Misure convesse di rischio e dinamiche delle loro funzioni di penalità

Teoria assiomatica ed applicazioni

Candidato: Marco Tarsia

Matricola 454761

Relatore: Maurizio Pratelli

Controrelatore: Marco Romito

Università degli Studi di Pisa – Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi di Laurea Magistrale in Finanza Matematica

04/05/2018

Piano della presentazione

I tre capitoli

1. Teoria assiomatica delle misure convesse di rischio

2. Esempi notevoli di misure convesse di rischio

3. Misure convesse condizionali e dinamiche di rischio

Definizione (Scenario e posizioni)

Fissiamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, che chiamiamo scenario, ed un sottospazio lineare $\mathcal{X}$ di $L^0(\mathbf{P}) \equiv L^0((\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}); \mathbb{R})$ le cui variabili aleatorie sono dette posizioni (*finanziarie*).

Definizione (Misura convessa di rischio; rischio di una posizione)

Una misura convessa di rischio ρ su $\mathcal{X}$ è una mappa $\rho \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ tale che, al variare di $X, Y \in \mathcal{X}$, $k \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in]0,1[$, soddisfa:

1. *Monotonia:* $X \geq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$.
2. *Invarianza per traslazioni:* $\rho(X + k) = \rho(X) - k$.
3. *Convessità:* $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$.

Nel caso $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$, ρ è chiamata *misura convessa di rischio*. Per ogni $X \in \mathcal{X}$, $\rho(X)$ è detto rischio secondo ρ di X.

Definizione (Scenario e posizioni)

Fissiamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, che chiamiamo scenario, ed un sottospazio lineare $\mathcal{X}$ di $L^0(\mathbf{P}) \equiv L^0((\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}); \mathbb{R})$ le cui variabili aleatorie sono dette posizioni (*finanziarie*).

Definizione (Misura convessa di rischio; rischio di una posizione)

Una misura convessa di rischio ρ su $\mathcal{X}$ è una mappa $\rho \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ tale che, al variare di $X, Y \in \mathcal{X}$, $k \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in]0,1[$, soddisfa:

1. *Monotonìa*: $X \geq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$.
2. *Invarianza per traslazioni*: $\rho(X + k) = \rho(X) - k$.
3. *Convessità*: $\rho(\lambda X + (1-\lambda) Y) \leq \lambda \rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$.

Nel caso $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$, ρ è chiamata *misura convessa di rischio*.
Per ogni $X \in \mathcal{X}$, $\rho(X)$ è detto rischio secondo ρ di X.

Definizione (Scenario e posizioni)

Fissiamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, che chiamiamo scenario, ed un sottospazio lineare $\mathcal{X}$ di $L^0(\mathbf{P}) \equiv L^0((\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}); \mathbb{R})$ le cui variabili aleatorie sono dette posizioni (*finanziarie*).

Definizione (Misura convessa di rischio; rischio di una posizione)

Una misura convessa di rischio ρ su $\mathcal{X}$ è una mappa $\rho \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ tale che, al variare di $X, Y \in \mathcal{X}$, $k \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in]0,1[$, soddisfa:

1. *Monotonìa*: $X \geq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$.
2. *Invarianza per traslazioni*: $\rho(X + k) = \rho(X) - k$.
3. *Convessità*: $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$.

Nel caso $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$, ρ è chiamata *misura convessa di rischio*.
Per ogni $X \in \mathcal{X}$, $\rho(X)$ è detto rischio secondo ρ di X.

Definizione (Scenario e posizioni)

Fissiamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, che chiamiamo scenario, ed un sottospazio lineare $\mathcal{X}$ di $L^0(\mathbf{P}) \equiv L^0((\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}); \mathbb{R})$ le cui variabili aleatorie sono dette posizioni (*finanziarie*).

Definizione (Misura convessa di rischio; rischio di una posizione)

Una misura convessa di rischio ρ su $\mathcal{X}$ è una mappa $\rho \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ tale che, al variare di $X, Y \in \mathcal{X}$, $k \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in]0,1[$, soddisfa:

1. *Monotonìa*: $X \geq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$.
2. *Invarianza per traslazioni*: $\rho(X + k) = \rho(X) - k$.
3. *Convessità*: $\rho(\lambda X + (1-\lambda) Y) \leq \lambda \rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$.

Nel caso $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$, ρ è chiamata *misura convessa di rischio*.
Per ogni $X \in \mathcal{X}$, $\rho(X)$ è detto rischio secondo ρ di X.

Definizione (Scenario e posizioni)

Fissiamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, che chiamiamo scenario, ed un sottospazio lineare $\mathcal{X}$ di $L^0(\mathbf{P}) \equiv L^0((\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}); \mathbb{R})$ le cui variabili aleatorie sono dette posizioni (*finanziarie*).

Definizione (Misura convessa di rischio; rischio di una posizione)

Una misura convessa di rischio ρ su $\mathcal{X}$ è una mappa $\rho \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ tale che, al variare di $X, Y \in \mathcal{X}$, $k \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in]0,1[$, soddisfa:

1. *Monotonìa*: $X \geq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$.
2. *Invarianza per traslazioni*: $\rho(X + k) = \rho(X) - k$.
3. *Convessità*: $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$.

Nel caso $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$, ρ è chiamata *misura convessa di rischio*.
Per ogni $X \in \mathcal{X}$, $\rho(X)$ è detto rischio secondo ρ di X.

Misure convesse di rischio

Marco Tarsia

Teoria assiomatica delle misure convesse di rischio

Esempi notevoli di misure convesse di rischio

Misure convesse condizionali e dinamiche di rischio

Definizione (Scenario e posizioni)

Fissiamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, che chiamiamo scenario, ed un sottospazio lineare $\mathcal{X}$ di $L^0(\mathbf{P}) \equiv L^0((\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}); \mathbb{R})$ le cui variabili aleatorie sono dette posizioni (*finanziarie*).

Definizione (Misura convessa di rischio; rischio di una posizione)

Una misura convessa di rischio ρ su $\mathcal{X}$ è una mappa $\rho\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ tale che, al variare di $X, Y \in \mathcal{X}$, $k \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in]0,1[$, soddisfa:

1. *Monotonìa*: $X \geq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$.
2. *Invarianza per traslazioni*: $\rho(X + k) = \rho(X) - k$.
3. *Convessità*: $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$.

Nel caso $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$, ρ è chiamata *misura convessa di rischio*.

Per ogni $X \in \mathcal{X}$, $\rho(X)$ è detto rischio secondo ρ di X.

Misure convesse di rischio
Marco Tarsia
Teoria assiomatica delle misure convesse di rischio
Esempi notevoli di misure convesse di rischio
Misure convesse condizionali e dinamiche di rischio

Definizione (Scenario e posizioni)

Fissiamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, che chiamiamo scenario, ed un sottospazio lineare $\mathcal{X}$ di $L^0(\mathbf{P}) \equiv L^0((\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}); \mathbb{R})$ le cui variabili aleatorie sono dette posizioni (*finanziarie*).

Definizione (Misura convessa di rischio; rischio di una posizione)

Una misura convessa di rischio ρ su $\mathcal{X}$ è una mappa $\rho \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ tale che, al variare di $X, Y \in \mathcal{X}$, $k \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in]0,1[$, soddisfa:

1. *Monotonìa*: $X \geq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$.
2. *Invarianza per traslazioni*: $\rho(X + k) = \rho(X) - k$.
3. *Convessità*: $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$.

