\lambda_t$ è a valori in $]0, 1[$ allora $\rho_t(\lambda_t X + (1 - \lambda_t)Y) \leq \lambda_t \rho_t(X) + (1 - \lambda_t)\rho_t(Y)$ ($\mathbf{P}$-q.c.).

**(RC4)** Normalizzazione: $\rho_t(0) = 0$ ($\mathbf{P}$-q.c.).

Così, in particolare, una misura convessa condizionale di rischio al tempo 0 è una misura convessa normalizzata di rischio. Osserviamo poi che una misura convessa condizionale di rischio $\rho_t$ al tempo $t$ verifica

$$\rho_t\big|_{L^\infty_t(\mathbf{P})} = -\mathrm{id}_{L^\infty_t(\mathbf{P})}$$

ed in particolare $\rho_t = \rho_t(-\rho_t)$ ($\mathbf{P}$-q.c.).

**Definizione 3.1.2** (Misura coerente condizionale di rischio)**.** Sia $t \in \mathcal{T}$. Chiamiamo *misura coerente condizionale di rischio al tempo* $t$ ogni misura convessa condizionale di rischio $\rho_t \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to L_t^\infty(\mathbf{P})$ al tempo $t$ la quale verifichi la seguente proprietà.

**(RC5)** *Positiva omogeneità condizionale*: $\forall\, X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\forall\, \lambda_t \in L_t^\infty(\mathbf{P})$, se $\lambda_t \geq 0$ ($\mathbf{P}$-q.c.) allora $\rho_t(\lambda_t X) = \lambda_t \rho_t(X)$ ($\mathbf{P}$-q.c.).

Sia $t \in \mathcal{T}$ e sia $\rho_t$ una misura convessa condizionale di rischio al tempo $t$. Intendiamo come posizione accettabile secondo $\rho_t$ ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ tale che risulti $\rho_t(X) \leq 0$ ($\mathbf{P}$-q.c.) e chiamiamo quindi insieme di accettazione secondo $\rho_t$, denotandolo $\mathcal{A}_t$, il sottoinsieme di $L^\infty(\mathbf{P})$ costituito dalle posizioni accettabili secondo $\rho_t$: in simboli,

$$\mathcal{A}_t \overset{def}{=} \{\, X \in L^\infty(\mathbf{P}) \mid \rho_t(X) \leq 0 \ (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \,\}.$$

Dunque $0 \in \mathcal{A}_t$ ed è possibile dimostrare un'estensione delle due proposizioni fondamentali 1.1.4 a pagina 6 e 1.1.5 a pagina 8 ottenendo in particolare che $\mathcal{A}_t$ è convesso in senso condizionale, che $\operatorname{ess\,inf} \{\, X_t \in L_t^\infty(\mathbf{P}) \mid X_t \in \mathcal{A}_t \,\} = 0$ ($\mathbf{P}$-q.c.) e più in generale che, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ (e $\mathbf{P}$-q.c.),

$$\rho_t(X) = \operatorname{ess\,inf} \{\, X_t \in L_t^\infty(\mathbf{P}) \mid X + X_t \in \mathcal{A}_t \,\}. \tag{3.1}$$

In particolare possiamo notare che, per ogni $Y \in \mathcal{A}_t$ ed ogni $A \in \mathcal{F}_t$, è $Y \mathbb{1}_A \in \mathcal{A}_t$.

Intendiamo inoltre che $\rho_t$ possiede la proprietà di Fatou se, per ogni successione $(X_n)_n$ equi-limitata in $L^\infty(\mathbf{P})$ che sia non crescente, risulta $\sup_n \rho_t(X_n) = \rho_t(\inf_n X_n)$ ($\mathbf{P}$-q.c.), ovvero $\geq$. Allora ciò equivale ad avere che, per ogni successione $(X_n)_n$ in $L^\infty(\mathbf{P})$ per la quale esista $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ tale che $X_n \to X$ in senso $\mathbf{P}$-q.c., risulta $\rho_t(X) \leq \liminf_n \rho_t(X_n)$ ($\mathbf{P}$-q.c.). Oppure equivale ad avere che, per ogni successione $(X_n)_n$ in $\mathcal{A}_t$ per la quale esista $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ tale che $X_n \to X$ in senso $\mathbf{P}$-q.c., vale che anche $X \in \mathcal{A}_t$: in altri termini, che $\mathcal{A}_t$ risulti $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$-chiuso.

Introduciamo ora le seguenti notazioni: $\mathcal{P}^e \doteq \{\, \mathbf{Q} \in \mathcal{P} \mid \mathbf{Q} \approx \mathbf{P} \,\}$ e, per ogni $t \in \mathcal{T}$,

$$\mathcal{P}_t \doteq \Big\{\, \mathbf{Q} \in \mathcal{P} \;\Big|\; \mathbf{Q}\big|_{\mathcal{F}_t} \approx \mathbf{P}\big|_{\mathcal{F}_t} \Big\} \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_t \doteq \Big\{\, \mathbf{Q} \in \mathcal{P} \;\Big|\; \mathbf{Q}\big|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{P}\big|_{\mathcal{F}_t} \Big\}.$$

Dunque $\mathcal{P}_t \supseteq \mathcal{Q}_t$, poi $\mathcal{P}_t \supseteq \mathcal{P}_{t+1}$ con $\mathcal{P}_0 = \mathcal{Q}_0 = \mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_T = \mathcal{P}^e$, mentre $\mathcal{Q}_t \supseteq \mathcal{Q}_{t+1}$ con $\mathcal{Q}_T = \{\mathbf{P}\}$. In particolare $\mathcal{P}^e$, $\mathcal{P}_t$ e $\mathcal{Q}_t$ sono tutti sottoinsiemi non vuoti di $\mathcal{P}$.

In questo contesto, fissato $t \in \mathcal{T}$ e dato un sottoinsieme non vuoto $\widetilde{\mathcal{P}}_t$ di $\mathcal{P}_t$, chiamiamo funzione di penalità su $\widetilde{\mathcal{P}}_t$ ogni mappa $\alpha_t \colon \widetilde{\mathcal{P}}_t \to L^0((\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}); ]-\infty, +\infty])$ tale che risulti ($\mathbf{P}$-q.c.)

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\mathbf{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}_t} \alpha_t(\mathbf{Q}) = 0.$$

In particolare, per ogni $\mathbf{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}_t$, sarebbe $\alpha_t(\mathbf{Q}) \geq 0$ ($\mathbf{P}$-q.c.).

È possibile dimostrare il seguente risultato di base.

**Proposizione 3.1.1.** *Sia $t \in \mathcal{T}$ e sia $\rho_t$ una misura convessa condizionale di rischio. Assumiamo che l'insieme di accettazione $\mathcal{A}_t$ secondo $\rho_t$ sia $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$-chiuso.*

*Allora la mappa* $\alpha_t^{\min}\colon \mathcal{P}_t \to L^0((\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}); ]-\infty, +\infty])$ *definita ponendo, per ogni* $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$ *(e* $\mathbf{P}$*-q.c.),*

$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \overset{def}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{Y \in \mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y \,|\, \mathcal{F}_t] \tag{3.2}$$

*è una funzione di penalità su* $\mathcal{P}_t$ *ed inoltre vale la seguente identità: per ogni* $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$ *(e* $\mathbf{P}$*-q.c.),*

$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) = \operatorname*{ess\,sup}_{X \in L^\infty(\mathbf{P})} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \rho_t(X) \Big\}. \tag{3.3}$$

Rimandiamo a [Det05] per una trattazione più completa di questa parte preliminare e passiamo piuttosto alle prime dinamiche avanzate delle minime funzioni di penalità.

**Lemma 3.1.1.** *Sia* $t \in \mathcal{T}$ *e sia* $\rho_t$ *una misura convessa condizionale di rischio. Assumiamo che l'insieme di accettazione* $\mathcal{A}_t$ *secondo* $\rho_t$ *sia* $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$*-chiuso. Allora la mappa* $\alpha_t^{\min}$ *definita come in (3.2) è una funzione di penalità su* $\mathcal{P}_t$ *e vale la seguente identità: per ogni* $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$ *ed ogni* $s \in \{0, \dots, t\}$ *(e* $\mathbf{P}$*-q.c.),*

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \,|\, \mathcal{F}_s] = \operatorname*{ess\,sup}_{Y \in \mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y \,|\, \mathcal{F}_s] \tag{3.4}$$

*ed in particolare*

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})] = \sup_{Y \in \mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y]. \tag{3.5}$$

*Dimostrazione.* Per cominciare, il " $\geq$ " risulta immediato dalla definizione di $\alpha_t^{\min}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \,|\, \mathcal{F}_s] &\equiv \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\Big[\operatorname*{ess\,sup}_{Y \in \mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y \,|\, \mathcal{F}_t] \,\Big|\, \mathcal{F}_s\Big] \\ &\geq \operatorname*{ess\,sup}_{Y \in \mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\big[\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y \,|\, \mathcal{F}_t] \,\big|\, \mathcal{F}_s\big] \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{Y \in \mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y \,|\, \mathcal{F}_s]. \end{aligned}$$

Invece per il " $\leq$ " osserviamo che, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$, il sottoinsieme di $L_t^\infty(\mathbf{P})$

$$\Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y \,|\, \mathcal{F}_t] \,\Big|\, Y \in \mathcal{A}_t \Big\}$$

è diretto verso l'alto (o in avanti) nel senso che, per ogni coppia $U_1$ e $U_2$ di suoi elementi, esiste un altro suo elemento $U_3$ tale che $U_3 \geq U_1 \vee U_2$ ($\mathbf{P}$-q.c.): infatti, per ogni $X, Y \in \mathcal{A}_t$, posto

$$A \coloneqq \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y \,|\, \mathcal{F}_t] \text{ } (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \Big\} \in \mathcal{F}_t$$

allora $Z \coloneqq X \mathbb{1}_A + Y \mathbb{1}_{\Omega \setminus A} \in \mathcal{A}_t$ verifica ($\mathbf{P}$-q.c.)

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Z \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] \vee \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y \,|\, \mathcal{F}_t]$$

(abbiamo già visto qualcosa di molto simile nel corso della dimostrazione della proposizione 2.3.1 a pagina 44). Pertanto è facile convincersi del fatto che esista una successione $(X_n^{\mathbf{Q}})_n$ in $\mathcal{A}_t$ tale che ($\mathbf{P}$-q.c.)

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X_n^{\mathbf{Q}} \,|\, \mathcal{F}_t] \uparrow \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})$$

e così, per convergenza monotòna,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \,|\, \mathcal{F}_s] &= \sup_n \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\Big[\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X_n^{\mathbf{Q}} \,|\, \mathcal{F}_t] \Big| \mathcal{F}_s\Big] \\ &= \sup_n \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X_n^{\mathbf{Q}} \,|\, \mathcal{F}_s] \\ &\leq \operatorname*{ess\,sup}_{Y \in \mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y \,|\, \mathcal{F}_s]. \qquad \square\end{aligned}$$

**Teorema 3.1.1** (di rappresentazione delle misure convesse condizionali di rischio)**.** *Sia $t \in \mathcal{T}$ e sia $\rho_t$ una misura convessa condizionale di rischio. Allora le quattro seguenti condizioni sono equivalenti.*

**(i)** *$\rho_t$ possiede la proprietà di Fatou.*

**(ii)** *L'insieme di accettazione $\mathcal{A}_t$ secondo $\rho_t$ è $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$-chiuso.*

**(iii)** *La mappa $\alpha_t^{\min}$ definita come in (3.2) è una funzione di penalità su $\mathcal{P}_t$ e vale la seguente formula di rappresentazione per $\rho_t$: per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ (e $\mathbf{P}$-q.c.),*

$$\begin{aligned}\rho_t(X) &= \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t} \Big\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})\Big\} \\ &\equiv \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t} \Big\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})\Big\}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

**(iv)** *Esiste un sottoinsieme non vuoto $\widetilde{\mathcal{P}}_t$ di $\mathcal{P}_t$ ed esiste una funzione di penalità $\alpha_t$ su $\widetilde{\mathcal{P}}_t$ tale per cui valga la seguente formula di rappresentazione per $\rho_t$: per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ (e $\mathbf{P}$-q.c.),*

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}_t} \Big\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t(\mathbf{Q})\Big\}. \tag{3.7}$$

*Inoltre per ciascuno di questi casi vale che, per ogni $\mathbf{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}_t$, $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \leq \alpha_t(\mathbf{Q})$.*

*Dimostrazione.* Basta verificare l'implicazione (ii) ⇒ (iii), ovvero (i) ⇒ (iii). Osserviamo anzitutto che grazie alla (3.3) ed a $\mathcal{Q}_t \subseteq \mathcal{P}_t$ vale che, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho_t(X) \geq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t} \Big\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})\Big\} \geq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t} \Big\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})\Big\}.$$

Basta dunque dimostrare la seguente disuguaglianza:

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[\rho_t(X)] \leq \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\Big[\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t} \Big\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})\Big\}\Big].$$

Consideriamo per questo la mappa $\rho^{\mathbf{P}} \equiv \rho_t^{\mathbf{P}} : L^\infty(\mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho^{\mathbf{P}}(X) \doteq \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[\rho_t(X)].$$

Allora $\rho^{\mathbf{P}}$ è chiaramente una misura convessa (normalizzata) di rischio il cui insieme di accettazione $\mathcal{A}_{\rho^{\mathbf{P}}}$ contiene l'insieme $\mathcal{A}_t$ e la quale possiede la proprietà di Fatou. Pertanto la mappa $\alpha_{\rho^{\mathbf{P}}} : \mathcal{P} \to ]-\infty, +\infty]$ definita ponendo, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$,

$$\alpha_{\rho^{\mathbf{P}}}(\mathbf{Q}) \doteq \sup_{Y \in \mathcal{A}_{\rho^{\mathbf{P}}}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y]$$

è una funzione di penalità tale per cui valga la seguente formula di rappresentazione per $\rho^{\mathbf{P}}$: per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho^{\mathbf{P}}(X) = \sup_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \alpha_{\rho^{\mathbf{P}}}(\mathbf{Q}) < +\infty}} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha_{\rho^{\mathbf{P}}}(\mathbf{Q}) \Big\}.$$

Verifichiamo a questo punto che, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, se $\alpha_{\rho^{\mathbf{P}}}(\mathbf{Q}) < +\infty$ allora $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t$. Ma infatti, per ogni $A \in \mathcal{F}_t$ ed ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, è $\rho_t(\lambda \mathbb{1}_A) = -\lambda \mathbb{1}_A$ e dunque

$$-\lambda\, \mathbf{P}[A] = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[\rho_t(\lambda \mathbb{1}_A)] \equiv \rho^{\mathbf{P}}(\lambda \mathbb{1}_A) \geq -\lambda\, \mathbf{Q}[A] - \alpha_{\rho^{\mathbf{P}}}(\mathbf{Q})$$

da cui, per ogni $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\mathbf{Q}[A] - \frac{1}{|\lambda|} \cdot \alpha_{\rho^{\mathbf{P}}}(\mathbf{Q}) \leq \mathbf{P}[A] \leq \mathbf{Q}[A] + \frac{1}{|\lambda|} \cdot \alpha_{\rho^{\mathbf{P}}}(\mathbf{Q})$$

e quindi appunto $\mathbf{Q}[A] = \mathbf{P}[A]$ mandando $|\lambda| \uparrow +\infty$ (ed usando che $\alpha_{\rho^{\mathbf{P}}}(\mathbf{Q}) < +\infty$).