Nel caso $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$, ρ è chiamata *misura convessa di rischio*. Per ogni $X \in \mathcal{X}$, $\rho(X)$ è detto rischio secondo ρ di X.

Definizione (Misura convessa normalizzata di rischio)

Ogni misura convessa ρ su $\mathcal{X}$ con $\rho(0) = 0$ è detta normalizzata.

Definizione (Misura coerente di rischio)

Una misura coerente di rischio $\rho^\star$ su $\mathcal{X}$ è una misura convessa di rischio $\rho^\star$ su $\mathcal{X}$ tale che, al variare di $X, Y \in \mathcal{X}$ e $\lambda > 0$, verifica:

1. *Positiva omogeneità:* $\rho^\star(\lambda X) = \lambda \rho^\star(X)$.
2. *Subadditività:* $\rho^\star(X+Y) \leq \rho^\star(X) + \rho^\star(Y)$.

Nel caso $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$, $\rho^\star$ è chiamata *misura coerente di rischio*.

Fissiamo per il seguito una misura convessa di rischio ρ su $\mathcal{X}$.

Definizione (Misura convessa normalizzata di rischio)

Ogni misura convessa ρ su $\mathcal{X}$ con $\rho(0) = 0$ è detta normalizzata.

Definizione (Misura coerente di rischio)

Una misura coerente di rischio $\rho^\star$ su $\mathcal{X}$ è una misura convessa di rischio $\rho^\star$ su $\mathcal{X}$ tale che, al variare di $X, Y \in \mathcal{X}$ e $\lambda > 0$, verifica:

1. *Positiva omogeneità*: $\rho^\star(\lambda X) = \lambda \rho^\star(X)$.
2. *Subadditività*: $\rho^\star(X + Y) \leq \rho^\star(X) + \rho^\star(Y)$.

Nel caso $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$, $\rho^\star$ è chiamata *misura coerente di rischio*.

Fissiamo per il seguito una misura convessa di rischio ρ su $\mathcal{X}$.

Definizione (Misura convessa normalizzata di rischio)

Ogni misura convessa ρ su $\mathcal{X}$ con $\rho(0) = 0$ è detta normalizzata.

Definizione (Misura coerente di rischio)

Una misura coerente di rischio $\rho^\star$ su $\mathcal{X}$ è una misura convessa di rischio $\rho^\star$ su $\mathcal{X}$ tale che, al variare di $X, Y \in \mathcal{X}$ e $\lambda > 0$, verifica:

1. *Positiva omogeneità*: $\rho^\star(\lambda X) = \lambda \rho^\star(X)$.
2. *Subadditività*: $\rho^\star(X + Y) \leq \rho^\star(X) + \rho^\star(Y)$.

Nel caso $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$, $\rho^\star$ è chiamata *misura coerente di rischio*.

Fissiamo per il seguito una misura convessa di rischio ρ su $\mathcal{X}$.

Definizione (Misura convessa normalizzata di rischio)

Ogni misura convessa ρ su $\mathcal{X}$ con $\rho(0) = 0$ è detta normalizzata.

Definizione (Misura coerente di rischio)

Una misura coerente di rischio $\rho^\star$ su $\mathcal{X}$ è una misura convessa di rischio $\rho^\star$ su $\mathcal{X}$ tale che, al variare di $X, Y \in \mathcal{X}$ e $\lambda > 0$, verifica:

1. *Positiva omogeneità*: $\rho^\star(\lambda X) = \lambda \rho^\star(X)$.
2. *Subadditività*: $\rho^\star(X + Y) \leq \rho^\star(X) + \rho^\star(Y)$.

Nel caso $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$, $\rho^\star$ è chiamata *misura coerente di rischio*.

Fissiamo per il seguito una misura convessa di rischio ρ su $\mathcal{X}$.

Definizione (Misura convessa normalizzata di rischio)

Ogni misura convessa ρ su $\mathcal{X}$ con $\rho(0) = 0$ è detta normalizzata.

Definizione (Misura coerente di rischio)

Una misura coerente di rischio $\rho^\star$ su $\mathcal{X}$ è una misura convessa di rischio $\rho^\star$ su $\mathcal{X}$ tale che, al variare di $X, Y \in \mathcal{X}$ e $\lambda > 0$, verifica:

1. *Positiva omogeneità*: $\rho^\star(\lambda X) = \lambda \rho^\star(X)$.
2. *Subadditività*: $\rho^\star(X + Y) \leq \rho^\star(X) + \rho^\star(Y)$.

Nel caso $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$, $\rho^\star$ è chiamata *misura coerente di rischio*.

Fissiamo per il seguito una misura convessa di rischio ρ su $\mathcal{X}$.

Definizione (Misura convessa normalizzata di rischio)

Ogni misura convessa ρ su $\mathcal{X}$ con $\rho(0) = 0$ è detta normalizzata.

Definizione (Misura coerente di rischio)

Una misura coerente di rischio $\rho^\star$ su $\mathcal{X}$ è una misura convessa di rischio $\rho^\star$ su $\mathcal{X}$ tale che, al variare di $X, Y \in \mathcal{X}$ e $\lambda > 0$, verifica:

1. *Positiva omogeneità*: $\rho^\star(\lambda X) = \lambda \rho^\star(X)$.
2. *Subadditività*: $\rho^\star(X + Y) \leq \rho^\star(X) + \rho^\star(Y)$.

Nel caso $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$, $\rho^\star$ è chiamata *misura coerente di rischio*.

Fissiamo per il seguito una misura convessa di rischio ρ su $\mathcal{X}$.

Definizione (Posizione accettabile; insieme di accettazione)

Una posizione $X \in \mathcal{X}$ è detta accettabile *secondo* ρ se $\rho(X) \leq 0$. L'insieme di accettazione $\mathcal{A}_\rho$ *secondo* ρ è il sottoinsieme di $\mathcal{X}$ costituito dalle posizioni accettabili secondo ρ:

$$\mathcal{A}_\rho \stackrel{def}{=} \{ X \in \mathcal{X} \mid \rho(X) \leq 0 \} .$$

Proposizione

$\mathcal{A}_\rho$ è un insieme non vuoto e convesso che caratterizza ρ:

$$\rho(X) = \inf \{ m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A}_\rho \}, \quad X \in \mathcal{X}.$$

Nota: se $\rho \equiv \rho^\star$ è coerente, allora $\mathcal{A}_{\rho^\star}$ è un cono tale che

$$L^0_+(\mathbf{P}) \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}_{\rho^\star} .$$

Definizione (Posizione accettabile; insieme di accettazione)

Una posizione $X \in \mathcal{X}$ è detta accettabile *secondo* ρ se $\rho(X) \leq 0$. L'insieme di accettazione $\mathcal{A}_\rho$ *secondo* ρ è il sottoinsieme di $\mathcal{X}$ costituito dalle posizioni accettabili secondo ρ:

$$\mathcal{A}_\rho \overset{def}{=} \{ X \in \mathcal{X} \mid \rho(X) \leq 0 \} .$$

Proposizione

$\mathcal{A}_\rho$ è un insieme non vuoto e convesso che caratterizza ρ:

$$\rho(X) = \inf \{ m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A}_\rho \} , \quad X \in \mathcal{X} .$$

Nota: se $\rho \equiv \rho^\star$ è coerente, allora $\mathcal{A}_{\rho^\star}$ è un cono tale che

$$L^0_+(\mathbf{P}) \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}_{\rho^\star} .$$

Definizione (Posizione accettabile; insieme di accettazione)

Una posizione $X \in \mathcal{X}$ è detta accettabile *secondo* ρ se $\rho(X) \leq 0$. L'insieme di accettazione $\mathcal{A}_\rho$ *secondo* ρ è il sottoinsieme di $\mathcal{X}$ costituito dalle posizioni accettabili secondo ρ:

$$\mathcal{A}_\rho \overset{def}{=} \{\, X \in \mathcal{X} \mid \rho(X) \leq 0 \,\}\,.$$

Proposizione

$\mathcal{A}_\rho$ è un insieme non vuoto e convesso che caratterizza ρ:

$$\rho(X) = \inf \{\, m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A}_\rho \,\}\,, \quad X \in \mathcal{X}\,.$$

Nota: se $\rho \equiv \rho^\star$ è coerente, allora $\mathcal{A}_{\rho^\star}$ è un cono tale che

$$L^0_+(\mathbf{P}) \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}_{\rho^\star}\,.$$

Definizione (Posizione accettabile; insieme di accettazione)

Una posizione $X \in \mathcal{X}$ è detta accettabile *secondo* ρ se $\rho(X) \leq 0$. L'insieme di accettazione $\mathcal{A}_\rho$ *secondo* ρ è il sottoinsieme di $\mathcal{X}$ costituito dalle posizioni accettabili secondo ρ:

$$\mathcal{A}_\rho \stackrel{def}{=} \{ X \in \mathcal{X} \mid \rho(X) \leq 0 \} .$$

Proposizione

$\mathcal{A}_\rho$ è un insieme non vuoto e convesso che caratterizza ρ:

$$\rho(X) = \inf \{ m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A}_\rho \} , \quad X \in \mathcal{X} .$$

Nota: se $\rho \equiv \rho^\star$ è coerente, allora $\mathcal{A}_{\rho^\star}$ è un cono tale che

$$L^0_+(\mathbf{P}) \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}_{\rho^\star} .$$

Osservazione: se $X_n \downarrow X := \inf_n X_n$ in senso $\mathbf{P}$-q.c. e con $X \in \mathcal{X}$, allora $(\rho(X_n))_n$ è non decrescente e $\sup_n \rho(X_n) \leq \rho(X)$.

Definizione (Proprietà di Fatou)

ρ possiede la proprietà di Fatou se, nel caso che $X_n \downarrow X := \inf_n X_n$ in senso $\mathbf{P}$-q.c. e con $X \in \mathcal{X}$, vale $\rho(X) \leq \sup_n \rho(X_n)$.

Proposizione

Per $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$, ρ possiede la proprietà di Fatou se e solo se:

1. *$(X_n)_n$ limitata e non crescente $\Rightarrow \rho(\inf_n X_n) \leq \sup_n \rho(X_n)$;*
2. *$X_n \to X \in L^\infty(\mathbf{P})$ in senso $\mathbf{P}$-q.c. $\Rightarrow \rho(X) \leq \liminf_n \rho(X_n)$;*
3. *$X_n \in \mathcal{A}_\rho$ e $X_n \to X \in L^\infty(\mathbf{P})$ in senso $\mathbf{P}$-q.c. $\Rightarrow X \in \mathcal{A}_\rho$.*

Osservazione: se $X_n \downarrow X := \inf_n X_n$ in senso $\mathbf{P}$-q.c. e con $X \in \mathcal{X}$, allora $(\rho(X_n))_n$ è non decrescente e $\sup_n \rho(X_n) \leq \rho(X)$.

Definizione (Proprietà di Fatou)

ρ possiede la proprietà di Fatou se, nel caso che $X_n \downarrow X := \inf_n X_n$ in senso $\mathbf{P}$-q.c. e con $X \in \mathcal{X}$, vale $\rho(X) \leq \sup_n \rho(X_n)$.

Proposizione

Per $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$, ρ possiede la proprietà di Fatou se e solo se:

1. *$(X_n)_n$ limitata e non crescente $\Rightarrow \rho(\inf_n X_n) \leq \sup_n \rho(X_n)$.*
2. *$X_n \to X \in L^\infty(\mathbf{P})$ in senso $\mathbf{P}$-q.c. $\Rightarrow \rho(X) \leq \liminf_n \rho(X_n)$.*
3. *$X_n \in \mathcal{A}_\rho$ e $X_n \to X \in L^\infty(\mathbf{P})$ in senso $\mathbf{P}$-q.c. $\Rightarrow X \in \mathcal{A}_\rho$.*

Osservazione: se $X_n \downarrow X := \inf_n X_n$ in senso $\mathbf{P}$-q.c. e con $X \in \mathcal{X}$, allora $(\rho(X_n))_n$ è non decrescente e $\sup_n \rho(X_n) \leq \rho(X)$.

Definizione (Proprietà di Fatou)

ρ possiede la proprietà di Fatou se, nel caso che $X_n \downarrow X := \inf_n X_n$ in senso $\mathbf{P}$-q.c. e con $X \in \mathcal{X}$, vale $\rho(X) \leq \sup_n \rho(X_n)$.

Proposizione

Per $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$, ρ possiede la proprietà di Fatou se e solo se:

1. $(X_n)_n$ *limitata e non crescente* $\Rightarrow \rho(\inf_n X_n) \leq \sup_n \rho(X_n)$.
2. $X_n \to X \in L^\infty(\mathbf{P})$ *in senso* $\mathbf{P}$*-q.c.* $\Rightarrow \rho(X) \leq \liminf_n \rho(X_n)$.
3. $X_n \in \mathcal{A}_\rho$ *e* $X_n \to X \in L^\infty(\mathbf{P})$ *in senso* $\mathbf{P}$*-q.c.* $\Rightarrow X \in \mathcal{A}_\rho$.

Osservazione: se $X_n \downarrow X := \inf_n X_n$ in senso $\mathbf{P}$-q.c. e con $X \in \mathcal{X}$, allora $(\rho(X_n))_n$ è non decrescente e $\sup_n \rho(X_n) \leq \rho(X)$.

Definizione (Proprietà di Fatou)

ρ possiede la proprietà di Fatou se, nel caso che $X_n \downarrow X := \inf_n X_n$ in senso $\mathbf{P}$-q.c. e con $X \in \mathcal{X}$, vale $\rho(X) \leq \sup_n \rho(X_n)$.

Proposizione

Per $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$, ρ possiede la proprietà di Fatou se e solo se:

1. $(X_n)_n$ *limitata e non crescente* $\Rightarrow \rho(\inf_n X_n) \leq \sup_n \rho(X_n)$.
2. $X_n \to X \in L^\infty(\mathbf{P})$ *in senso* $\mathbf{P}$*-q.c.* $\Rightarrow \rho(X) \leq \liminf_n \rho(X_n)$.
3. $X_n \in \mathcal{A}_\rho$ *e* $X_n \to X \in L^\infty(\mathbf{P})$ *in senso* $\mathbf{P}$*-q.c.* $\Rightarrow X \in \mathcal{A}_\rho$.

Osservazione: se $X_n \downarrow X := \inf_n X_n$ in senso $\mathbf{P}$-q.c. e con $X \in \mathcal{X}$, allora $(\rho(X_n))_n$ è non decrescente e $\sup_n \rho(X_n) \leq \rho(X)$.