Inoltre, grazie alla (3.5) del precedente lemma 3.1.1 (ed al fatto che, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$, $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})$ è $\mathcal{F}_t$-misurabile) abbiamo che, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t$,

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})] = \sup_{Y \in \mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y] \leq \sup_{Y \in \mathcal{A}_{\rho^{\mathbf{P}}}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y] \equiv \alpha_{\rho^{\mathbf{P}}}(\mathbf{Q}).$$

Mettendo insieme il tutto otteniamo finalmente che, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[\rho_t(X)] \equiv \rho^{\mathbf{P}}(X) &= \sup_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \alpha_{\rho^{\mathbf{P}}}(\mathbf{Q}) < +\infty}} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha_{\rho^{\mathbf{P}}}(\mathbf{Q}) \Big\} \\
&\leq \sup_{\substack{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t \\ \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})] < +\infty}} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha_{\rho^{\mathbf{P}}}(\mathbf{Q}) \Big\} \\
&\leq \sup_{\substack{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t \\ \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})] < +\infty}} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\Big[ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \Big] \\
&\leq \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[ \operatorname*{ess\,sup}_{\substack{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t \\ \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})] < +\infty}} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \Big\} \right] \\
&\leq \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\Big[ \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \Big\} \Big]
\end{aligned}$$

da cui esattamente quanto voluto. $\square$

**Corollario 3.1.1.** *Sia $t \in \mathcal{T}$ e sia $\rho_t$ una misura convessa condizionale di rischio. Allora $\rho_t$ possiede la proprietà di Fatou se e solo se, per ogni $\mathbf{P}^* \in \mathcal{P}^e$, posto*

$$\mathcal{Q}_t^f(\mathbf{P}^*) \doteq \left\{ \mathbf{Q} \in \mathcal{P} \;\middle|\; \mathbf{Q}\,\big|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{P}^*\,\big|_{\mathcal{F}_t},\, \mathbf{E}^{\mathbf{P}^*}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})] < +\infty \right\} \tag{3.8}$$

*vale la seguente formula di rappresentazione per $\rho_t$: per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ (e $\mathbf{P}$-q.c.),*

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t^f(\mathbf{P}^*)} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \right\}.$$

*Inoltre, se $\rho_t$ è una misura coerente condizionale di rischio, allora $\rho_t$ possiede la proprietà di Fatou se e solo se, per ogni $\mathbf{P}^* \in \mathcal{P}^e$, posto*

$$\mathcal{Q}_t^0(\mathbf{P}^*) \doteq \left\{ \mathbf{Q} \in \mathcal{P} \;\middle|\; \mathbf{Q}\,\big|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{P}^*\,\big|_{\mathcal{F}_t},\, \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) = 0 \ (\mathbf{P}^*\text{-}q.c.) \right\} \tag{3.9}$$

*vale la seguente formula di rappresentazione per $\rho_t$: per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ (e $\mathbf{P}$-q.c.),*

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t^0(\mathbf{P}^*)} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t].$$

*Dimostrazione.* Dalla dimostrazione del precedente teorema 3.1.1 capiamo subito che se $\rho_t$ possiede la proprietà di Fatou allora, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t^f(\mathbf{P})} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \right\}.$$

Adesso basta notare che tutto quanto fatto fin ora è invariante rispetto al passaggio di $\mathbf{P}$ ad una probabilità $\mathbf{P}^*$ ad essa equivalente.

Infine, se in più $\rho_t$ è coerente, allora semplicemente $\alpha_t^{\min}$ è a valori in $\{0, +\infty\}$ ($\mathbf{P}$-q.c.) poiché $\mathcal{A}_t$ è un cono. □

## 3.2 Proprietà di sensibilità

**Definizione 3.2.1** (Sensibilità)**.** Sia $t \in \mathcal{T}$ e sia $\rho_t$ una misura convessa condizionale di rischio al tempo $t$. Diciamo che $\rho_t$ è *sensibile* se, per ogni $\varepsilon \in \,]0, +\infty[$ e per ogni $A \in \mathcal{F}$ non $\mathbf{P}$-trascurabile, risulta

$$\mathbf{P}[\rho_t(-\varepsilon \mathbb{1}_A) > 0] > 0.$$

Osserviamo che in ogni caso sarebbe $\rho_t(-\varepsilon \mathbb{1}_A) \geq 0$ ($\mathbf{P}$-q.c.) visto che $-\varepsilon \mathbb{1}_A \leq 0$ ($\mathbf{P}$-q.c.). Inoltre per ogni $A \in \mathcal{F}_t$ tale proprietà risulterebbe automatica.

Notiamo poi che, se $\rho_t$ è coerente, allora $\rho_t$ è sensibile se e solo se, per ogni $A \in \mathcal{F}$ non $\mathbf{P}$-trascurabile, risulta $\mathbf{P}[\rho_t(-\mathbb{1}_A) > 0] > 0$.

**Lemma 3.2.1.** *Sia $t \in \mathcal{T}$ e sia $\rho_t$ una misura convessa condizionale di rischio. Sia quindi $(\mathbf{Q}_n)_{n\geq 1}$ una successione in $\mathcal{Q}_t$ e sia $(A_n)_{n\geq 1}$ una successione di eventi in $\mathcal{F}_t$ mutuamente disgiunti e tali che $\cup_{n\geq 1} A_n = \Omega$ ($\mathbf{P}$-q.c.). Allora la v.a.r.*

$$Z \doteq \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n} \frac{d\mathbf{Q}_n}{d\mathbf{P}}$$

*è la densità di una probabilità $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t$ tale per cui valga l'identità ($\mathbf{P}$-q.c.)*

$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) = \sum_{\substack{n\geq 1\\ \mathbf{P}[A_n]>0}} \mathbb{1}_{A_n} \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}_n).$$

*Dimostrazione.* Anzitutto notiamo che, data $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$ con $Z \coloneqq \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$, vale che $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t$ se e solo se $\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[Z \,|\, \mathcal{F}_t] = 1$ ($\mathbf{P}$-q.c.). Sia adesso più in generale $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ una successione in $L_t^\infty(\mathbf{P})$, con $\lambda_n$ a valori in $[0,1]$ per ogni $n$, tale che $\sum_{n\geq 1} \lambda_n = 1$ ($\mathbf{P}$-q.c.). Denotiamo quindi $Z_n \coloneqq \frac{d\mathbf{Q}_n}{d\mathbf{P}}$ e $\widetilde{Z} \coloneqq \sum_{n\geq 1} \lambda_n Z_n$: allora in effetti, per convergenza monotòna,

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[\widetilde{Z} \,|\, \mathcal{F}_t] = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \,\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[Z_k \,|\, \mathcal{F}_t] = 1$$

(ogni $\mathbf{Q}_n$ sta in $\mathcal{Q}_t$ per ipotesi) e dunque $\widetilde{Z}$ coincide con la densità di un'opportuna probabilità $\widetilde{\mathbf{Q}} \in \mathcal{Q}_t$. A questo punto, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, vale chiaramente

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k Z_k X \right| \leq \widetilde{Z} \|X\|_\infty \in L^1(\mathbf{P})$$

e così, per convergenza dominata,

$$\mathbf{E}^{\widetilde{\mathbf{Q}}}[X \,|\, \mathcal{F}_t] = \sum_{n\geq 1} \lambda_n \,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}_n}[X \,|\, \mathcal{F}_t] \tag{3.10}$$

(grazie anche alla formula di Bayes per la speranza condizionale e al fatto che $\widetilde{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}_n \in \mathcal{Q}_t$, per cui $\mathbf{E}^{\widetilde{\mathbf{Q}}}[X \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[X\widetilde{Z} \,|\, \mathcal{F}_t]$ e $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}_n}[X \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[XZ_n \,|\, \mathcal{F}_t]$).

Tutto questo basta per le sole $\lambda_n$ non identicamente nulle, e pertanto otteniamo immediatamente dalla definizione di $\alpha_t^{\min}$ che

$$\alpha_t^{\min}(\widetilde{\mathbf{Q}}) \leq \sum_{\substack{n\geq 1\\ \mathbf{P}[\lambda_n>0]>0}} \lambda_n \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}_n).$$

Infine con $\lambda_n \coloneqq \mathbb{1}_{A_n}$ abbiamo l'uguaglianza desiderata grazie a come gli $A_n$ sono fatti: usando la (3.10), infatti,

$$\begin{aligned}\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) &\equiv \operatorname*{ess\,sup}_{Y\in\mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y\,|\,\mathcal{F}_t] \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{Y\in\mathcal{A}_t} \Big\{ \sum_{\substack{n\geq 1\\ \mathbf{P}[A_n]>0}} \mathbb{1}_{A_n}\, \mathbf{E}^{\mathbf{Q}_n}[-Y\,|\,\mathcal{F}_t] \Big\} \\ &= \sum_{\substack{n\geq 1\\ \mathbf{P}[A_n]>0}} \mathbb{1}_{A_n} \operatorname*{ess\,sup}_{Y\in\mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}_n}[-Y\,|\,\mathcal{F}_t] \\ &\equiv \sum_{\substack{n\geq 1\\ \mathbf{P}[A_n]>0}} \mathbb{1}_{A_n}\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}_n). \qquad \square\end{aligned}$$

Come corollario immediato troviamo che, per ogni $A \in \mathcal{F}_t$ ed ogni $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathcal{Q}_t$,

$$\widetilde{Z} \coloneqq \mathbb{1}_A \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{P}} + \mathbb{1}_{\Omega\setminus A}\frac{d\mathbf{Q}_2}{d\mathbf{P}}$$

è la densità di una probabilità $\widetilde{\mathbf{Q}} \in \mathcal{Q}_t$ tale che

$$\alpha_t^{\min}(\widetilde{\mathbf{Q}}) = \mathbb{1}_A\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}_1) + \mathbb{1}_{\Omega\setminus A}\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}_2). \tag{3.11}$$

Dunque è evidente che l'insieme $\{\, \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \mid \mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t \,\}$ sia diretto verso l'alto e che per ciò esista una successione $(\mathbf{Q}_n)_n$ in $\mathcal{Q}_t$ tale che ($\mathbf{P}$-q.c.)

$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}_n) \downarrow \operatorname*{ess\,inf}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}_t} \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) = 0. \tag{3.12}$$

Introduciamo quindi la seguente notazione: per ogni $\varepsilon \in \,]0, +\infty[$,

$$\mathcal{Q}_t^\varepsilon \doteq \{\, \mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t \mid \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) < \varepsilon \ (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \,\} \cong \left\{ \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \;\middle|\; \mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t,\, \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) < \varepsilon \ (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \right\}.$$

**Lemma 3.2.2.** *Per ogni $\varepsilon \in \,]0, +\infty[$, vale che $\mathcal{Q}_t^\varepsilon \neq \emptyset$. Inoltre, se $\rho_t$ possiede la proprietà di Fatou e se è sensibile, allora*

$$\mathcal{Q}_t^\varepsilon \cap \mathcal{P}^e \neq \emptyset.$$

*Dimostrazione.* Fissiamo $\varepsilon \in \,]0, +\infty[$. Sia $(\mathbf{Q}_n)_n$ una successione in $\mathcal{Q}_t$ tale per cui $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}_n) \downarrow 0$ ($\mathbf{P}$-q.c.) come in (3.12), e poniamo $Z_n \coloneqq \frac{d\mathbf{Q}_n}{d\mathbf{P}}$. Consideriamo dunque la v.a. in $L^0((\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}); \{+\infty\} \cup \mathbb{N} \setminus \{0\})$ data da

$$\tau^\varepsilon \doteq \inf \{\, n \geq 1 \mid \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}_n) < \varepsilon \ (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \,\}.$$

Allora tale inf è chiaramente un valor minimo e $\mathbf{P}[\tau^\varepsilon < +\infty] = 1$. Quindi, se definiamo $A_n \coloneqq \{\, \tau^\varepsilon = n \,\}$ per ogni $n \geq 1$, allora grazie al precedente lemma 3.2.1 abbiamo che

$$Z_{\tau^\varepsilon} \doteq \sum_{n\geq 1} Z_n \mathbb{1}_{\{\,\tau^\varepsilon = n\,\}}$$

è la densità di una probabilità $\mathbf{Q}^\varepsilon \in \mathcal{Q}_t$ tale per cui valga l'identità ($\mathbf{P}$-q.c.)

$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}^\varepsilon) = \sum_{\substack{n\geq 1\\ \mathbf{P}[\tau^\varepsilon = n]>0}} \mathbb{1}_{\{\,\tau^\varepsilon = n\,\}} \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}_n) < \varepsilon$$

da cui vediamo in particolare che $\mathbf{Q}^\varepsilon \in \mathcal{Q}_t^\varepsilon$ e quindi che appunto $\mathcal{Q}_t^\varepsilon \neq \emptyset$.

Per quanto riguarda invece il secondo enunciato, supponiamo pure che $\rho_t$ possieda la proprietà di Fatou e che sia sensibile. Consideriamo lo scalare di $[0,1]$ dato da

$$c \coloneqq \sup\{\, \mathbf{P}[Z>0] \mid Z \in \mathcal{Q}_t^\varepsilon \,\}$$

e sia quindi $(Z_n)_n$ in $\mathcal{Q}_t^\varepsilon$ tale che $\mathbf{P}[Z_n > 0] \uparrow c$. In particolare, grazie a quanto visto nella prima parte della dimostrazione del lemma 3.2.1 con $\lambda_n \coloneqq 2^{-n}$ (identicamente) per $n \geq 1$, capiamo subito che la v.a.r.

$$Z^* \doteq \sum_{n\geq 1} 2^{-n} Z_n$$

resta a sua volta in $\mathcal{Q}_t^\varepsilon$ (in quanto, continuando a confondere probabilità e relative densità, $Z^* \in \mathcal{Q}_t$ e $\alpha_t^{\min}(Z^*) \leq \sum_{n\geq 1} 2^{-n}\alpha_t^{\min}(Z_n) < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$). Inoltre allora, essendo $\{\, Z^* > 0 \,\} = \cup_{n\geq 1}\{\, Z_n > 0\,\}$, vale chiaramente che $\mathbf{P}[Z^* > 0] = c$.

Adesso il claim è che $c = 1$, da cui la tesi (prendendo $Z^* \approx \mathbf{P}$). Ragionando per assurdo, sia dunque $A \coloneqq \{\, Z^* = 0 \,\}$ e supponiamo che $\mathbf{P}[A] > 0$. Allora, per ipotesi su $\rho_t$, $\mathbf{P}[\rho_t(-\varepsilon \mathbb{1}_A) > 0] > 0$ dove, grazie al teorema di rappresentazione 3.1.1 a pagina 52,

$$\rho_t(-\varepsilon\mathbb{1}_A) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}_t} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\varepsilon \mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \Big\}.$$

Da queste due cose insieme deduciamo subito che esiste $\widetilde{\mathbf{Q}} \in \mathcal{Q}_t$ tale che, posto

$$B \coloneqq \Big\{\, \alpha_t^{\min}(\widetilde{\mathbf{Q}}) < \mathbf{E}^{\widetilde{\mathbf{Q}}}[\varepsilon\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F}_t] \,\Big\} \in \mathcal{F}_t$$

vale $\mathbf{P}[B] > 0$. Notiamo a proposito che, essendo ovviamente $\mathbf{E}^{\widetilde{\mathbf{Q}}}[\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F}_t] \leq 1$ ($\mathbf{P}$-q.c.), abbiamo $\alpha_t^{\min}(\widetilde{\mathbf{Q}})\big|_B < \varepsilon$ e per ciò possiamo senz'altro supporre che $\widetilde{\mathbf{Q}} \in \mathcal{Q}_t^\varepsilon$. Infatti, denotando $\widetilde{Z} \coloneqq \frac{d\widetilde{\mathbf{Q}}}{d\mathbf{P}}$, e presa una $Z \in \mathcal{Q}_t^\varepsilon$ qualsiasi (abbiamo appena dimostrato che ne esistono), basta eventualmente sostituire $\widetilde{\mathbf{Q}}$ con $\widehat{\mathbf{Q}}$ tale che $\frac{d\widehat{\mathbf{Q}}}{d\mathbf{P}} \equiv \mathbb{1}_B \widetilde{Z} + \mathbb{1}_{\Omega\setminus B} Z$ (e ricordare di nuovo il lemma 3.2.1).

Mostriamo ora che $\mathbf{P}\Big[\Big\{\, \widetilde{Z} > 0 \,\Big\} \cap A\Big] > 0$ ed anzi che $\mathbf{P}\Big[\Big\{\, \widetilde{Z} > 0 \,\Big\} \cap A \cap B\Big] > 0$. Ma infatti, per definizione di $B$,

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[\widetilde{Z}\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\big] \equiv \mathbf{E}^{\widetilde{\mathbf{Q}}}[\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B] = \mathbf{E}^{\widetilde{\mathbf{Q}}}\big[\mathbb{1}_B\, \mathbf{E}^{\widetilde{\mathbf{Q}}}[\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F}_t]\big] > 0$$

(essendo in particolare che $B \in \mathcal{F}_t$, $\widetilde{\mathbf{Q}}[B] = \mathbf{P}[B] > 0$ e $\alpha_t^{\min}(\widetilde{\mathbf{Q}}) \geq 0$).

Consideriamo pertanto $\widehat{\mathbf{Q}} \in \mathcal{P}$ determinata ponendo

$$\widehat{Z} := \frac{d\widehat{\mathbf{Q}}}{d\mathbf{P}} \doteq \frac{1}{2}Z^* + \frac{1}{2}\widetilde{Z}.$$

Allora chiaramente $\widehat{\mathbf{Q}} \in \mathcal{Q}_t^\varepsilon$ ed inoltre, essendo che $\widehat{Z} > 0$ se e solo se o $Z^* > 0$ o $Z^* = 0$ ma $\widetilde{Z} > 0$ (in modo esclusivo), per quanto appena verificato (e per definizione di $A$) vale

$$\mathbf{P}\big[\widehat{Z} > 0\big] = \mathbf{P}[Z^* > 0] + \mathbf{P}\Big[\Big\{\ \widetilde{Z} > 0\ \Big\} \cap A\Big] > \mathbf{P}[Z^* > 0]$$

e questo è un palese assurdo rispetto alla massimalità di $c = \mathbf{P}[Z^* > 0]$. □

Eccoci finalmente ad un primo raffinamento della formula di rappresentazione (3.6).

**Teorema 3.2.1.** *Supponiamo che $\rho_t$ possieda la proprietà di Fatou e che esista $\mathbf{P}^* \in \mathcal{P}^e$ tale per cui $\alpha_t^{\min}(\mathbf{P}^*) < +\infty$. Allora vale la seguente formula di rappresentazione per $\rho_t$: per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ (e $\mathbf{P}$-q.c.),*

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\approx\mathbf{P}} \Big\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X\,|\,\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})\Big\}. \tag{3.13}$$

*Inoltre, se fosse $\mathbf{E}^{\mathbf{P}^*}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{P}^*)] < +\infty$ e se quindi poniamo*

$$\mathcal{Q}_t^{f,e}(\mathbf{P}^*) \doteq \Big\{\ \mathbf{Q} \in \mathcal{P}^e\ \Big|\ \mathbf{Q}\big|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{P}^*\big|_{\mathcal{F}_t},\ \mathbf{E}^{\mathbf{P}^*}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})] < +\infty\ \Big\} \tag{3.14}$$

*allora vale la seguente formula di rappresentazione per $\rho_t$: per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ (e $\mathbf{P}$-q.c.),*

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}_t^{f,e}(\mathbf{P}^*)} \Big\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X\,|\,\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})\Big\}. \tag{3.15}$$

*Dimostrazione.* Fissiamo $X \in L^\infty(\mathbf{P})$. Poiché $\mathcal{P}_t \supseteq \mathcal{P}^e$, segue subito dal teorema di rappresentazione 3.1.1 a pagina 52 che

$$\rho_t(X) \geq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\approx\mathbf{P}} \Big\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X\,|\,\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})\Big\} \geq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}_t\cap\mathcal{P}^e} \Big\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X\,|\,\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})\Big\}. \tag{3.16}$$

Denotiamo ora $Z^* := \frac{d\mathbf{P}^*}{d\mathbf{P}}$ ed osserviamo che $\mathbf{P}^*\big|_{\mathcal{F}_t} \approx \mathbf{P}\big|_{\mathcal{F}_t}$ con

$$Z_t^* := \frac{d\big(\mathbf{P}^*\big|_{\mathcal{F}_t}\big)}{d\big(\mathbf{P}\big|_{\mathcal{F}_t}\big)} = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[Z^*\,|\,\mathcal{F}_t]$$

(la quale infatti è $> 0$ $\mathbf{P}$-q.c.). Per ogni $\varepsilon \in\, ]0, +\infty[$ ed ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t$, definiamo dunque $\mathbf{Q}_\varepsilon \in \mathcal{P}^e$ ponendo

$$\frac{d\mathbf{Q}_\varepsilon}{d\mathbf{P}} \doteq (1-\varepsilon)\cdot\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} + \varepsilon\cdot\frac{Z^*}{Z_t^*}$$

in modo che resti $\mathbf{Q}_\varepsilon \in \mathcal{Q}_t$ o che equivalentemente, grazie alla formula di Bayes per la speranza condizionale, per ogni $Y \in L^\infty(\mathbf{P})$ sia

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}_\varepsilon}[-Y \,|\, \mathcal{F}_t] = (1-\varepsilon)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y \,|\, \mathcal{F}_t] + \varepsilon\,\mathbf{E}^{\mathbf{P}^*}[-Y \,|\, \mathcal{F}_t]$$

e che di conseguenza

$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}_\varepsilon) \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{Y \in \mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}_\varepsilon}[-Y \,|\, \mathcal{F}_t] \le (1-\varepsilon)\cdot\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) + \varepsilon\cdot\alpha_t^{\min}(\mathbf{P}^*).$$

Pertanto risultano chiari tutti i seguenti passaggi: per ogni $\varepsilon \in\, ]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}
\rho_t(X) &= \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}_t} \Big\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})\Big\} \\
&\ge \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}_t\cap\mathcal{P}^e} \Big\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})\Big\} \\
&\ge \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}_t} \Big\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}_\varepsilon}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}_\varepsilon)\Big\} \\
&\ge \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}_t} \Big\{(1-\varepsilon)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] + \varepsilon\,\mathbf{E}^{\mathbf{P}^*}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - (1-\varepsilon)\cdot\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) - \varepsilon\cdot\alpha_t^{\min}(\mathbf{P}^*)\Big\} \\
&= (1-\varepsilon)\cdot\rho_t(X) - \varepsilon\cdot\big\{\mathbf{E}^{\mathbf{P}^*}[X \,|\, \mathcal{F}_t] + \alpha_t^{\min}(\mathbf{P}^*)\big\} \\
&\ge \rho_t(X) - \varepsilon\{\rho_t(X) + \|X\|_\infty + \alpha_t^{\min}(\mathbf{P}^*)\}
\end{aligned}$$

(che è $> -\infty$ per ipotesi) da cui la formula (3.13) ed anzi

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}_t\cap\mathcal{P}^e} \Big\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})\Big\}$$

mandando $\varepsilon \downarrow 0$ e tenendo presente la (3.16).

Supponiamo infine che $\mathbf{E}^{\mathbf{P}^*}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{P}^*)] < +\infty$ e quindi, per ogni $\varepsilon \in\, ]0,1[$ ed ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t^f(\mathbf{P}^*) \neq \emptyset$ (si torni se necessario alla (3.8) di pagina 54), definiamo $\mathbf{Q}_\varepsilon \in \mathcal{P}^e$ ponendo

$$\frac{d\mathbf{Q}_\varepsilon}{d\mathbf{P}^*} \doteq (1-\varepsilon)\cdot\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}^*} + \varepsilon.$$

Allora $\mathbf{Q}_\varepsilon\big|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{P}^*\big|_{\mathcal{F}_t}$ (ciò vale già per $\mathbf{Q}$) e dunque, per ogni $Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, vale di nuovo

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}_\varepsilon}[-Y \,|\, \mathcal{F}_t] = (1-\varepsilon)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y \,|\, \mathcal{F}_t] + \varepsilon\,\mathbf{E}^{\mathbf{P}^*}[-Y \,|\, \mathcal{F}_t]$$

per cui ancora

$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}_\varepsilon) \le (1-\varepsilon)\cdot\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) + \varepsilon\cdot\alpha_t^{\min}(\mathbf{P}^*)$$

e così anche $\mathbf{E}^{\mathbf{P}^*}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}_\varepsilon)] < +\infty$, o in definitiva $\mathbf{Q}_\varepsilon \in \mathcal{Q}_t^{f,e}(\mathbf{P}^*)$ e pertanto, procedendo in modo del tutto analogo al caso precedente (ricordando il corollario 3.1.1 a pagina 54), troviamo che

$$\begin{aligned}\rho_t(X) &= \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}_t^f(\mathbf{P}^*)} \Big\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X\,|\,\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})\Big\} \\ &\geq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}_t^{f,e}(\mathbf{P}^*)} \Big\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X\,|\,\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})\Big\} \\ &\geq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}_t^f(\mathbf{P}^*)} \Big\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}_\varepsilon}[-X\,|\,\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}_\varepsilon)\Big\} \\ &\geq \rho_t(X) - \varepsilon\{\rho_t(X) + \|X\|_\infty + \alpha_t^{\min}(\mathbf{P}^*)\}\end{aligned}$$

da cui direttamente la (3.15) mandando $\varepsilon \downarrow 0$. □

*Osservazione* 3.2.1. Grazie al lemma 3.2.2, valgono ambedue le rappresentazioni (3.13) e (3.15) del precedente teorema 3.2.1 nel caso che $\rho_t$ possieda la proprietà di Fatou e che sia sensibile, potendo prendere $\mathbf{P}^* \in \mathcal{Q}_t^\varepsilon \cap \mathcal{P}^e$ per un qualsiasi $\varepsilon \in \,]0, +\infty[$.

## 3.3 Proprietà di consistenza temporale

**Definizione 3.3.1** (Consistenza temporale forte)**.** Sia $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ una successione di misure convesse condizionali di rischio. Diciamo che la successione $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è *consistente rispetto al tempo* (*in senso forte*) se, per ogni $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$, vale la seguente proprietà: per ogni $X, Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, se $\rho_{t+1}(X) = \rho_{t+1}(Y)$ allora $\rho_t(X) = \rho_t(Y)$ ($\mathbf{P}$-q.c.).

Se $T < +\infty$, allora diciamo che la successione $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è una *misura convessa dinamica di rischio.*

**Proposizione 3.3.1.** *Sia $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ una successione di misure convesse condizionali di rischio. Allora le quattro seguenti condizioni sono equivalenti.*

**(a)** $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ *è consistente rispetto al tempo.*

**(b)** *Per ogni $s, t \in \mathcal{T}$ con $s \geq 1$ e $s + t \in \mathcal{T}$, $\rho_t = \rho_t(-\rho_{t+s})$ ($\mathbf{P}$-q.c.).*

**(c)** *Per ogni $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$, $\rho_t = \rho_t(-\rho_{t+1})$ ($\mathbf{P}$-q.c.).*

**(d)** *Per ogni $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ ed ogni $X, Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, se $\rho_{t+1}(X) \leq \rho_{t+1}(Y)$ allora $\rho_t(X) \leq \rho_t(Y)$ ($\mathbf{P}$-q.c.).*

*Dimostrazione.* (c) ⇒ (a) Supponiamo che $\rho_{t+1}(X) = \rho_{t+1}(Y)$. Grazie alla ipotesi, $\rho_t(X) = \rho_t(-\rho_{t+1}(X))$ ed anche $\rho_t(Y) = \rho_t(-\rho_{t+1}(Y))$, e quindi $\rho_t(X) = \rho_t(Y)$.

(a) ⇒ (c) Sia $X \in L^\infty(\mathbf{P})$. Visto che $\rho_{t+1}(X) \in L^\infty_{t+1}(\mathbf{P})$ e che d'altra parte $\rho_{t+1}\big|_{L^\infty_{t+1}(\mathbf{P})} = -\mathrm{id}_{L^\infty_{t+1}(\mathbf{P})}$, otteniamo subito che $\rho_{t+1}(X) = \rho_{t+1}(-\rho_{t+1}(X))$ (come comunque avevamo già notato in precedenza) da cui per ipotesi $\rho_t(X) = \rho_t(-\rho_{t+1}(X))$ (prendendo $Y := -\rho_{t+1}(X)$).

(c) ⇒ (b) Possiamo procedere per induzione su $s$ in quanto l'ipotesi coincide col passo base $s = 1$. Supponiamo per ciò che la tesi sia vera per $s$ e dimostriamola per $s + 1$ (se

$t+s<T$): dunque, per ogni $Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, stiamo supponendo che $\rho_t(Y) = \rho_t(-\rho_{t+s}(Y))$ ed in particolare, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, la scelta $Y := -\rho_{t+s+1}(X)$ porta a

$$\rho_t(-\rho_{t+s+1}(X)) = \rho_t(-\rho_{t+s}(-\rho_{t+s+1}(X))) = \rho_t(-\rho_{t+s}(X)) = \rho_t(X)$$

dove abbiamo usato sia l'ipotesi sia di nuovo l'ipotesi induttiva.

(b) $\Rightarrow$ (c) È banale ($s=1$), e pertanto (a), (b) e (c) sono fra loro equivalenti.