Definizione (Proprietà di Fatou)

ρ possiede la proprietà di Fatou se, nel caso che $X_n \downarrow X := \inf_n X_n$ in senso $\mathbf{P}$-q.c. e con $X \in \mathcal{X}$, vale $\rho(X) \leq \sup_n \rho(X_n)$.

Proposizione

Per $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$, ρ possiede la proprietà di Fatou se e solo se:

1. $(X_n)_n$ *limitata e non crescente* $\Rightarrow \rho(\inf_n X_n) \leq \sup_n \rho(X_n)$.
2. $X_n \to X \in L^\infty(\mathbf{P})$ *in senso* $\mathbf{P}$*-q.c.* $\Rightarrow \rho(X) \leq \liminf_n \rho(X_n)$.
3. $X_n \in \mathcal{A}_\rho$ *e* $X_n \to X \in L^\infty(\mathbf{P})$ *in senso* $\mathbf{P}$*-q.c.* $\Rightarrow X \in \mathcal{A}_\rho$.

Denotiamo $\mathcal{P} \overset{def}{=} \{\, \mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \,\} \cong \{\, Z \in L^1_+(\mathbf{P}) \mid \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[Z] = 1 \,\}$.

Definizione (Funzione di penalità)

Una **funzione di penalità** è una mappa $\alpha \colon \mathcal{P} \to \left]-\infty, +\infty\right]$ con

$$\inf_{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}} \alpha(\mathbf{Q}) \in \mathbb{R}.$$

Osservazione: data una funzione di penalità α, la mappa

$$\rho_\alpha(X) \doteq \sup_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \alpha(\mathbf{Q}) < +\infty}} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha(\mathbf{Q}) \right\}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}),$$

è una misura convessa di rischio che verifica la proprietà di Fatou.

Denotiamo $\mathcal{P} \overset{def}{=} \{\, \mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \,\} \cong \{\, Z \in L^1_+(\mathbf{P}) \mid \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[Z] = 1 \,\}$.

Definizione (Funzione di penalità)

Una funzione di penalità è una mappa $\alpha \colon \mathcal{P} \to\,]-\infty, +\infty]$ con

$$\inf_{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}} \alpha(\mathbf{Q}) \in \mathbb{R}.$$

Osservazione: data una funzione di penalità α, la mappa

$$\rho_\alpha(X) \doteq \sup_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \alpha(\mathbf{Q}) < +\infty}} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha(\mathbf{Q}) \right\}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}),$$

è una misura convessa di rischio che verifica la proprietà di Fatou.

Denotiamo $\mathcal{P} \overset{def}{=} \{ \mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \} \cong \{ Z \in L^1_+(\mathbf{P}) \mid \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[Z] = 1 \}$.

Definizione (Funzione di penalità)

Una funzione di penalità è una mappa $\alpha \colon \mathcal{P} \to]-\infty, +\infty]$ con

$$\inf_{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}} \alpha(\mathbf{Q}) \in \mathbb{R}.$$

Osservazione: data una funzione di penalità α, la mappa

$$\rho_\alpha(X) \doteq \sup_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \alpha(\mathbf{Q}) < +\infty}} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha(\mathbf{Q}) \right\}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}),$$

è una misura convessa di rischio che verifica la proprietà di Fatou.

Assumiamo per tutto il seguito che $\mathcal{X} = L^{\infty}(\mathbf{P})$.

Lemma

Se $\mathcal{A}_\rho$ è chiuso nella topologia debole-star $\sigma(L^{\infty}(\mathbf{P}), L^{1}(\mathbf{P}))$, allora è di penalità la funzione definita ponendo, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$,

$$\alpha_\rho(\mathbf{Q}) \overset{def}{=} \sup_{Y \in \mathcal{A}_\rho} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y] \equiv \sup_{X \in L^{\infty}(\mathbf{P})} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \rho(X) \right\}.$$

Inoltre, $\mathcal{A}_\rho = \bigcap_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \alpha_\rho(\mathbf{Q}) < +\infty}} \left\{ X \in L^{\infty}(\mathbf{P}) \,\middle|\, \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha_\rho(\mathbf{Q}) \leq 0 \right\}.$

Nota: se $\rho \equiv \rho^{\star}$ è coerente, allora $\alpha_{\rho^{\star}}$ è a valori in $\{0, +\infty\}$.

Assumiamo per tutto il seguito che $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$.

Lemma

Se $\mathcal{A}_\rho$ è chiuso nella topologia debole-star $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$, allora è di penalità la funzione definita ponendo, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$,

$$\alpha_\rho(\mathbf{Q}) \overset{def}{=} \sup_{Y \in \mathcal{A}_\rho} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y] \equiv \sup_{X \in L^\infty(\mathbf{P})} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \rho(X) \right\}.$$

Inoltre, $\mathcal{A}_\rho = \bigcap_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \alpha_\rho(\mathbf{Q}) < +\infty}} \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \,\middle|\, \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha_\rho(\mathbf{Q}) \leq 0 \right\}.$

Nota: se $\rho \equiv \rho^\star$ è coerente, allora $\alpha_{\rho^\star}$ è a valori in $\{0, +\infty\}$.

Assumiamo per tutto il seguito che $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$.

Lemma

Se $\mathcal{A}_\rho$ è chiuso nella topologia debole-star $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$, allora è di penalità la funzione definita ponendo, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$,

$$\alpha_\rho(\mathbf{Q}) \overset{def}{=} \sup_{Y \in \mathcal{A}_\rho} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y] \equiv \sup_{X \in L^\infty(\mathbf{P})} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \rho(X) \right\}.$$

Inoltre, $\mathcal{A}_\rho = \displaystyle\bigcap_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \alpha_\rho(\mathbf{Q}) < +\infty}} \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \,\middle|\, \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha_\rho(\mathbf{Q}) \le 0 \right\}.$

Nota: se $\rho \equiv \rho^\star$ è coerente, allora $\alpha_{\rho^\star}$ è a valori in $\{0, +\infty\}$.

Assumiamo per tutto il seguito che $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbf{P})$.

Lemma

Se $\mathcal{A}_\rho$ è chiuso nella topologia debole-star $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$, allora è di penalità la funzione definita ponendo, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$,

$$\alpha_\rho(\mathbf{Q}) \overset{def}{=} \sup_{Y \in \mathcal{A}_\rho} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y] \equiv \sup_{X \in L^\infty(\mathbf{P})} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \rho(X) \right\}.$$

Inoltre, $\mathcal{A}_\rho = \displaystyle\bigcap_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \alpha_\rho(\mathbf{Q}) < +\infty}} \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \,\middle|\, \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha_\rho(\mathbf{Q}) \leq 0 \right\}.$

Nota: se $\rho \equiv \rho^\star$ è coerente, allora $\alpha_{\rho^\star}$ è a valori in $\{0, +\infty\}$.

Teorema (di rappresentazione delle misure convesse di rischio)

Supponiamo che $L^1(\mathbf{P})$ sia separabile. Allora sono equivalenti:

1. *ρ possiede la proprietà di Fatou.*
2. *$\mathcal{A}_\rho$ è $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$-chiuso.*
3. *Esiste una funzione di penalità α tale che*

$$\rho(X) = \sup_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \alpha(\mathbf{Q}) < +\infty}} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha(\mathbf{Q}) \right\}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}).$$

In ciascun caso, α_ρ è la minima tra le funzioni di penalità α per mezzo delle quali valga una tale formula: $\alpha_\rho^{\min} := \alpha_\rho \leq \alpha$.