(c) $\Rightarrow$ (d) Se $\rho_{t+1}(X) \leq \rho_{t+1}(Y)$, allora grazie a (c) e alla monotonìa otteniamo $\rho_t(X) = \rho_t(-\rho_{t+1}(X)) \leq \rho_t(-\rho_{t+1}(Y)) = \rho_t(Y)$.

(d) $\Rightarrow$ (a) È evidente, e dunque abbiamo concluso. $\square$

*Osservazione* 3.3.1. Sia $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ consistente rispetto al tempo. Se $\rho_0$ è sensibile, allora $\rho_t$ è sensibile per ogni $t \in \mathcal{T}$. Sia infatti $\varepsilon \in \,]0,+\infty[$ e sia $A \in \mathcal{F}$ con $\mathbf{P}[A] > 0$ (per cui di sicuro $\rho_t(-\varepsilon \mathbb{1}_A) \geq 0$ $\mathbf{P}$-q.c.). Grazie alla (b) della precedente proposizione 3.3.1, abbiamo che $\rho_0(-\varepsilon\mathbb{1}_A) = \rho_0(-\rho_t(-\varepsilon\mathbb{1}_A))$ e quindi, se per assurdo fosse $\rho_t(-\varepsilon\mathbb{1}_A) = 0$ ($\mathbf{P}$-q.c.), allora avremmo che pure $\rho_0(-\varepsilon\mathbb{1}_A) = \rho_0(0) = 0$ ($\mathbf{P}$-q.c.) in contraddizione rispetto alla ipotesi.

Sia $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ una successione di misure convesse condizionali di rischio. Introduciamo a questo punto il seguente sottoinsieme di $\mathcal{P}^e$:

$$\mathcal{Q}^* \doteq \left\{ \mathbf{Q} \in \mathcal{P}^e \;\middle|\; \alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) < +\infty \right\}.$$

Osserviamo che $\alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) \equiv \sup_{Y\in\mathcal{A}_0} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y]$ e che, grazie al lemma 3.2.2 a pagina 56 (con $t=0$), vale $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$ se $\rho_0$ possiede la proprietà di Fatou e se è sensibile.

**Definizione 3.3.2** (Consistenza temporale debole)**.** Sia $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ una successione di misure convesse condizionali di rischio. Diciamo che la successione $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è *consistente rispetto al tempo in senso debole* se, per ogni $t \in \mathcal{T}\setminus\{T\}$, vale la seguente proprietà: per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, se $\rho_{t+1}(X) \leq 0$ allora $\rho_t(X) \leq 0$ ($\mathbf{P}$-q.c.).

In modo conciso, $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo in senso debole se e solo se $\mathcal{A}_{t+1} \subseteq \mathcal{A}_t$. Comunque, chiaramente, consistenza forte implica consistenza debole.

**Proposizione 3.3.2.** *Sia $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ una successione di misure convesse condizionali di rischio le quali possiedano la proprietà di Fatou. Se $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo in senso debole allora, per ogni $t \in \mathcal{T}\setminus\{T\}$, vale la seguente disuguaglianza*: *per ogni $\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$ (e $\mathbf{P}$-q.c.),*

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_{t+1}^{\min}(\mathbf{Q}) \,|\, \mathcal{F}_t] \leq \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \tag{3.17}$$

*ed in tal caso quindi, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, il processo $(\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}))_{t\in\mathcal{T}}$ è una $\mathbf{Q}$-supermartingala rispetto a $\mathbb{F}$.*

*Viceversa, se per ogni $t \in \mathcal{T}\setminus\{T\}$ vale la formula di rappresentazione* (3.13) *del teorema 3.2.1 a pagina 58, allora la* (3.17) *implica che $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ sia consistente rispetto al tempo in senso debole.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che $\mathcal{A}_{t+1} \subseteq \mathcal{A}_t$. Allora, grazie a ciò ed alla (3.4) del lemma 3.1.1 a pagina 51,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_{t+1}^{\min}(\mathbf{Q}) \,|\, \mathcal{F}_t] &= \operatorname*{ess\,sup}_{Y\in\mathcal{A}_{t+1}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y \,|\, \mathcal{F}_t] \\ &\le \operatorname*{ess\,sup}_{Y\in\mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y \,|\, \mathcal{F}_t] \\ &\equiv \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}).\end{aligned}$$

Viceversa, supponiamo che valgano la (3.13) e la (3.17), e fissiamo $X \in \mathcal{A}_{t+1}$. Allora, per ogni $\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$, dalla definizione di $\alpha_{t+1}^{\min}(\mathbf{Q})$ abbiamo che $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_{t+1}] \le \alpha_{t+1}^{\min}(\mathbf{Q})$ ($\mathbf{P}$-q.c.) e così, anche per la (3.17),

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\big[\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_{t+1}]\big|\mathcal{F}_t\big] \\ &\le \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_{t+1}^{\min}(\mathbf{Q}) \,|\, \mathcal{F}_t] \\ &\le \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})\end{aligned}$$

da cui quindi $\rho_t(X) = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\approx\mathbf{P}} \left\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})\right\} \le 0$ (dalla (3.13)), ovvero $X \in \mathcal{A}_t$: in definitiva, $\mathcal{A}_{t+1} \subseteq \mathcal{A}_t$. □

**Corollario 3.3.1.** *Sia $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ una successione di misure convesse condizionali di rischio le quali possiedano la proprietà di Fatou e di cui $\rho_0$ sia sensibile. Allora $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo in senso debole se e solo se, per ogni $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ ed ogni $\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$, vale la disuguaglianza* (3.17) *ed in tal caso quindi, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^* \neq \emptyset$, il processo $(\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}))_{t\in\mathcal{T}}$ è una $\mathbf{Q}$-supermartingala rispetto a $\mathbb{F}$.*

*Dimostrazione.* Si tratta della precedente proposizione 3.3.2 tenendo presenti la precedente osservazione 3.3.1 e l'osservazione 3.2.1 a pagina 60. □

Sia $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ una successione di misure convesse condizionali di rischio. Introduciamo anche le seguenti notazioni: per ogni $s, t \in \mathcal{T}$ con $s + t \in \mathcal{T}$, visto che $L_t^\infty(\mathbf{P}) < L_{t+s}^\infty(\mathbf{P}) < L^\infty(\mathbf{P})$ (e che in particolare ha senso considerare $\rho_t\big|_{L_{t+s}^\infty(\mathbf{P})}$), poniamo

$$\mathcal{A}_{t,t+s} \stackrel{def}{=} \left\{ X \in L_{t+s}^\infty(\mathbf{P}) \;\middle|\; \rho_t(X) \le 0 \ (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \right\} = \mathcal{A}_t \cap L_{t+s}^\infty(\mathbf{P})$$

e notiamo che in particolare, per $s = 0$, abbiamo $\mathcal{A}_{t,t} = L_{t,+}^\infty(\mathbf{P})$. Ebbene, se $\rho_t$ possiede la proprietà di Fatou allora grazie a quanto già visto, ma con $\mathcal{F}_{t+s}$ al posto di $\mathcal{F}_T$, possiamo affermare che la mappa

$$\alpha_{t,t+s}^{\min}(\mathbf{Q}) \stackrel{def}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{Y\in\mathcal{A}_{t,t+s}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y \,|\, \mathcal{F}_t], \quad \mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t,$$

definisce una funzione di penalità su $\mathcal{P}_t$ secondo la quale, per ogni $X \in L_{t+s}^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}_t} \left\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_{t,t+s}^{\min}(\mathbf{Q})\right\}.$$

In particolare $\alpha_{t,t+s}^{\min}(\mathbf{Q})$ resta non negativa e $\mathcal{F}_t$-misurabile e, per $s = 0$, vale $\alpha_{t,t}^{\min}(\mathbf{Q}) = 0$ ($\mathbf{P}$-q.c.).

**Lemma 3.3.1.** *Sia $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ una successione di misure convesse condizionali di rischio. Allora, per ogni $s,t\in\mathcal{T}$ con $s+t\in\mathcal{T}$, valgono le tre seguenti equivalenze.*

1. *Per ogni $X\in L^\infty(\mathbf{P})$, $-\rho_{t+s}(X)\in\mathcal{A}_{t,t+s}$ se e solo se $X\in\mathcal{A}_{t,t+s}+\mathcal{A}_{t+s}$.*
2. *$\rho_t(-\rho_{t+s})\le\rho_t$ ($\mathbf{P}$-q.c.) se e solo se $\mathcal{A}_t\subseteq\mathcal{A}_{t,t+s}+\mathcal{A}_{t+s}$.*
3. *$\rho_t(-\rho_{t+s})\ge\rho_t$ ($\mathbf{P}$-q.c.) se e solo se $\mathcal{A}_t\supseteq\mathcal{A}_{t,t+s}+\mathcal{A}_{t+s}$.*

*Dimostrazione.* Osserviamo per cominciare che, per ogni $X\in L^\infty(\mathbf{P})$, è in effetti $\rho_{t+s}(X)\in L^\infty_{t+s}(\mathbf{P})$ e dunque $-\rho_{t+s}(X)\in\mathcal{A}_{t,t+s}$ se e solo se $\rho_t(-\rho_{t+s}(X))\le 0$ ($\mathbf{P}$-q.c.).

*1.* Fissiamo $X\in L^\infty(\mathbf{P})$. Supponiamo che $-\rho_{t+s}(X)\in\mathcal{A}_{t,t+s}$. Allora, visto che $X+\rho_{t+s}(X)\in\mathcal{A}_{t+s}$, basta osservare che $X=-\rho_{t+s}(X)+[X+\rho_{t+s}(X)]$. Viceversa, siano $X_{t,t+s}\in\mathcal{A}_{t,t+s}$ e $X_{t+s}\in\mathcal{A}_{t+s}$ tali che $X=X_{t,t+s}+X_{t+s}$. Dunque $X_{t,t+s}\in L^\infty_{t+s}(\mathbf{P})$ con $\rho_t(X_{t,t+s})\le 0$ ed inoltre $\rho_{t+s}(X_{t+s})\le 0$, e così $\rho_{t+s}(X)=\rho_{t+s}(X_{t+s})-X_{t,t+s}\le -X_{t,t+s}$ da cui subito $\rho_t(-\rho_{t+s}(X))\le\rho_t(X_{t,t+s})\le 0$.

*2.* Supponiamo che $\rho_t(-\rho_{t+s})\le\rho_t$ e sia $X\in\mathcal{A}_t$. Allora $\rho_t(-\rho_{t+s}(X))\le\rho_t(X)\le 0$, ovvero $-\rho_{t+s}(X)\in\mathcal{A}_{t,t+s}$, da cui $X\in\mathcal{A}_{t,t+s}+\mathcal{A}_{t+s}$ grazie al punto precedente. Viceversa, supponiamo che $\mathcal{A}_t\subseteq\mathcal{A}_{t,t+s}+\mathcal{A}_{t+s}$ e sia $X\in L^\infty(\mathbf{P})$. Poiché $X+\rho_t(X)\in\mathcal{A}_t$, per ipotesi e sempre per il punto precedente otteniamo $-\rho_{t+s}(X+\rho_t(X))\in\mathcal{A}_{t,t+s}$, ossia $\rho_t\big(-\rho_{t+s}(X+\rho_t(X))\big)\le 0$. Ma $-\rho_{t+s}(X+\rho_t(X))=-\rho_{t+s}(X)+\rho_t(X)$ e quindi $\rho_t\big(-\rho_{t+s}(X+\rho_t(X))\big)=\rho_t(-\rho_{t+s}(X))-\rho_t(X)$, da cui appunto $\rho_t(-\rho_{t+s}(X))\le\rho_t(X)$.

*3.* Supponiamo che $\rho_t(-\rho_{t+s})\ge\rho_t$ e sia $X\in\mathcal{A}_{t,t+s}+\mathcal{A}_{t+s}$. Allora da $\rho_t(-\rho_{t+s}(X))\le 0$ otteniamo subito che $\rho_t(X)\le 0$, ovvero $X\in\mathcal{A}_t$. Viceversa, supponiamo che $\mathcal{A}_t\supseteq\mathcal{A}_{t,t+s}+\mathcal{A}_{t+s}$ e sia $X\in L^\infty(\mathbf{P})$. Osservato che $X+\rho_t(-\rho_{t+s}(X))\in\mathcal{A}_{t,t+s}+\mathcal{A}_{t+s}$, otteniamo quindi $0\ge\rho_t\big(X+\rho_t(-\rho_{t+s}(X))\big)=\rho_t(X)-\rho_t(-\rho_{t+s}(X))$. □

Siamo ormai pronti per il risultato principale della sezione.

**Teorema 3.3.1.** *Sia $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ una successione di misure convesse condizionali di rischio le quali possiedano la proprietà di Fatou e tali che risulti $\mathcal{Q}^*\neq\emptyset$. Allora le quattro seguenti condizioni sono equivalenti.*

**(i)** *$(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo.*

**(ii)** *Per ogni $s,t\in\mathcal{T}$ con $s+t\in\mathcal{T}$, $\mathcal{A}_t=\mathcal{A}_{t,t+s}+\mathcal{A}_{t+s}$.*

**(iii)** *Per ogni $s,t\in\mathcal{T}$ con $s+t\in\mathcal{T}$ e per ogni $\mathbf{Q}\approx\mathbf{P}$ (e $\mathbf{P}$-q.c.),*

$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})=\alpha_{t,t+s}^{\min}(\mathbf{Q})+\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_{t+s}^{\min}(\mathbf{Q})\,|\,\mathcal{F}_t].$$

**(iv)** *Per ogni $X\in L^\infty(\mathbf{P})$ ed ogni $\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}^*$, il processo $(V_t^{\mathbf{Q}}(X))_{t\in\mathcal{T}}$ definito ponendo, per ogni $t\in\mathcal{T}$,*

$$V_t^{\mathbf{Q}}(X)\doteq\rho_t(X)+\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})$$

*è una $\mathbf{Q}$-supermartingala rispetto a $\mathbb{F}$ (ed in particolare lo è $(\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}))_{t\in\mathcal{T}}$).*

*Inoltre, per ciascuno di questi casi e per ogni $t \in \mathcal{T}$, vale la seguente formula di rappresentazione per $\rho_t$: per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ (e $\mathbf{P}$-q.c.),*

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \Big\} \tag{3.18}$$

(*o anche le due formule di rappresentazione* (3.13) *e* (3.15) *del teorema 3.2.1 a pagina 58 dove* $\mathbf{P}^* \in \mathcal{Q}^*$).