Teorema (di rappresentazione delle misure convesse di rischio)

Supponiamo che $L^1(\mathbf{P})$ sia separabile. Allora sono equivalenti:

1. *ρ possiede la proprietà di Fatou.*
2. *$\mathcal{A}_\rho$ è $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$-chiuso.*
3. *Esiste una funzione di penalità α tale che*

$$\rho(X) = \sup_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \alpha(\mathbf{Q}) < +\infty}} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha(\mathbf{Q}) \right\}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}).$$

In ciascun caso, α_ρ è la minima tra le funzioni di penalità α per mezzo delle quali valga una tale formula: $\alpha_\rho^{\min} := \alpha_\rho \leq \alpha$.

Teorema (di rappresentazione delle misure convesse di rischio)

Supponiamo che $L^1(\mathbf{P})$ sia separabile. Allora sono equivalenti:

1. *ρ possiede la proprietà di Fatou.*
2. *$\mathcal{A}_\rho$ è $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$-chiuso.*
3. *Esiste una funzione di penalità α tale che*

$$\rho(X) = \sup_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \alpha(\mathbf{Q}) < +\infty}} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha(\mathbf{Q}) \right\}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}).$$

In ciascun caso, α_ρ è la minima tra le funzioni di penalità α per mezzo delle quali valga una tale formula: $\alpha_\rho^{\min} := \alpha_\rho \leq \alpha$.

Teorema (di rappresentazione delle misure convesse di rischio)

Supponiamo che $L^1(\mathbf{P})$ sia separabile. Allora sono equivalenti:

1. *ρ possiede la proprietà di Fatou.*
2. *$\mathcal{A}_\rho$ è $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$-chiuso.*
3. *Esiste una funzione di penalità α tale che*

$$\rho(X) = \sup_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \alpha(\mathbf{Q}) < +\infty}} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha(\mathbf{Q}) \right\}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}).$$

In ciascun caso, α_ρ è la minima tra le funzioni di penalità α per mezzo delle quali valga una tale formula: $\alpha_\rho^{\min} := \alpha_\rho \leq \alpha$.

Teorema (di rappresentazione delle misure convesse di rischio)

Supponiamo che $L^1(\mathbf{P})$ sia separabile. Allora sono equivalenti:

1. *ρ possiede la proprietà di Fatou.*
2. *$\mathcal{A}_\rho$ è $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$-chiuso.*
3. *Esiste una funzione di penalità α tale che*

$$\rho(X) = \sup_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \alpha(\mathbf{Q}) < +\infty}} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha(\mathbf{Q}) \right\}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}).$$

In ciascun caso, α_ρ è la minima tra le funzioni di penalità α per mezzo delle quali valga una tale formula: $\alpha_\rho^{\min} := \alpha_\rho \leq \alpha$.

Corollario (rappresentazione delle misure *coerenti* di rischio)

Se $L^1(\mathbf{P})$ è separabile e se $\rho \equiv \rho^\star$ è coerente, allora $\rho^\star$ possiede la proprietà di Fatou se e solo se esiste un $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ tale che

$$\rho^\star(X) = \sup_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \in \mathcal{Q}}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X], \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}).$$

Domanda: cosa possiamo dire se $\mathcal{X} \neq L^\infty(\mathbf{P})$ e $\mathcal{X} \not\subseteq L^\infty(\mathbf{P})$?

Teorema

Supponiamo che lo scenario $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sia non atomico. Allora non esiste una misura coerente di rischio su tutto $\mathcal{X} = L^0(\mathbf{P})$.

Corollario (rappresentazione delle misure *coerenti* di rischio)

Se $L^1(\mathbf{P})$ è separabile e se $\rho \equiv \rho^\star$ è coerente, allora $\rho^\star$ possiede la proprietà di Fatou se e solo se esiste un $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ tale che

$$\rho^\star(X) = \sup_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \in \mathcal{Q}}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X], \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}).$$

Domanda: cosa possiamo dire se $\mathcal{X} \neq L^\infty(\mathbf{P})$ e $\mathcal{X} \not\subseteq L^\infty(\mathbf{P})$?

Teorema

Supponiamo che lo scenario $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sia non atomico. Allora non esiste una misura coerente di rischio su tutto $\mathcal{X} = L^0(\mathbf{P})$.

Corollario (rappresentazione delle misure *coerenti* di rischio)

Se $L^1(\mathbf{P})$ è separabile e se $\rho \equiv \rho^\star$ è coerente, allora $\rho^\star$ possiede la proprietà di Fatou se e solo se esiste un $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ tale che

$$\rho^\star(X) = \sup_{\substack{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \in \mathcal{Q}}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X], \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}).$$

Domanda: cosa possiamo dire se $\mathcal{X} \neq L^\infty(\mathbf{P})$ e $\mathcal{X} \nsubseteq L^\infty(\mathbf{P})$?

Teorema

Supponiamo che lo scenario $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sia non atomico. Allora non esiste una misura coerente di rischio su tutto $\mathcal{X} = L^0(\mathbf{P})$.

Proposizione

Sia $\mathcal{A}$ un sottoinsieme non vuoto e convesso di $L^\infty(\mathbf{P})$ tale che:

1. $\forall\, X \in \mathcal{A}$ e $\forall\, Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, $Y \geq X \Rightarrow Y \in \mathcal{A}$.
2. $\inf \{ m \in \mathbb{R} \mid m \in \mathcal{A} \} > -\infty$.

Allora la mappa $\rho_{\mathcal{A}} \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to [-\infty, +\infty]$ data da

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) \overset{def}{=} \inf \{ m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A} \}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}),$$

$(\inf \emptyset \equiv +\infty)$ *è una misura convessa di rischio con $\mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}} \supseteq \mathcal{A}$. Inoltre, se $\mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}}$ è $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$-chiuso, allora*

$$\alpha_{\rho_{\mathcal{A}}}(\mathbf{Q}) = \sup_{X \in \mathcal{A}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X], \quad \mathbf{Q} \in \mathcal{P}.$$

Proposizione

Sia $\mathcal{A}$ un sottoinsieme non vuoto e convesso di $L^\infty(\mathbf{P})$ tale che:

1. $\forall\, X \in \mathcal{A}$ e $\forall\, Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, $Y \geq X \Rightarrow Y \in \mathcal{A}$.
2. $\inf \{\, m \in \mathbb{R} \mid m \in \mathcal{A} \,\} > -\infty$.

Allora la mappa $\rho_\mathcal{A} \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to [-\infty, +\infty]$ data da

$$\rho_\mathcal{A}(X) \stackrel{def}{=} \inf \{\, m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A} \,\}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}),$$

($\inf \emptyset \equiv +\infty$) *è una misura convessa di rischio con $\mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$. Inoltre, se $\mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}}$ è $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$-chiuso, allora*

$$\alpha_{\rho_\mathcal{A}}(\mathbf{Q}) = \sup_{X \in \mathcal{A}} \mathbf{E}^\mathbf{Q}[-X], \quad \mathbf{Q} \in \mathcal{P}.$$

Proposizione

Sia $\mathcal{A}$ un sottoinsieme non vuoto e convesso di $L^\infty(\mathbf{P})$ tale che:

1. $\forall\, X \in \mathcal{A}$ e $\forall\, Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, $Y \geq X \Rightarrow Y \in \mathcal{A}$.
2. $\inf \{\, m \in \mathbb{R} \mid m \in \mathcal{A} \,\} > -\infty$.