*Dimostrazione.* Osserviamo anzitutto di poter supporre che $\mathbf{P} \in \mathcal{Q}^*$. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Alla luce della proposizione 3.3.1 (specialmente di (a) $\Leftrightarrow$ (b)), si tratta chiaramente di 2. e 3. del precedente lemma 3.3.1.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Grazie all'ipotesi e quindi alla (3.4) del lemma 3.1.1 a pagina 51,

$$\begin{aligned}
\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) &\equiv \operatorname*{ess\,sup}_{Y \in \mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y \,|\, \mathcal{F}_t] \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{Y_{t,t+s} \in \mathcal{A}_{t,t+s}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y_{t,t+s} \,|\, \mathcal{F}_t] + \operatorname*{ess\,sup}_{Y_{t+s} \in \mathcal{A}_{t+s}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y_{t+s} \,|\, \mathcal{F}_t] \\
&\equiv \alpha_{t,t+s}^{\min}(\mathbf{Q}) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_{t+s}^{\min}(\mathbf{Q}) \,|\, \mathcal{F}_t].
\end{aligned}$$

*Osservazione.* Notiamo che, per $s = 1$, otteniamo $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{t,t+1} + \mathcal{A}_{t+1}$ e (quindi)

$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) = \alpha_{t,t+1}^{\min}(\mathbf{Q}) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_{t+1}^{\min}(\mathbf{Q}) \,|\, \mathcal{F}_t]$$

per ogni $\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$, da cui deduciamo in particolare la (3.17) della proposizione 3.3.2 (ed il fatto che dunque $(\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}))_{t \in \mathcal{T}}$ sia una $\mathbf{Q}$-supermartingala rispetto a $\mathbb{F}$). Inoltre,

$$\mathcal{A}_{t,t+s} = \sum_{r=t}^{t+s-1} \mathcal{A}_{r,r+1} \quad \text{e} \quad \alpha_{t,t+s}^{\min}(\mathbf{Q}) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[ \sum_{r=t}^{t+s-1} \alpha_{r,r+1}^{\min}(\mathbf{Q}) \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right].$$

(iii) $\Rightarrow$ (3.18) e (iv) Grazie all'ipotesi ed in virtù quindi del teorema 3.2.1 a pagina 58, sappiamo che per ogni $t \in \mathcal{T}$ vale la seguente formula di rappresentazione per $\rho_t$: per ogni $\mathbf{P}^* \in \mathcal{Q}^*$ ed ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \Big\} \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t^{f,e}(\mathbf{P}^*)} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \Big\}$$

(ove $\mathcal{Q}_t^{f,e}(\mathbf{P}^*)$ è definito in (3.14)) ed in particolare vale il "$\geq$" nella (3.18).

Dimostriamo ora il "$\leq$" della (3.18) verificando che $\mathcal{Q}_t^{f,e}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{Q}^*$ (stiamo usando l'ipotesi $\mathbf{P} \in \mathcal{Q}^*$). Sia per questo $\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$ con $\mathbf{Q}\big|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{P}\big|_{\mathcal{F}_t}$ e tale che $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})] < +\infty$. Allora, grazie anche alla (iii),

$$\begin{aligned}
\alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) &= \alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q}) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})] \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q})] + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})] \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[\alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{P})] + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})] \\
&\leq \alpha_0^{\min}(\mathbf{P}) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})]
\end{aligned}$$

(ricordando la definizione di $\alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q})$ e che $\mathcal{A}_{0,t} \subseteq \mathcal{A}_0$) da cui appunto $\alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) < +\infty$.

Dunque possiamo contare sulla formula (3.18). Fissiamo ora $\widetilde{\mathbf{Q}} \in \mathcal{Q}^*$ e dimostriamo che, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, l'insieme

$$\left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_{t+1}] - \alpha_{t+1}^{\min}(\mathbf{Q}) \;\middle|\; \mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_{t+1}^{f,e}(\widetilde{\mathbf{Q}}) \right\}$$

sia diretto verso l'alto. Siano per questo $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathcal{Q}_{t+1}^{f,e}(\widetilde{\mathbf{Q}})$ ($\subseteq \mathcal{Q}_{t+1}$) e sia $B \in \mathcal{F}_{t+1}$ non $\mathbf{P}$-trascurabile. Allora, grazie al lemma 3.2.1 a pagina 55 (con probabilità di riferimento $\widetilde{\mathbf{Q}}$), la v.a.r.

$$\widehat{Z} := \mathbb{1}_B \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\widetilde{\mathbf{Q}}} + \mathbb{1}_{\Omega \setminus B} \frac{d\mathbf{Q}_2}{d\widetilde{\mathbf{Q}}}$$

è la densità di una probabilità $\widehat{\mathbf{Q}} \approx \widetilde{\mathbf{Q}}$ con $\widehat{\mathbf{Q}}\big|_{\mathcal{F}_{t+1}} = \widetilde{\mathbf{Q}}\big|_{\mathcal{F}_{t+1}}$ e tale che

$$\alpha_{t+1}^{\min}(\widehat{\mathbf{Q}}) = \mathbb{1}_B \alpha_{t+1}^{\min}(\mathbf{Q}_1) + \mathbb{1}_{\Omega \setminus B} \alpha_{t+1}^{\min}(\mathbf{Q}_2).$$

da cui vediamo $\widehat{\mathbf{Q}} \in \mathcal{Q}_{t+1}^{f,e}(\widetilde{\mathbf{Q}})$ e dunque quanto voluto (in modo davvero standard, ricordando eventualmente anche la formula di Bayes per la speranza condizionale).

Pertanto, grazie sempre al teorema 3.2.1 a pagina 58 (con $\mathbf{P}^* = \widetilde{\mathbf{Q}}$), ne deduciamo che, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, esiste una successione $(\mathbf{Q}_n)_n$ in $\mathcal{Q}_{t+1}^{f,e}(\widetilde{\mathbf{Q}})$ tale che

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}_n}[-X \,|\, \mathcal{F}_{t+1}] - \alpha_{t+1}^{\min}(\mathbf{Q}_n) \uparrow \rho_{t+1}(X)$$

e così, per convergenza monotòna (ed usando che $\mathbf{Q}_n\big|_{\mathcal{F}_{t+1}} = \widetilde{\mathbf{Q}}\big|_{\mathcal{F}_{t+1}}$ per ogni $n$),

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\widetilde{\mathbf{Q}}}[\rho_{t+1}(X) \,|\, \mathcal{F}_t] &= \sup\nolimits_n \mathbf{E}^{\widetilde{\mathbf{Q}}}\big[\mathbf{E}^{\mathbf{Q}_n}[-X \,|\, \mathcal{F}_{t+1}] - \alpha_{t+1}^{\min}(\mathbf{Q}_n) \,\big|\, \mathcal{F}_t\big] \\
&= \lim\nolimits_n \big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}_n}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \mathbf{E}^{\mathbf{Q}_n}[\alpha_{t+1}^{\min}(\mathbf{Q}_n) \,|\, \mathcal{F}_t] \big\}.
\end{aligned}$$

D'altra parte, in modo analogo a quanto visto poc'anzi, vale $\mathcal{Q}_{t+1}^{f,e}(\widetilde{\mathbf{Q}}) \subseteq \mathcal{Q}^*$ ed inoltre, applicando la (iii) a ciascuna $\mathbf{Q}_n$ (e $s = 1$), otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathbf{Q}_n}[\alpha_{t+1}^{\min}(\mathbf{Q}_n) \,|\, \mathcal{F}_t] &= \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}_n) - \alpha_{t,t+1}^{\min}(\mathbf{Q}_n) \\
&= \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}_n) - \alpha_{t,t+1}^{\min}(\widetilde{\mathbf{Q}}).
\end{aligned}$$

Mettendo insieme tutto questo, finalmente,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\widetilde{\mathbf{Q}}}[V_{t+1}^{\widetilde{\mathbf{Q}}}(X) \,|\, \mathcal{F}_t] &\equiv \mathbf{E}^{\widetilde{\mathbf{Q}}}[\rho_{t+1}(X) + \alpha_{t+1}^{\min}(\widetilde{\mathbf{Q}}) \,|\, \mathcal{F}_t] \\
&= \mathbf{E}^{\widetilde{\mathbf{Q}}}[\rho_{t+1}(X) \,|\, \mathcal{F}_t] + \alpha_t^{\min}(\widetilde{\mathbf{Q}}) - \alpha_{t,t+1}^{\min}(\widetilde{\mathbf{Q}}) \\
&= \lim\nolimits_n \big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}_n}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \mathbf{E}^{\mathbf{Q}_n}[\alpha_{t+1}^{\min}(\mathbf{Q}_n) \,|\, \mathcal{F}_t] \big\} + \alpha_t^{\min}(\widetilde{\mathbf{Q}}) - \alpha_{t,t+1}^{\min}(\widetilde{\mathbf{Q}}) \\
&= \lim\nolimits_n \big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}_n}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}_n) \big\} + \alpha_t^{\min}(\widetilde{\mathbf{Q}}) \\
&\leq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \Big\} + \alpha_t^{\min}(\widetilde{\mathbf{Q}}) \\
&= \rho_t(X) + \alpha_t^{\min}(\widetilde{\mathbf{Q}}) \\
&\equiv V_t^{\widetilde{\mathbf{Q}}}(X).
\end{aligned}$$

(iv) $\Rightarrow$ (3.18) e (i) Anzitutto, grazie alla ipotesi, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ ed ogni $\mathbf{P}^* \in \mathcal{Q}^*$ la v.a.r. $\rho_t(X) + \alpha_t^{\min}(\mathbf{P}^*)$ è $\mathbf{P}^*$-integrabile. Ma $\rho_t(X) \in L_t^\infty(\mathbf{P}) = L_t^\infty(\mathbf{P}^*)$ e dunque dev'essere $\mathbf{E}^{\mathbf{P}^*}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{P}^*)] < +\infty$. Dunque, sempre per il teorema 3.2.1 a pagina 58, vale

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\approx\mathbf{P}} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \Big\} \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}_t^{f,e}(\mathbf{P}^*)} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \Big\}$$

ed in particolare vale il "$\geq$" nella (3.18). Per il "$\leq$" verifichiamo che ancora $\mathcal{Q}_t^{f,e}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{Q}^*$. Siano per questo $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t^{f,e}(\mathbf{P})$ e $X \in \mathcal{A}_0$. Allora, chiaramente,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] &\leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X - \rho_t(X)] + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\rho_t(X) + \alpha_t^{\min}(\mathbf{P})] \\
&\leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})] + \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[\rho_t(X) + \alpha_t^{\min}(\mathbf{P})] \\
&\leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})] + \rho_0(X) + \alpha_0^{\min}(\mathbf{P}) \\
&\leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})] + \alpha_0^{\min}(\mathbf{P})
\end{aligned}$$

da cui per definizione $\alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})] + \alpha_0^{\min}(\mathbf{P}) < +\infty$, dunque appunto $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$.

Veniamo finalmente alla consistenza temporale. Siano per questo $X, Y \in L^\infty(\mathbf{P})$ tali che $\rho_{t+1}(X) \leq \rho_{t+1}(Y)$: la tesi è che $\rho_t(X) \leq \rho_t(Y)$ (ricordando la proposizione 3.3.1). Ma infatti allora, grazie anche alla ipotesi, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$ abbiamo che

$$\begin{aligned}
\rho_t(Y) + \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) &\geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\rho_{t+1}(Y) + \alpha_{t+1}^{\min}(\mathbf{Q}) \,|\, \mathcal{F}_t] \\
&\geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\rho_{t+1}(X) + \alpha_{t+1}^{\min}(\mathbf{Q}) \,|\, \mathcal{F}_t] \\
&\geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\big[\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_{t+1}] - \alpha_{t+1}^{\min}(\mathbf{Q}) + \alpha_{t+1}^{\min}(\mathbf{Q}) \,\big|\, \mathcal{F}_t\big] \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t]
\end{aligned}$$

da cui $\rho_t(Y) \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})$ e quindi immediatamente, grazie alla (3.18),

$$\rho_t(Y) \geq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}^*} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \Big\} = \rho_t(X). \qquad \square$$

Possiamo ricavare un teorema analogo per le misure coerenti condizionali di rischio, ma occorre introdurre dapprima una nuova nozione.

**Definizione 3.3.3** (Insieme stabile; incollamento di probabilità)**.** Sia $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}^e$. Diciamo che $\mathcal{Q}$ è un *insieme stabile* se, per ogni tripletta $\mathbf{Q}^1, \mathbf{Q}^2, \mathbf{Q}^3 \in \mathcal{Q}$, per ogni $t \in \mathcal{T}$ ed ogni $A_t \in \mathcal{F}_t$, resta in $\mathcal{Q}$ la probabilità $\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$ definita come segue: per ogni $A \in \mathcal{F}$,

$$\mathbf{Q}[A] \overset{def}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^1}\big[\mathbb{1}_{A_t}\, \mathbf{Q}^2[A \,|\, \mathcal{F}_t] + \mathbb{1}_{\Omega\setminus A_t}\, \mathbf{Q}^3[A \,|\, \mathcal{F}_t]\big]$$

dove naturalmente $\mathbf{Q}^i[A \,|\, \mathcal{F}_t] \equiv \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^i}[\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F}_t]$ è la probabilità condizionale di $A$ data $\mathbf{Q}^i$ rispetto a $\mathcal{F}_t$. Chiamiamo $\mathbf{Q}$ *l'incollamento di* $\mathbf{Q}^1, \mathbf{Q}^2, \mathbf{Q}^3$ *in* $t$ *via* $A_t$.

Osserviamo che, se indichiamo $Z_t^i := \frac{d(\mathbf{Q}^i\,|_{\mathcal{F}_t})}{d(\mathbf{P}\,|_{\mathcal{F}_t})}$ e $Z_T := \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$, allora $Z_t^i = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^i}[Z_T^i \,|\, \mathcal{F}_t]$ e, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, Bayes dà

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^i}[X \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\Big[X \frac{Z_T^i}{Z_t^i} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big]$$

e quindi è davvero elementare verificare che

$$Z_T = \mathbb{1}_{A_t} \frac{Z_t^1}{Z_t^2} Z_T^2 + \mathbb{1}_{\Omega\setminus A_t} \frac{Z_t^1}{Z_t^3} Z_T^3.$$

In ogni caso, resta evidente in particolare che $\mathbf{Q}\,\big|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{Q}^1\,\big|_{\mathcal{F}_t}$, ed in effetti $Z_t := \frac{d(\mathbf{Q}\,|_{\mathcal{F}_t})}{d(\mathbf{P}\,|_{\mathcal{F}_t})} = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[Z_T \,|\, \mathcal{F}_t] = Z_t^1$.

Comunque, di conseguenza, una probabilità $\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$ è l'incollamento di $\mathbf{Q}^1, \mathbf{Q}^2, \mathbf{Q}^3$ in $t$ via $A_t$ se e solo se, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ ed ogni $s \in \mathcal{T}$, risulta

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X \,|\, \mathcal{F}_s] = \begin{cases} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^1}\big[\mathbb{1}_{A_t}\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^2}[X \,|\, \mathcal{F}_t] + \mathbb{1}_{\Omega\setminus A_t}\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^3}[X \,|\, \mathcal{F}_t] \,\big|\, \mathcal{F}_s\big], & \text{se } s < t, \\ \mathbb{1}_{A_t}\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^2}[X \,|\, \mathcal{F}_t] + \mathbb{1}_{\Omega\setminus A_t}\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^3}[X \,|\, \mathcal{F}_t], & \text{se } s \geq t. \end{cases}$$

**Corollario 3.3.2.** *Sia $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ una successione di misure convesse condizionali di rischio le quali possiedano la proprietà di Fatou, con $\rho_0$ coerente e tali che risulti $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$. Allora le tre seguenti condizioni sono equivalenti.*

**(i)** *$(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo.*

**(ii)** *L'insieme $\mathcal{Q}^*$ è stabile e, per ogni $t \in \mathcal{T}$, vale la seguente formula di rappresentazione per $\rho_t$: per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ (e $\mathbf{P}$-q.c.),*

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}^*} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t]. \tag{3.19}$$

**(iii)** *Per ogni $t \in \mathcal{T}$, vale la precedente formula di rappresentazione* (3.19) *e, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ ed ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, il processo $(\rho_t(X))_{t\in\mathcal{T}}$ è una $\mathbf{Q}$-supermartingala rispetto a $\mathbb{F}$.*

*Inoltre, per ciascuno di questi casi e per ogni $t \in \mathcal{T}$, $\rho_t$ è coerente.*

*Dimostrazione.* Possiamo supporre che $\mathbf{P} \in \mathcal{Q}^*$. Osserviamo inoltre che, in questo caso,

$$\mathcal{Q}^* = \left\{\, \mathbf{Q} \in \mathcal{P}^e \;\middle|\; \alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) = 0 \,\right\}.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) In virtù del precedente teorema 3.3.1 ed in particolare della formula di rappresentazione (3.18), basta intanto verificare che, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, è $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) = 0$. Ma infatti $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \geq 0$ ed ora, grazie alla condizione (iii) di tale teorema,

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})] = \alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) - \alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q}) = 0$$

(una volta notato che $0 \le \alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q}) \le \alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) = 0$).

Per la stabilità di $\mathcal{Q}^*$, invece, prendiamo in modo arbitrario $\mathbf{Q}^1, \mathbf{Q}^2, \mathbf{Q}^3 \in \mathcal{Q}^*$, $t \in \mathcal{T}$ e $A_t \in \mathcal{F}_t$ e dimostriamo quindi che, se $\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$ denota l'incollamento di $\mathbf{Q}^1, \mathbf{Q}^2, \mathbf{Q}^3$ in $t$ via $A_t$, allora anche $\alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) = 0$. Ma infatti, anche grazie a quanto appena visto,

$$\begin{aligned}
\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) &\equiv \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_t} \left\{ \mathbb{1}_{A_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^2}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] + \mathbb{1}_{\Omega \setminus A_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^3}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] \right\} \\
&= \mathbb{1}_{A_t} \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^2}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] + \mathbb{1}_{\Omega \setminus A_t} \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^3}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] \\
&\equiv \mathbb{1}_{A_t} \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}^2) + \mathbb{1}_{\Omega \setminus A_t} \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}^3) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Inoltre anche $\alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q}) = \alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q}^1) = 0$, in quanto $\mathbf{Q}\big|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{Q}^1\big|_{\mathcal{F}_t}$ (e $\mathbf{Q}^1 \in \mathcal{Q}^*$), e di conseguenza appunto $\alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) = \alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q}) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})] = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) La tesi è che, per ogni $t \in \mathcal{T}$ ed ogni $\widetilde{\mathbf{Q}} \in \mathcal{Q}^*$,

$$\mathbf{E}^{\widetilde{\mathbf{Q}}}\Big[\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_{t+1}] \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big] \le \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t].$$

Mostriamo anzitutto che, grazie alla data stabilità di $\mathcal{Q}^*$, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ l'insieme

$$\Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_{t+1}] \,\Big|\, \mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^* \Big\}$$

risulta diretto verso l'alto. Ciò è immediato: per ogni $\mathbf{Q}^1, \mathbf{Q}^2 \in \mathcal{Q}^*$, l'incollamento $\mathbf{Q}$ di $\mathbf{P}, \mathbf{Q}^1, \mathbf{Q}^2$ in $t+1$ via

$$A_{t+1} := \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^1}[-X \,|\, \mathcal{F}_{t+1}] \ge \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^2}[-X \,|\, \mathcal{F}_{t+1}] \Big\}$$

sta in $\mathcal{Q}^*$, ha densità rispetto a $\mathbf{P}$ data da

$$Z_T = \mathbb{1}_{A_{t+1}} \frac{Z_T^1}{Z_t^1} + \mathbb{1}_{\Omega \setminus A_{t+1}} \frac{Z_T^2}{Z_t^2}$$

e quindi è chiaramente tale che $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_{t+1}] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^1}[-X \,|\, \mathcal{F}_{t+1}] \vee \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^2}[-X \,|\, \mathcal{F}_{t+1}]$.

Pertanto, come al solito (per convergenza monotòna), vale che

$$\mathbf{E}^{\widetilde{\mathbf{Q}}}\Big[\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_{t+1}] \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big] = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*} \mathbf{E}^{\widetilde{\mathbf{Q}}}\Big[\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_{t+1}] \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big].$$

Ma ora osservando che, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, l'incollamento di $\widetilde{\mathbf{Q}}$ e $\mathbf{Q}$ in $t+1$ via $A_{t+1} := \Omega$ (dunque non importa specificare $\mathbf{Q}^3$) sta sempre in $\mathbf{Q}^*$, ricaviamo subito

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*} \mathbf{E}^{\widetilde{\mathbf{Q}}}\Big[\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_{t+1}] \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big] \le \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}' \in \mathcal{Q}^*} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}'}[-X \,|\, \mathcal{F}_t].$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Grazie al precedente teorema 3.3.1 la tesi è che, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ ed ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, il processo $(\rho_t(X) + \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}))_{t\in\mathcal{T}}$ risulta una $\mathbf{Q}$-supermartingala rispetto a $\mathbb{F}$. Osserviamo per questo che, per ogni $X \in \mathcal{A}_{t+1}$, la formula di rappresentazione (3.19) dà subito che $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \mid \mathcal{F}_{t+1}] \le 0$ e dunque a maggior ragione che $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \mid \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\big[\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_{t+1}] \,\big|\, \mathcal{F}_t\big] \le 0$. Allora, sempre per la (3.19), vale $\rho_t(X) \le 0$ o cioè $X \in \mathcal{A}_t$. Questo prova che $\mathcal{A}_{t+1} \subseteq \mathcal{A}_t$, ovvero che $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo in senso debole.

Di conseguenza, grazie alla proposizione 3.3.2, anche il processo $(\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}))_{t\in\mathcal{T}}$ è una $\mathbf{Q}$-supermartingala rispetto a $\mathbb{F}$ (non negativa). Ma $\alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) = 0$ e per ciò questo coincide col processo nullo: pertanto il processo $(\rho_t(X) + \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}))_{t\in\mathcal{T}} = (\rho_t(X))_{t\in\mathcal{T}}$ risulta veramente una $\mathbf{Q}$-supermartingala rispetto a $\mathbb{F}$ grazie alle ipotesi. $\square$

## 3.4 Sicurezza asintotica e precisione asintotica

Assumiamo per l'intera sezione che $T = +\infty$ e quindi che

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_T = \bigvee_{t\in\mathcal{T}} \mathcal{F}_t \doteq \sigma\Big(\bigcup_{t\in\mathcal{T}} \mathcal{F}_t\Big)$$

(a parole, che $\mathcal{F}$ coincida esattamente con la $\sigma$-algebra generata da $\cup_{t\in\mathcal{T}}\mathcal{F}_t$).

Sia $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ una successione di misure convesse condizionali di rischio le quali possiedano la proprietà di Fatou e tali che risulti $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$. Supponiamo inoltre che $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ sia consistente rispetto al tempo. Allora grazie al teorema 3.3.1 a pagina 63 sappiamo che, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ ed ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, il processo $(V_t^{\mathbf{Q}}(X))_{t\in\mathcal{T}}$ definito ponendo, per ogni $t \in \mathcal{T}$,

$$V_t^{\mathbf{Q}}(X) \doteq \rho_t(X) + \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})$$

è una $\mathbf{Q}$-supermartingala rispetto a $\mathbb{F}$ e che, in particolare, lo è $(\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}))_{t\in\mathcal{T}}$.

Non solo: quest'ultimo processo è non negativo mentre il primo è tale che, per ogni $t \in \mathcal{T}$ (e $\mathbf{P}$ o $\mathbf{Q}$ quasi certamente),

$$V_t^{\mathbf{Q}}(X) \ge \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] \ge \|X\|_\infty$$

(dalla formula di rappresentazione (3.18)). Pertanto, in virtù del classico teorema di convergenza di Doob per supermartingale, esistono $V_\infty^{\mathbf{Q}}(X), \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q}) \in L^1(\mathbf{Q})$ tali che

$$V_t^{\mathbf{Q}}(X) \to V_\infty^{\mathbf{Q}}(X) \ \ \mathbf{Q}\text{-q.c.} \quad \text{e} \quad \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \to \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q}) \ \ \mathbf{Q}\text{-q.c.}$$

per $t \to T = +\infty$ (per cui resta $V_\infty^{\mathbf{Q}}(X) \ge \|X\|_\infty$ e $\alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q}) \equiv V_\infty^{\mathbf{Q}}(0) \ge 0$).

Osserviamo a proposito che invece $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] \to -X$ $\mathbf{Q}$-q.c. per $t \to +\infty$.

Comunque, di conseguenza, essendo $\rho_t(X) = V_t^{\mathbf{Q}}(X) - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})$, se poniamo $\rho_\infty(X) \doteq V_\infty^{\mathbf{Q}}(X) - \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q}) \in L^1(\mathbf{Q})$ allora chiaramente

$$\rho_t(X) \to \rho_\infty(X) \ \ \mathbf{Q}\text{-q.c.}$$

per $t \to +\infty$ ed inoltre $|\rho_\infty(X)| \le \|X\|_\infty$ (in quanto $|\rho_t(X)| \le \|X\|_\infty$ per ogni $t$).

**Proposizione 3.4.1.** *Per ogni* $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$*, la mappa* $\rho_\infty \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to L^\infty(\mathbf{P})$ *definita ponendo come sopra, per ogni* $X \in L^\infty(\mathbf{P})$*,*

$$\rho_\infty(X) \doteq V_\infty^{\mathbf{Q}}(X) - \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$$

*soddisfa tutte le quattro proprietà di misura convessa condizionale di rischio rispetto a* $\mathcal{F}_t$ *per ogni* $t$*. Inoltre, per ogni* $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ *(e* $\mathbf{P}$*-q.c.),*

$$\rho_\infty(X) \geq -X - \operatorname*{ess\,inf}_{\mathbf{Q}' \in \mathcal{Q}^*} \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q}'). \tag{3.20}$$

*Dimostrazione.* Intanto, $\rho_\infty$ eredita le diverse proprietà di ciascuna $\rho_t$ grazie naturalmente alla convergenza $\rho_t(X) \to \rho_\infty(X)$ ($\mathbf{P}$ o $\mathbf{Q}$ quasi certa). Infatti normalizzazione e monotonìa sono davvero evidenti e non dipendono da $\mathbb{F}$, mentre ad esempio per l'invarianza condizionale per traslazioni ragioniamo così: per ogni $t_0 \in \mathcal{T}$ ed ogni $X_{t_0} \in L_{t_0}^\infty(\mathbf{P})$, vale che $X_{t_0} \in L_t^\infty(\mathbf{P})$ per ogni $t \in \mathcal{T}$ con $t \geq t_0$ e dunque $\rho_t(X + X_{t_0}) = \rho_t(X) - X_{t_0}$ porta subito a $\rho_\infty(X + X_{t_0}) = \rho_\infty(X) - X_{t_0}$ mandando $t \to +\infty$. In modo analogo per la convessità condizionale.

Infine, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ ed ogni $\mathbf{Q}' \in \mathcal{Q}^*$, da $\rho_t(X) \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}'}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}')$ otteniamo subito che $\rho_\infty(X) \geq -X - \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q}')$ e quindi immediatamente la tesi. □

**Definizione 3.4.1** (Sicurezza asintotica)**.** Diciamo che $(\rho_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è *asintoticamente sicura* se, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, risulta $\rho_\infty(X) \geq -X$.

Notiamo che, se $(\rho_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è asintoticamente sicura, allora vale a maggior ragione la (3.20) di sopra.

Sempre grazie al teorema 3.3.1 a pagina 63, sappiamo pure che $\mathcal{A}_{0,t} \equiv \mathcal{A}_0 \cap L_t^\infty(\mathbf{P})$, $t \in \mathcal{T}$, e $\alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q}) \equiv \sup_{X \in \mathcal{A}_{0,t}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X]$, $t \in \mathcal{T}$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, sono tali che, per ogni $t \in \mathcal{T}$ ed ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$,

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_{0,t} + \mathcal{A}_t \quad \text{e} \quad +\infty > \alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) = \alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q}) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})].$$

Ma qui $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})]$ è non crescente nella $t$ e dunque $\alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q})$ dev'essere non decrescente nella $t$ (con $\alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q}) \leq \alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) < +\infty$): segue che, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, esiste $\mathbf{P}$-quasi certamente il limite

$$\alpha_{0,\infty}^{\min}(\mathbf{Q}) \coloneqq \sup_t \alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q})$$

e che rimane $\alpha_{0,\infty}^{\min}(\mathbf{Q}) \leq \alpha_0^{\min}(\mathbf{Q})$.

**Definizione 3.4.2** (Prevedibile accettabilità)**.** Sia $X \in L^\infty(\mathbf{P})$. Diciamo che $X$ è *prevedibilmente accettabile* se esiste una successione $(X_t)_t$ equi-limitata in $L^\infty(\mathbf{P})$, con $X_t \in \mathcal{A}_{0,t}$ per ogni $t$, la quale converga $\mathbf{P}$-quasi certamente con $\lim_t X_t \leq X$. Denotiamo $\mathcal{A}_{0,\infty}$ il sottoinsieme di $L^\infty(\mathbf{P})$ costituito dalle posizioni prevedibilmente accettabili.

Notiamo che $\mathcal{A}_{0,\infty} \neq \emptyset$, in quanto $L_+^\infty(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{A}_{0,\infty}$, e soprattutto che $\mathcal{A}_{0,\infty} \subseteq \mathcal{A}_0$, e diamo quindi alcune caratterizzazioni notevoli della sicurezza asintotica.