Allora la mappa $\rho_\mathcal{A} \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to [-\infty, +\infty]$ data da

$$\rho_\mathcal{A}(X) \overset{def}{=} \inf \{\, m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A} \,\}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}),$$

$(\inf \emptyset \equiv +\infty)$ *è una misura convessa di rischio con $\mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$. Inoltre, se $\mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}}$ è $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$-chiuso, allora*

$$\alpha_{\rho_\mathcal{A}}(\mathbf{Q}) = \sup_{X \in \mathcal{A}} \mathbf{E}^\mathbf{Q}[-X], \quad \mathbf{Q} \in \mathcal{P}.$$

Proposizione

Sia $\mathcal{A}$ un sottoinsieme non vuoto e convesso di $L^\infty(\mathbf{P})$ tale che:

1. $\forall X \in \mathcal{A}$ e $\forall Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, $Y \geq X \Rightarrow Y \in \mathcal{A}$.
2. $\inf \{ m \in \mathbb{R} \mid m \in \mathcal{A} \} > -\infty$.

Allora la mappa $\rho_\mathcal{A} \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to [-\infty, +\infty]$ data da

$$\rho_\mathcal{A}(X) \overset{def}{=} \inf \{ m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A} \}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}),$$

$(\inf \emptyset \equiv +\infty)$ *è una misura convessa di rischio con $\mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$.*
Inoltre, se $\mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}}$ è $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$-chiuso, allora

$$\alpha_{\rho_\mathcal{A}}(\mathbf{Q}) = \sup_{X \in \mathcal{A}} \mathbf{E}^\mathbf{Q}[-X], \quad \mathbf{Q} \in \mathcal{P}.$$

Proposizione

Sia $\mathcal{A}$ un sottoinsieme non vuoto e convesso di $L^\infty(\mathbf{P})$ tale che:

1. $\forall\, X \in \mathcal{A}$ e $\forall\, Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, $Y \geq X \Rightarrow Y \in \mathcal{A}$.
2. $\inf \{\, m \in \mathbb{R} \mid m \in \mathcal{A} \,\} > -\infty$.

Allora la mappa $\rho_{\mathcal{A}} \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to [-\infty, +\infty]$ data da

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) \stackrel{def}{=} \inf \{\, m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A} \,\}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}),$$

$(\inf \emptyset \equiv +\infty)$ *è una misura convessa di rischio con $\mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}} \supseteq \mathcal{A}$. Inoltre, se $\mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}}$ è $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$-chiuso, allora*

$$\alpha_{\rho_{\mathcal{A}}}(\mathbf{Q}) = \sup_{X \in \mathcal{A}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X], \quad \mathbf{Q} \in \mathcal{P}.$$

Misure di rischio definite da funzioni di perdita

Trasformata di Fenchel-Legendre e formula di rappresentazione

Definizione (Funzione di perdita)

Chiamiamo funzione di perdita ogni mappa $\ell\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia non identicamente costante, non decrescente e convessa su $\mathbb{R}$.

Fissiamo una funzione ℓ di perdita, un $a \in \operatorname{int} \ell(\mathbb{R})$ e *definiamo*

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}^{\mathbf{P}}_{\ell,a} \doteq \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \;\middle|\; \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[\ell(-X)] \le a \right\}.$$

Allora la mappa $\rho \equiv \rho_{\mathcal{A}}$ è una misura convessa di rischio tale che $\mathcal{A}_\rho = \mathcal{A}$ e la quale possiede la proprietà di Fatou.
Supponiamo dunque che $L^1(\mathbf{P})$ sia separabile e consideriamo la *trasformata di Fenchel-Legendre* $\ell^*\colon \mathbb{R} \to]-\infty, +\infty]$ di ℓ, ossia

$$\ell^*(z) \doteq \sup_{y\in\mathbb{R}} \{zy - \ell(y)\}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Definizione (Funzione di perdita)

Chiamiamo funzione di perdita ogni mappa $\ell\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia non identicamente costante, non decrescente e convessa su $\mathbb{R}$.

Fissiamo una funzione ℓ di perdita, un $a \in \operatorname{int} \ell(\mathbb{R})$ e *definiamo*

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}^{\mathbf{P}}_{\ell,a} \doteq \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \,\middle|\, \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[\ell(-X)\right] \le a \right\}.$$

Allora la mappa $\rho \equiv \rho_{\mathcal{A}}$ è una misura convessa di rischio tale che $\mathcal{A}_\rho = \mathcal{A}$ e la quale possiede la proprietà di Fatou.
Supponiamo dunque che $L^1(\mathbf{P})$ sia separabile e consideriamo la *trasformata di Fenchel-Legendre* $\ell^*\colon \mathbb{R} \to]-\infty, +\infty]$ di ℓ, ossia

$$\ell^*(z) \equiv \sup_{y\in\mathbb{R}} \left\{ zy - \ell(y) \right\}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Definizione (Funzione di perdita)

Chiamiamo funzione di perdita ogni mappa $\ell \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia non identicamente costante, non decrescente e convessa su $\mathbb{R}$.

Fissiamo una funzione ℓ di perdita, un $a \in \operatorname{int} \ell(\mathbb{R})$ e *definiamo*

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}^{\mathbf{P}}_{\ell,a} \doteq \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \,\middle|\, \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[\ell(-X)\right] \leq a \right\}.$$

Allora la mappa $\rho \equiv \rho_{\mathcal{A}}$ è una misura convessa di rischio tale che $\mathcal{A}_\rho = \mathcal{A}$ e la quale possiede la proprietà di Fatou.

Supponiamo dunque che $L^1(\mathbf{P})$ sia separabile e consideriamo la *trasformata di Fenchel-Legendre* $\ell^* \colon \mathbb{R} \to \left]-\infty, +\infty\right]$ di ℓ, ossia

$$\ell^*(z) \equiv \sup_{y \in \mathbb{R}} \left\{ zy - \ell(y) \right\}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Definizione (Funzione di perdita)

Chiamiamo funzione di perdita ogni mappa $\ell \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia non identicamente costante, non decrescente e convessa su $\mathbb{R}$.

Fissiamo una funzione ℓ di perdita, un $a \in \operatorname{int} \ell(\mathbb{R})$ e *definiamo*

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}^{\mathbf{P}}_{\ell,a} \doteq \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \;\middle|\; \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[\ell(-X)\right] \leq a \right\}.$$

Allora la mappa $\rho \equiv \rho_{\mathcal{A}}$ è una misura convessa di rischio tale che $\mathcal{A}_\rho = \mathcal{A}$ e la quale possiede la proprietà di Fatou.
Supponiamo dunque che $L^1(\mathbf{P})$ sia separabile e consideriamo la *trasformata di Fenchel-Legendre* $\ell^* \colon \mathbb{R} \to \left]-\infty, +\infty\right]$ di ℓ, ossia

$$\ell^*(z) \equiv \sup_{y \in \mathbb{R}} \left\{ zy - \ell(y) \right\}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Teorema

Per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, $\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda} \left\{ a + \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[\ell^*\left(\lambda \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right) \right] \right\}$.