**Teorema 3.4.1.** *In questo contesto, le seguenti sei condizioni sono equivalenti.*

**(i)** $\bigcap_{t\in\mathcal{T}}\mathcal{A}_t = L^\infty_+(\mathbf{P})$ *(ovvero* $\subseteq$*).*

**(ii)** $\mathcal{A}_{0,\infty} = \mathcal{A}_0$ *(ovvero* $\supseteq$*).*

**(iii)** *Per ogni* $\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}^*$, $\alpha^{\min}_{0,\infty}(\mathbf{Q}) = \alpha^{\min}_0(\mathbf{Q})$ *(ovvero* $\geq$*).*

**(iv)** *Per ogni* $\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}^*$, $\alpha^{\min}_{0,t}(\mathbf{Q})$ *converge* $\mathbf{Q}$*-q.c. e in* $L^1(\mathbf{Q})$ *allo zero.*

**(v)** *Esiste* $\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}^*$ *tale che* $\alpha^{\min}_{0,t}(\mathbf{Q})$ *converga* $\mathbf{Q}$*-q.c. e in* $L^1(\mathbf{Q})$ *allo zero.*

**(vi)** $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ *è asintoticamente sicura.*

*Dimostrazione.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Fissiamo $X\in\mathcal{A}_0$ ($\rho_0(X)\leq 0$): la tesi è che, date le ipotesi, sia $X\in\mathcal{A}_{0,\infty}$. Consideriamo per questo la successione $(X_t)_t$ in $L^\infty(\mathbf{P})$ data da, per ogni $t\in\mathcal{T}$,

$$X_t \doteq -\rho_t(X) \in L^\infty_t(\mathbf{P}).$$

Così tale successione è equi-limitata in $L^\infty(\mathbf{P})$ (da $\|X\|_\infty$) e con $X_t\in\mathcal{A}_{0,t}$ per ogni $t$ in quanto $X\in\mathcal{A}_0=\mathcal{A}_{0,t}+\mathcal{A}_t$ e cioè $X_t\equiv-\rho_t(X)\in\mathcal{A}_{0,t}$ grazie a 1. del fondamentale lemma 3.3.1 a pagina 63. Inoltre chiaramente $X_t\to-\rho_\infty(X)$ $\mathbf{P}$-q.c. (per $t\to+\infty$) e pertanto basta verificare che (i) implica $-\rho_\infty(X)\leq X$ (che poi è la sicurezza asintotica).

Ma infatti, per ogni $t\in\mathcal{T}$ ed ogni $s\in\mathcal{T}$ con $s\leq t$, vale $X+\rho_t(X)\in\mathcal{A}_s$ (perché $X+\rho_t(X)\in\mathcal{A}_t$ e per consistenza temporale vale $\mathcal{A}_t\subseteq\mathcal{A}_s$) e quindi, usando anche la proprietà di Fatou della quale $\rho_s$ gode (per $X+\rho_t(X)\to X+\rho_\infty(X)$ $\mathbf{P}$-q.c.), troviamo

$$\rho_s(X+\rho_\infty(X)) \leq \liminf_t \rho_s(X+\rho_t(X)) \leq 0$$

(ed anzi $=0$) e pertanto possiamo concludere che

$$X+\rho_\infty(X) \in \bigcap_{s\in\mathcal{T}}\mathcal{A}_s \subseteq L^\infty_+(\mathbf{P})$$

(anche per (i)) da cui finalmente $X+\rho_\infty(X)\geq 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Fissiamo $X\in\mathcal{A}_0$ e $\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}^*$: la tesi è che sia $\alpha^{\min}_{0,\infty}(\mathbf{Q})\geq\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X]$. Ma infatti $X\in\mathcal{A}_{0,\infty}$ per ipotesi e così esiste una successione $(X_t)_t$ equi-limitata in $L^\infty(\mathbf{P})$, con $X_t\in\mathcal{A}_{0,t}$ per ogni $t$, la quale converge $\mathbf{P}$-quasi certamente con $\lim_t X_t\leq X$: dunque appunto

$$\alpha^{\min}_{0,\infty}(\mathbf{Q}) \equiv \lim_t \alpha^{\min}_{0,t}(\mathbf{Q}) \geq \liminf_t \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X_t] \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X]$$

($\alpha^{\min}_{0,t}(\mathbf{Q})\equiv\sup_{Y\in\mathcal{A}_{0,t}}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y]\geq\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X_t]$ per ogni $t$) anche grazie a Fatou.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Torniamo al fatto che, per ogni $\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}^*$, vale $+\infty>\alpha^{\min}_0(\mathbf{Q})=\alpha^{\min}_{0,t}(\mathbf{Q})+\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha^{\min}_t(\mathbf{Q})]$. Allora, dato che per ipotesi $\alpha^{\min}_{0,t}(\mathbf{Q})\to\alpha^{\min}_0(\mathbf{Q})$ ($\mathbf{P}$-q.c.), dev'essere $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha^{\min}_t(\mathbf{Q})]\to 0$. Ma $(\alpha^{\min}_t(\mathbf{Q}))_{t\in\mathcal{T}}$ è una $\mathbf{Q}$-supermartingala rispetto a $\mathbb{F}$ non negativa e con $\alpha^{\min}_t(\mathbf{Q})\to\alpha^{\min}_\infty(\mathbf{Q})$ ($\mathbf{P}$-q.c.): segue $\alpha^{\min}_\infty(\mathbf{Q})=0$, in quanto per Fatou

$$0\leq\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha^{\min}_\infty(\mathbf{Q})]\leq\liminf_t\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha^{\min}_t(\mathbf{Q})]=0.$$

(iv) $\Rightarrow$ (v) È davvero banale.

(v) $\Rightarrow$ (vi) Segue in modo immediato da (3.20) della precedente proposizione 3.4.1, perché appunto per ipotesi abbiamo $\alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q}) = 0$ e quindi $\operatorname{ess\,inf}_{\mathbf{Q}' \in \mathcal{Q}^*} \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q}') = 0$.

(vi) $\Rightarrow$ (i) Sia $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ tale che $X \in \mathcal{A}_t$ per ogni $t$ (ovvero $\rho_t(X) \leq 0$): la tesi è che $X \geq 0$. Ma infatti abbiamo per ipotesi che $-X \leq \rho_\infty(X)$, e che a sua volta $\rho_\infty(X) \equiv \lim_t \rho_t(X) \leq 0$, dunque in effetti $-X \leq 0$. □

Esistono successioni di misure convesse condizionali di rischio e consistenti rispetto al tempo che non siano asintoticamente sicure: si veda ad esempio [Föl06].

Osserviamo che invece tutte le successioni di misure coerenti condizionali di rischio (e consistenti rispetto al tempo) sono di certo asintoticamente sicure, semplicemente perché $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) = 0$ per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$ (come visto a suo tempo).

**Corollario 3.4.1.** *Supponiamo che, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, esista una probabilità $\mathbf{P}^X \approx \mathbf{P}$ tale che, per ogni $t \in \mathcal{T}$, risulti*

$$\rho_0\Big(\mathbf{E}^{\mathbf{P}^X}[X \,|\, \mathcal{F}_t]\Big) \leq \rho_0(X).$$

*Allora $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è asintoticamente sicura.*

*Dimostrazione.* Grazie al precedente teorema 3.4.1, basta verificare che $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_{0,\infty}$. Sia per questo $X \in \mathcal{A}_0$ e consideriamo la successione $(X_t)_t$ equi-limitata in $L^\infty(\mathbf{P})$ data da, per ogni $t \in \mathcal{T}$,

$$X_t \doteq \mathbf{E}^{\mathbf{P}^X}[X \,|\, \mathcal{F}_t] \in L_t^\infty(\mathbf{P}).$$

In questo modo infatti $X_t \in \mathcal{A}_{0,t}$, in quanto $\rho_0(X_t) \leq \rho_0(X) \leq 0$ per ipotesi, ed inoltre $X_t \to X$ $\mathbf{P}$-q.c. (per $t \to +\infty$): segue subito dalla definizione che $X \in \mathcal{A}_{0,\infty}$. □

**Definizione 3.4.3** (Precisione asintotica)**.** Diciamo che $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è *asintoticamente precisa* se, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, risulta $\rho_\infty(X) = -X$.

**Proposizione 3.4.2.** *Supponiamo che $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ sia asintoticamente sicura e che, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, esista una probabilità $\mathbf{Q}^X \approx \mathbf{P}$ tale per cui*

$$\rho_0(X) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^X}[-X] - \alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}^X).$$

*Allora $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è asintoticamente precisa.*

*Dimostrazione.* Fissiamo $X \in L^\infty(\mathbf{P})$: la tesi è che $\rho_\infty(X) \leq -X$ ($\mathbf{P}$-q.c.). Osserviamo per questo che $\mathbf{Q}^X \approx \mathbf{P}$ soddisfa $\alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}^X) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^X}[-X] - \rho_0(X) < +\infty$ (per ipotesi), da cui $\mathbf{Q}^X \in \mathcal{Q}^*$.

Sappiamo quindi che $V_t^{\mathbf{Q}^X}(X) \equiv \rho_t(X) + \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}^X)$, $t \in \mathcal{T}$, definisce una $\mathbf{Q}^X$-supermartingala rispetto a $\mathbb{F}$ inferiormente limitata da $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^X}[-X \mid \mathcal{F}_t]$. Dunque chiaramente $U_t^{\mathbf{Q}^X} \equiv V_t^{\mathbf{Q}^X}(X) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^X}[X \mid \mathcal{F}_t]$, $t \in \mathcal{T}$, definisce una $\mathbf{Q}^X$-supermartingala rispetto a $\mathbb{F}$ non negativa. Inoltre, per $t \to +\infty$ e $\mathbf{P}$-q.c.,

$$U_t^{\mathbf{Q}^X} \to U_\infty^{\mathbf{Q}^X} \doteq \rho_\infty(X) + \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q}^X) + X.$$

Ma ora $U_0^{\mathbf{Q}^X} = \rho_0(X) + \alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}^X) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^X}[X] = 0$ (sempre per ipotesi) e in definitiva $(U_t^{\mathbf{Q}^X})_{t \in \mathcal{T}}$ coincide col processo nullo: pertanto anche $\rho_\infty(X) + \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q}^X) + X = 0$, da cui subito $\rho_\infty(X) + X \leq 0$. □

Esistono successioni di misure convesse condizionali di rischio e consistenti rispetto al tempo le quali siano asintoticamente sicure ma non asintoticamente precise: si veda sempre [Föl06].

## 3.5 Un esempio: la misura dinamica entropica di rischio

Immaginiamo che le nostre preferenze finanziarie si basino su di una funzione utilità normalizzata $u(\cdot)$ di tipo esponenziale, nel senso che esiste un parametro $\gamma \in ]0, +\infty[$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) \equiv 1 - e^{-\gamma x}.$$

Ciò deve significare che, per ogni $t \in \mathcal{T}$ ed ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, l'utilità condizionale attesa al tempo $t$ della posizione $X$ è la v.a.r. in $L_t^\infty(\mathbf{P})$ data da

$$U_t(X) \doteq \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[u(X) \,|\, \mathcal{F}_t] \equiv \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[1 - e^{-\gamma X} \,|\, \mathcal{F}_t] = 1 - \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X} \,|\, \mathcal{F}_t].$$

Consideriamo dunque, per ogni $t \in \mathcal{T}$, il sottoinsieme non vuoto di $L^\infty(\mathbf{P})$ dato da

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t &\doteq \{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \mid U_t(X) \geq U_t(0) \ (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \} \\ &\equiv \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \,\middle|\, \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X} \,|\, \mathcal{F}_t] \leq 1 \ (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \right\} \end{aligned}$$

e la mappa $\rho_t \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to L_t^\infty(\mathbf{P})$ definita ponendo, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\begin{aligned} \rho_t(X) &\doteq \operatorname{ess\,inf} \{ X_t \in L_t^\infty(\mathbf{P}) \mid X + X_t \in \mathcal{A}_t \} \\ &\equiv \operatorname{ess\,inf} \left\{ X_t \in L_t^\infty(\mathbf{P}) \,\middle|\, \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X} \,|\, \mathcal{F}_t] \leq e^{\gamma X_t} \ (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \right\} \\ &= \frac{1}{\gamma} \log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X} \,|\, \mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

Allora è immediato verificare che, per ogni $t \in \mathcal{T}$, $\rho_t$ è una misura convessa condizionale di rischio al tempo $t$ (non coerente) il cui insieme di accettazione coincide proprio con $\mathcal{A}_t$ e la quale possiede la proprietà di Fatou.

Chiamiamo $\rho_t$ *la misura condizionale entropica di rischio al tempo* $t$ (*di parametro* $\gamma$) e la successione $(\rho_t)_{t \in \mathcal{T}}$ *la misura dinamica entropica di rischio* (*di parametro* $\gamma$).

Dunque sappiamo che, per ogni $t \in \mathcal{T}$, la mappa $\alpha_t^{\min} \colon \mathcal{P}_t \to L^0((\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}); [0, +\infty])$ definita ponendo, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$,

$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \doteq \operatorname*{ess\,sup}_{Y \in \mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y \,|\, \mathcal{F}_t]$$

è una funzione di penalità su $\mathcal{P}_t$ e che vale la seguente identità: per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$,

$$\begin{aligned}\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) &= \operatorname*{ess\,sup}_{X \in L^\infty(\mathbf{P})} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \rho_t(X) \Big\} \\ &\equiv \operatorname*{ess\,sup}_{X \in L^\infty(\mathbf{P})} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \frac{1}{\gamma} \log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X} \,|\, \mathcal{F}_t] \Big\}.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Possiamo quindi meglio esplicitare la precedente formula (3.21) per $\alpha_t^{\min}$ ricorrendo al concetto di entropia relativa condizionale (si veda anche la prima parte dell'esempio 3 a pagina 40). Rammentiamo infatti che, per ogni $t \in \mathcal{T}$ ed ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, se denotiamo

$$Z_t := \frac{d(\mathbf{Q}\,|_{\mathcal{F}_t})}{d(\mathbf{P}\,|_{\mathcal{F}_t})} = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\Big[\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big] \equiv \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[Z_T \,|\, \mathcal{F}_t]$$

allora l'entropia relativa di $\mathbf{Q}\big|_{\mathcal{F}_t}$ dato $\mathbf{P}\big|_{\mathcal{F}_t}$ coincide per definizione con

$$H_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) \doteq H\big(\mathbf{Q}\,|_{\mathcal{F}_t} \big|\, \mathbf{P}\,|_{\mathcal{F}_t}\big) \equiv \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[\mathbb{1}_{\{Z_t>0\}} Z_t \log Z_t\big] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\big[\mathbb{1}_{\{Z_t>0\}} \log Z_t\big] \in [0,+\infty]$$

(la quale risulta nulla se e solo se $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t$) mentre l'entropia relativa condizionale di $\mathbf{Q}$ dato $\mathbf{P}$ al tempo $t$ è la v.a.r. in $L^0((\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}); [0,+\infty])$ data da

$$\widehat{H}_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) \doteq \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\Big[\mathbb{1}_{\{Z_t>0\}} \frac{Z_T}{Z_t} \log \frac{Z_T}{Z_t} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\Big[\mathbb{1}_{\{Z_t>0\}} \log \frac{Z_T}{Z_t} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big]$$

e tale che valga la seguente formula notevole: per ogni $t \in \mathcal{T}$ ed ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$,

$$\widehat{H}_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) = \operatorname*{ess\,sup}_{X \in L^\infty(\mathbf{P})} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-X} \,|\, \mathcal{F}_t] \Big\}. \tag{3.22}$$

Notiamo in particolare che, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, $\widehat{H}_0(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) = H_T(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) \equiv H(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P})$.