Esempio (la *misura entropica di rischio* di parametro 1)

Sia $\ell(x) := e^x$, $x \in \mathbb{R}$, e sia $a := 1$. Allora, per ogni $z \geq 0$,

$$\ell^*(z) = \begin{cases} z(\log z - 1), & \text{se } z > 0, \\ 0, & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

Così $\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[\mathbb{1}_{\left\{ \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} > 0 \right\}} \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \log \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \right] = H(\mathbf{Q} \,|\, \mathbf{P})$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$ (dove $H(\mathbf{Q} \,|\, \mathbf{P})$ è l'*entropia relativa* di $\mathbf{Q}$ data $\mathbf{P}$). Infine,

$$\rho(X) = \log \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[e^{-X} \right], \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}).$$

Teorema

Per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, $\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda} \left\{ a + \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[\ell^*\left(\lambda \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right) \right] \right\}$.

Esempio (la *misura entropica di rischio* di parametro 1)

Sia $\ell(x) := e^x$, $x \in \mathbb{R}$, e sia $a := 1$. Allora, per ogni $z \geq 0$,

$$\ell^*(z) = \begin{cases} z(\log z - 1), & \text{se } z > 0, \\ 0, & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

Così $\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[\mathbb{1}_{\left\{ \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} > 0 \right\}} \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \log \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \right] = H(\mathbf{Q} \,|\, \mathbf{P})$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$ (dove $H(\mathbf{Q} \,|\, \mathbf{P})$ è l'*entropia relativa* di $\mathbf{Q}$ data $\mathbf{P}$). Infine,

$$\rho(X) = \log \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[e^{-X} \right], \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}).$$

Teorema

Per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, $\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda} \Big\{ a + \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[\ell^*(\lambda \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}) \big] \Big\}$.

Esempio (la *misura entropica di rischio* di parametro 1)

Sia $\ell(x) := e^x$, $x \in \mathbb{R}$, e sia $a := 1$. Allora, per ogni $z \geq 0$,

$$\ell^*(z) = \begin{cases} z(\log z - 1), & \text{se } z > 0, \\ 0, & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

Così $\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[\mathbb{1}_{\{\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} > 0\}} \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \log \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \big] \equiv H(\mathbf{Q} \,|\, \mathbf{P})$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$ (dove $H(\mathbf{Q} \,|\, \mathbf{P})$ è l'*entropia relativa* di $\mathbf{Q}$ data $\mathbf{P}$). Infine,

$$\rho(X) = \log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\big[e^{-X} \big], \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}).$$

Teorema

Per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, $\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda}\left\{ a + \mathbf{E^P}\left[\ell^*\left(\lambda \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right)\right]\right\}$.

Esempio (la *misura entropica di rischio* di parametro 1)

Sia $\ell(x) := e^x$, $x \in \mathbb{R}$, e sia $a := 1$. Allora, per ogni $z \geq 0$,

$$\ell^*(z) = \begin{cases} z(\log z - 1), & \text{se } z > 0, \\ 0, & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

Così $\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \mathbf{E^P}\left[\mathbb{1}_{\left\{\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} > 0\right\}} \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \log \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right] \equiv H(\mathbf{Q} \,|\, \mathbf{P})$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$ (dove $H(\mathbf{Q} \,|\, \mathbf{P})$ è l'*entropia relativa* di $\mathbf{Q}$ data $\mathbf{P}$). Infine,

$$\rho(X) = \log \mathbf{E^P}\left[e^{-X}\right], \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}).$$

Misure di rischio definite da funzioni di perdita

Trasformata di Fenchel-Legendre e formula di rappresentazione

Teorema

Per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, $\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda} \left\{ a + \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[\ell^*(\lambda \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}) \right] \right\}$.

Esempio (la *misura entropica di rischio* di parametro 1)

Sia $\ell(x) := e^x$, $x \in \mathbb{R}$, e sia $a := 1$. Allora, per ogni $z \geq 0$,

$$\ell^*(z) = \begin{cases} z(\log z - 1), & \text{se } z > 0, \\ 0, & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

Così $\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[\mathbb{1}_{\left\{ \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} > 0 \right\}} \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \log \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \right] \equiv H(\mathbf{Q} \,|\, \mathbf{P})$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$ (dove $H(\mathbf{Q} \,|\, \mathbf{P})$ è l'*entropia relativa* di $\mathbf{Q}$ data $\mathbf{P}$). Infine,

$$\rho(X) = \log \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[e^{-X} \right], \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}).$$

Siano $T, d \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, *denotiamo* $\mathcal{T} \doteq \{0, 1, \ldots, T\}$ e *fissiamo*:

1. Una filtrazione $\mathbb{F} \equiv (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con $\mathcal{F}_0$ che sia $\mathbf{P}$-banale e con $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. *Indichiamo* inoltre $\mathcal{F}_{-1} := \mathcal{F}_0$.
2. d processi stocastici $\mathbb{F}$-adattati $S^i \equiv (S^i_t)_{t\in\mathcal{T}}$, $i = 1, \ldots, d$ a valori in $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty[$ e già attualizzati rispetto ad un processo deterministico $B \equiv (B_t)_{t\in\mathcal{T}}$ reale e positivo. Sia quindi $S \equiv (S_t)_{t\in\mathcal{T}} \equiv ((S^1_t, \ldots, S^d_t)^{\mathsf{T}})_{t\in\mathcal{T}}$.

Per ogni strategia $H \equiv (H_t)_{t\in\mathcal{T}} \equiv ((H^1_t, \ldots, H^d_t)^{\mathsf{T}})_{t\in\mathcal{T}}$ su S di portafoglio autofinanziato a costo $x_0 \in \mathbb{R}$ avente *processo valore* attualizzato $V \equiv V^{x_0,H} \equiv (V_t)_{t\in\mathcal{T}}$, H è un processo a valori in $\mathbb{R}^d$ che risulta $\mathbb{F}$-prevedibile, ovvero $(\mathcal{F}_{t-1})_{t\in\mathcal{T}}$-adattato, mentre V è il processo reale $\mathbb{F}$-adattato di traiettorie $V_0 \equiv x_0$ e

$$V_t \equiv x_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \cdot \Delta S_s, \quad t \in \mathcal{T}\setminus\{0\}.$$

Siano $T, d \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, *denotiamo* $\mathcal{T} \doteq \{0, 1, \dots, T\}$ e *fissiamo*:

1. Una filtrazione $\mathbb{F} \equiv (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con $\mathcal{F}_0$ che sia $\mathbf{P}$-banale e con $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. *Indichiamo* inoltre $\mathcal{F}_{-1} := \mathcal{F}_0$.
2. d processi stocastici $\mathbb{F}$-adattati $S^i \equiv (S^i_t)_{t\in\mathcal{T}}$, $i = 1, \dots, d$, a valori in $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ e già attualizzati rispetto ad un processo deterministico $B \equiv (B_t)_{t\in\mathcal{T}}$ reale e positivo. Sia quindi $S \equiv (S_t)_{t\in\mathcal{T}} \equiv ((S^1_t, \dots, S^d_t)^{\top})_{t\in\mathcal{T}}$.