**Proposizione 3.5.1.** *Per ogni $t \in \mathcal{T}$, vale la seguente formula di rappresentazione per $\rho_t$: per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ (e $\mathbf{P}$-q.c.),*

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t} \Big\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \Big\}$$

*dove, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$, la minima funzione di penalità $\alpha_t^{\min}$ verifica l'identità*

$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) = \frac{1}{\gamma} \widehat{H}_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}).$$

*Dimostrazione.* Basta poggiare sul fondamentale teorema di rappresentazione 3.1.1 a pagina 52 ed unire la (3.21) alla (3.22) in modo elementare. □

Procediamo adesso osservando che la successione $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è pure consistente rispetto al tempo in quanto, per ogni $t \in \mathcal{T}\setminus\{T\}$, vale $\rho_t = \rho_t(-\rho_{t+1})$ (**P**-q.c.): infatti, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, vale evidentemente

$$\begin{aligned}\rho_t(X) &\equiv \frac{1}{\gamma}\log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}\,|\,\mathcal{F}_t]\\ &= \frac{1}{\gamma}\log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\Big[e^{\gamma\left\{\frac{1}{\gamma}\log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}\,|\,\mathcal{F}_{t+1}]\right\}}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big]\\ &\equiv \rho_t(-\rho_{t+1}(X))\end{aligned}$$

(si torni se necessario alla proposizione 3.3.1 a pagina 60). Inoltre l'insieme

$$\mathcal{Q}^* \equiv \big\{\, \mathbf{Q}\in\mathcal{P}^e \;\big|\; \alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) < +\infty \,\big\} = \{\, \mathbf{Q}\in\mathcal{P}^e \mid H(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) < +\infty \,\}$$

è certamente non vuoto, poiché ad esempio $\mathbf{P}\in\mathcal{Q}^*$, ed in più $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è asintoticamente precisa (quindi asintoticamente sicura) semplicemente perché $\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}\,|\,\mathcal{F}_t] \to e^{-\gamma X}$ (dunque $\rho_t(X) \to -X$) **P**-quasi certamente per $t \to +\infty$: valgono pertanto tutte le equivalenze del teorema 3.3.1 a pagina 63, in particolare la formula di rappresentazione (3.18), nonché quelle del teorema 3.4.1 a pagina 71 (sotto le due assunzioni iniziali su $T \equiv +\infty$ e su $\mathcal{F}_T$ della precedente sezione).

Tuttavia vogliamo ragionare in modo diretto, all'interno di questo specifico contesto, su alcune delle principali condizioni di tali due teoremi. Denotiamo quindi, per ogni $t\in\mathcal{T}$ ed ogni $\mathbf{Q}\in\mathcal{P}$,

$$\widehat{H}_{t,t+1}(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) \doteq \widehat{H}_t\big(\mathbf{Q}\,|_{\mathcal{F}_{t+1}}\big|\,\mathbf{P}\,|_{\mathcal{F}_{t+1}}\big) \equiv \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\Big[\mathbb{1}_{\{Z_t>0\}}\log\frac{Z_{t+1}}{Z_t}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big].$$

Allora di nuovo, per ogni $t\in\mathcal{T}$ ed ogni $\mathbf{Q}\in\mathcal{P}_t$,

$$\widehat{H}_{t,t+1}(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) = \operatorname*{ess\,sup}_{X\in L^\infty_{t+1}(\mathbf{P})}\Big\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X\,|\,\mathcal{F}_t] - \log\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-X}\,|\,\mathcal{F}_t]\Big\} = \gamma\cdot\alpha_{t,t+1}^{\min}(\mathbf{Q})$$

e così, per ogni $\mathbf{Q}\approx\mathbf{P}$, la condizione (iii) del teorema 3.3.1 (con $s=1$) diventa

$$\widehat{H}_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) = \widehat{H}_{t,t+1}(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\big[\widehat{H}_{t+1}(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P})\,\big|\,\mathcal{F}_t\big] \tag{3.23}$$

che in effetti risulta davvero chiara dalle rispettive definizioni (visto che $\log\frac{Z_T}{Z_t} = \log\frac{Z_{t+1}}{Z_t} + \log\frac{Z_T}{Z_{t+1}}$).

Consideriamo a questo punto, per ogni $X\in L^\infty(\mathbf{P})$ ed ogni $\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}^*$, il processo $(V_t^{\mathbf{Q}}(X))_{t\in\mathcal{T}}$ definito ponendo, per ogni $t\in\mathcal{T}$,

$$\begin{aligned}V_t^{\mathbf{Q}}(X) &\doteq \rho_t(X) + \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})\\ &\equiv \frac{1}{\gamma}\big\{\log\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}\,|\,\mathcal{F}_t] + \widehat{H}_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P})\big\}\end{aligned}$$

il quale come sappiamo è una **Q**-supermartingala rispetto a $\mathbb{F}$. Ebbene, mostriamo come sia possibile precisare la struttura della sua decomposizione di Doob, o cioè identificare quel processo $\mathbb{F}$-prevedibile e non decrescente $(A_t^{\mathbf{Q}}(X))_{t\in\mathcal{T}}$ tale per cui $(V_t^{\mathbf{Q}}(X) - A_t^{\mathbf{Q}}(X))_{t\in\mathcal{T}}$ diventi una **Q**-martingala rispetto a $\mathbb{F}$.

**Lemma 3.5.1.** *Per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, il processo $(\widehat{H}_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}))_{t\in\mathcal{T}}$ è una $\mathbf{Q}$-supermartingala rispetto a $\mathbb{F}$ (non negativa) tale che valga una delle due seguenti possibilità:*

- *se $T < +\infty$, allora $\widehat{H}_T(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) = 0$ ($\mathbf{P}$-q.c.);*
- *se $T = +\infty$, allora $\widehat{H}_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) \to 0$ $\mathbf{Q}$-q.c. e in $L^1(\mathbf{Q})$ per $t \to +\infty$.*

*Inoltre, il processo $\mathbb{F}$-prevedibile e non decrescente $(A_t^{\mathbf{Q}})_{t\in\mathcal{T}}$ dato da, per ogni $t \in \mathcal{T}$,*

$$A_t^{\mathbf{Q}} \doteq \begin{cases} 0, & \textit{se } t = 0, \\ \displaystyle\sum_{s=0}^{t-1} \widehat{H}_{s,s+1}(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}), & \textit{se } t \geq 1, \end{cases}$$

*è tale che il processo $(\widehat{H}_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) - A_t^{\mathbf{Q}})_{t\in\mathcal{T}}$ sia una $\mathbf{Q}$-martingala rispetto a $\mathbb{F}$.*

*Dimostrazione.* Grazie alla (3.23) vista poc'anzi, capiamo in modo immediato che $(\widehat{H}_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}))_{t\in\mathcal{T}}$ sia una $\mathbf{Q}$-supermartingala rispetto a $\mathbb{F}$, e che nel caso $T < +\infty$ risulti $\widehat{H}_T(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) = 0$ già dalla definizione.

Sia dunque $T = +\infty$ e dimostriamo che $\widehat{H}_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) \to 0$ $\mathbf{Q}$-q.c. e in $L^1(\mathbf{Q})$ (per $t \to +\infty$). Osserviamo per questo che, per ogni $t \in \mathcal{T}$,

$$H(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) \equiv H_T(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) = H_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\big[\widehat{H}_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P})\big]$$

per cui basta verificare che $H_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) \to H_T(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P})$ (per $t \to +\infty$). Ma infatti, visto che $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\log \frac{Z_t}{Z_T}] \leq \log \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\frac{Z_t}{Z_T}] = 0$ (grazie a Jensen), vediamo subito che $H_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) \leq H_T(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P})$. D'altra parte allora, visto invece che $Z_t \to Z_T$ ($\mathbf{P}$-q.c.), otteniamo per Fatou

$$\liminf_t H_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) \geq H_T(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) \geq \limsup_t H_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}).$$

Per quanto riguarda infine la seconda parte dell'enunciato, ricordiamo dalla teoria delle martingale che, per ogni $t \geq 1$,

$$A_t^{\mathbf{Q}} = -\sum_{s=0}^{t-1} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\big[\Delta\widehat{H}_{s+1}(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P})\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]$$

(come comunque risulta chiaro). Ma sempre dalla (3.23) vediamo che

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\big[\Delta\widehat{H}_{s+1}(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P})\,\big|\,\mathcal{F}_s\big] \equiv \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\big[\widehat{H}_{s+1}(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P})\,\big|\,\mathcal{F}_s\big] - \widehat{H}_s(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) = -\widehat{H}_{s,s+1}(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P})$$

e ciò conclude. □

Osserviamo in particolare che se $T = +\infty$ allora, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})$ converge $\mathbf{Q}$-q.c. e in $L^1(\mathbf{Q})$ allo zero per $t \to \infty$.

**Teorema 3.5.1.** *Per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, sia $\mathbf{P}^X \approx \mathbf{P}$ quella probabilità equivalente (ed anzi in $\mathcal{Q}^*$) con*

$$\frac{d\mathbf{P}^X}{d\mathbf{P}} \doteq \frac{e^{-\gamma X}}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}]}.$$

*Allora, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ ed ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, il processo $(V_t^{\mathbf{Q}}(X))_{t\in\mathcal{T}}$ è una $\mathbf{Q}$-supermartingala rispetto a $\mathbb{F}$ tale che valga una delle due possibilità*

- *se* $T < +\infty$*, allora* $V_T^{\mathbf{Q}}(X) = -X$ ($\mathbf{P}$*-q.c.);*
- *se* $T = +\infty$*, allora* $V_t^{\mathbf{Q}}(X) \to -X$ $\mathbf{Q}$*-q.c. e in* $L^1(\mathbf{Q})$ *per* $t \to +\infty$*;*

*ed inoltre, per ogni* $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ *ed ogni* $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$*, il processo* $\mathbb{F}$*-prevedibile e non decrescente* $(A_t^{\mathbf{Q}}(X))_{t\in\mathcal{T}}$ *dato da, per ogni* $t \in \mathcal{T}$*,*

$$A_t^{\mathbf{Q}}(X) \doteq \begin{cases} 0, & \text{se } t = 0, \\ \dfrac{1}{\gamma}\displaystyle\sum_{s=0}^{t-1} \widehat{H}_{s,s+1}(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}^X), & \text{se } t \geq 1, \end{cases}$$

*è tale che il processo* $(V_t^{\mathbf{Q}}(X) - A_t^{\mathbf{Q}}(X))_{t\in\mathcal{T}}$ *sia una* $\mathbf{Q}$*-martingala rispetto a* $\mathbb{F}$*. In particolare,* $(V_t^{\mathbf{Q}}(X))_{t\in\mathcal{T}}$ *è una* $\mathbf{Q}$*-martingala rispetto a* $\mathbb{F}$ *se e solo se* $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^X$*.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo infatti che, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$ ed ogni $t \in \mathcal{T}$, vale la formula

$$V_t^{\mathbf{Q}}(X) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X\,|\,\mathcal{F}_t] + \frac{1}{\gamma}\widehat{H}_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}^X). \tag{3.24}$$

Così infatti, grazie anche al precedente lemma 3.5.1 con $\mathbf{P}^X$ al posto di $\mathbf{P}$, risulterebbe tutto chiaro in modo davvero immediato (compresa l'ultima affermazione, in quanto $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^X$ se e solo se, per ogni $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$, $\widehat{H}_{t,t+1}(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}^X) = 0$).

Possiamo dunque concentrarci sulla sola (3.24). Ma questa è un'uguaglianza davvero elementare: infatti, osservato che

$$f_t^X := \frac{d(\mathbf{P}^X\,|_{\mathcal{F}_t})}{d(\mathbf{P}\,|_{\mathcal{F}_t})} = \frac{1}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}]}\,\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}\,|\,\mathcal{F}_t] \equiv \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[f_T^X\,|\,\mathcal{F}_t]$$

e se denotiamo $Z_t^X := \frac{d(\mathbf{Q}\,|_{\mathcal{F}_t})}{d(\mathbf{P}^X\,|_{\mathcal{F}_t})}$, allora segue immediatamente che

$$\frac{Z_T^X}{Z_t^X} = \frac{Z_T}{Z_t}\cdot\frac{f_t^X}{f_T^X} = \frac{Z_T}{Z_t}\cdot\frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}\,|\,\mathcal{F}_t]}{e^{-\gamma X}}$$

da cui chiaramente, per definizione,

$$\begin{aligned} \widehat{H}_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}^X) &= \widehat{H}_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\Big[\log\frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}\,|\,\mathcal{F}_t]}{e^{-\gamma X}}\Big|\,\mathcal{F}_t\Big] \\ &= \gamma\cdot\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) + \gamma\cdot\rho_t(X) + \gamma\cdot\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X\,|\,\mathcal{F}_t] \\ &\equiv \gamma\cdot\big\{V_t^{\mathbf{Q}}(X) - \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X\,|\,\mathcal{F}_t]\big\} \end{aligned}$$

ovvero proprio la (3.24) desiderata. □

Ritroviamo così che se $T = +\infty$ allora, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, $\rho_t(X)$ converge $\mathbf{Q}$-q.c. e in $L^1(\mathbf{Q})$ allo zero per $t \to \infty$.

# Bibliografia


[Art99] P. Artzner, F. Delbaen, J. Eber, D. Heath. *Coherent measures of risk.* Mathematical Finance, 9(3):203–228, 1999.

[Bjö09] T. Björk. *Arbitrage Theory in Continuous Time.* Oxford Finance Series. Oxford University Press, third edition, 2009.

[Bre86] H. Brezis. *Analisi funzionale. Teoria e applicazioni.* Serie di matematica e fisica. Liguori Editore, 1986.

[Del00] F. Delbaen. *Coherent risk measures.* Cattedra Galileiana, Scuola Normale Superiore di Pisa, 2000.

[Det05] K. Detlefsen, G. Scandolo. *Conditional and dynamic convex risk measures.* Finance and Stochastics (Springer-Verlag), 9(4):539–561, 2005.

[Fla14] F. Flandoli. *Dispense di Istituzioni di Probabilità.* Dispense universitarie, Università degli Studi di Pisa, Dipartimento di Matematica, 2014.

[Föl02] H. Föllmer, A. Schied. *Convex measures of risk and trading constraints.* Finance and Stochastics (Springer-Verlag), 6:429–447, 2002.

[Föl06] H. Föllmer, I. Penner. *Convex risk measures and the dynamics of their penalty functions.* Statistics & Decisions, 2006.

[Föl08] H. Föllmer, A. Schied. *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time*, volume 27 of *De Gruyter Studies in Mathematics.* Walter de Gruyter, second edition, 2008.

[Fra16] C. Frascella. *Statistica Multivariata con R. Un'introduzione pratica.* Manuali. Pisa University Press, 2016.

[Hul14] J. C. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives.* Pearson, ninth edition, 2014.

[Kle14] A. Klenke. *Probability Theory. A Comprehensive Course.* Universitext. Springer-Verlag, second edition, 2014.

[Lam07] D. Lamberton, B. Lapeyre. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman and Hall/CRC Financial Mathematics Series. CRC Press, second edition, 2007.

[Pra12] M. Pratelli. *Un corso di Calcolo delle Probabilità*. Dispense universitarie, Università degli Studi di Pisa, Dipartimento di Matematica, 2012.

[Pra16] M. Pratelli. *Un corso di Finanza Matematica*. Dispense universitarie, Università degli Studi di Pisa, Dipartimento di Matematica, 2016.

[Roc70] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, 1970.

# Indice analitico e dei simboli