Per ogni strategia $H \equiv (H_t)_{t\in\mathcal{T}} \equiv ((H^1_t, \dots, H^d_t)^{\top})_{t\in\mathcal{T}}$ su S di portafoglio autofinanziato a costo $x_0 \in \mathbb{R}$ avente *processo valore* attualizzato $V \equiv V^{x_0,H} \equiv (V_t)_{t\in\mathcal{T}}$, H è un processo a valori in $\mathbb{R}^d$ che risulta $\mathbb{F}$-prevedibile, ovvero $(\mathcal{F}_{t-1})_{t\in\mathcal{T}}$-adattato, mentre V è il processo reale $\mathbb{F}$-adattato di traiettorie $V_0 \equiv x_0$ e

$$V_t = x_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \cdot \Delta S_s, \quad t \in \mathcal{T}\setminus\{0\}.$$

Siano $T, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *denotiamo* $\mathcal{T} \doteq \{0, 1, \ldots, T\}$ e *fissiamo*:

1. Una filtrazione $\mathbb{F} \equiv (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con $\mathcal{F}_0$ che sia $\mathbf{P}$-banale e con $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. *Indichiamo* inoltre $\mathcal{F}_{-1} := \mathcal{F}_0$.
2. d processi stocastici $\mathbb{F}$-adattati $S^i \equiv (S^i_t)_{t \in \mathcal{T}}$, $i = 1, \ldots, d$, a valori in $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ e già attualizzati rispetto ad un processo deterministico $B \equiv (B_t)_{t \in \mathcal{T}}$ reale e positivo. Sia quindi $S \equiv (S_t)_{t \in \mathcal{T}} \equiv ((S^1_t, \ldots, S^d_t)^\mathsf{T})_{t \in \mathcal{T}}$.

Per ogni strategia $H \equiv (H_t)_{t \in \mathcal{T}} \equiv ((H^1_t, \ldots, H^d_t)^\mathsf{T})_{t \in \mathcal{T}}$ su S di portafoglio autofinanziato a costo $x_0 \in \mathbb{R}$ avente *processo valore* attualizzato $V \equiv V^{x_0, H} \equiv (V_t)_{t \in \mathcal{T}}$, H è un processo a valori in $\mathbb{R}^d$ che risulta $\mathbb{F}$-prevedibile, ovvero $(\mathcal{F}_{t-1})_{t \in \mathcal{T}}$-adattato, mentre V è il processo reale $\mathbb{F}$-adattato di traiettorie $V_0 \equiv x_0$ e

$$V_t \equiv x_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \cdot \Delta S_s, \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}.$$

Misure di rischio definite da vincoli di commercio

Prevedibile convessità e formula di rappresentazione

Siano $T, d \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, *denotiamo* $\mathcal{T} \doteq \{0, 1, \ldots, T\}$ e *fissiamo*:

1. Una filtrazione $\mathbb{F} \equiv (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con $\mathcal{F}_0$ che sia $\mathbf{P}$-banale e con $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. *Indichiamo* inoltre $\mathcal{F}_{-1} := \mathcal{F}_0$.
2. d processi stocastici $\mathbb{F}$-adattati $S^i \equiv (S^i_t)_{t\in\mathcal{T}}$, $i = 1, \ldots, d$, a valori in $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty[$ e già attualizzati rispetto ad un processo deterministico $B \equiv (B_t)_{t\in\mathcal{T}}$ reale e positivo. *Sia* quindi $S \equiv (S_t)_{t\in\mathcal{T}} := ((S^1_t, \ldots, S^d_t)^\top)_{t\in\mathcal{T}}$.

Per ogni strategia $H \equiv (H_t)_{t\in\mathcal{T}} \equiv ((H^1_t, \ldots, H^d_t)^\top)_{t\in\mathcal{T}}$ su S di portafoglio autofinanziato a costo $x_0 \in \mathbb{R}$ avente *processo valore* attualizzato $V \equiv V^{x_0,H} \equiv (V_t)_{t\in\mathcal{T}}$, H è un processo a valori in $\mathbb{R}^d$ che risulta $\mathbb{F}$-prevedibile, ovvero $(\mathcal{F}_{t-1})_{t\in\mathcal{T}}$-adattato, mentre V è il processo reale $\mathbb{F}$-adattato di traiettorie $V_0 \equiv x_0$ e

$$V_t \equiv x_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \cdot \Delta S_s, \quad t \in \mathcal{T}\setminus\{0\}.$$

Siano $T, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *denotiamo* $\mathcal{T} \doteq \{0, 1, \ldots, T\}$ e *fissiamo*:

1. Una filtrazione $\mathbb{F} \equiv (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con $\mathcal{F}_0$ che sia $\mathbf{P}$-banale e con $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. *Indichiamo* inoltre $\mathcal{F}_{-1} := \mathcal{F}_0$.
2. d processi stocastici $\mathbb{F}$-adattati $S^i \equiv (S^i_t)_{t \in \mathcal{T}}$, $i = 1, \ldots, d$, a valori in $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty[$ e già attualizzati rispetto ad un processo deterministico $B \equiv (B_t)_{t \in \mathcal{T}}$ reale e positivo. *Sia* quindi $S \equiv (S_t)_{t \in \mathcal{T}} := ((S^1_t, \ldots, S^d_t)^\top)_{t \in \mathcal{T}}$.

Per ogni strategia $H \equiv (H_t)_{t \in \mathcal{T}} \equiv ((H^1_t, \ldots, H^d_t)^\top)_{t \in \mathcal{T}}$ su S di portafoglio autofinanziato a costo $x_0 \in \mathbb{R}$ avente *processo valore* attualizzato $V \equiv V^{x_0, H} \equiv (V_t)_{t \in \mathcal{T}}$, H è un processo a valori in $\mathbb{R}^d$ che risulta $\mathbb{F}$-prevedibile, ovvero $(\mathcal{F}_{t-1})_{t \in \mathcal{T}}$-adattato, mentre V è il processo reale $\mathbb{F}$-adattato di traiettorie $V_0 \equiv x_0$ e

$$V_t \equiv x_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \cdot \Delta S_s, \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}.$$

Siano $T, d \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, *denotiamo* $\mathcal{T} \doteq \{0, 1, \ldots, T\}$ e *fissiamo*:

1. Una filtrazione $\mathbb{F} \equiv (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con $\mathcal{F}_0$ che sia $\mathbf{P}$-banale e con $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. *Indichiamo* inoltre $\mathcal{F}_{-1} := \mathcal{F}_0$.
2. d processi stocastici $\mathbb{F}$-adattati $S^i \equiv (S^i_t)_{t \in \mathcal{T}}$, $i = 1, \ldots, d$, a valori in $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty[$ e già attualizzati rispetto ad un processo deterministico $B \equiv (B_t)_{t \in \mathcal{T}}$ reale e positivo. *Sia* quindi $S \equiv (S_t)_{t \in \mathcal{T}} := ((S^1_t, \ldots, S^d_t)^\top)_{t \in \mathcal{T}}$.

Per ogni strategia $H \equiv (H_t)_{t \in \mathcal{T}} \equiv ((H^1_t, \ldots, H^d_t)^\top)_{t \in \mathcal{T}}$ su S di portafoglio autofinanziato a costo $x_0 \in \mathbb{R}$ avente *processo valore* attualizzato $V \equiv V^{x_0, H} \equiv (V_t)_{t \in \mathcal{T}}$, H è un processo a valori in $\mathbb{R}^d$ che risulta $\mathbb{F}$-prevedibile, ovvero $(\mathcal{F}_{t-1})_{t \in \mathcal{T}}$-adattato, mentre V è il processo reale $\mathbb{F}$-adattato di traiettorie $V_0 \equiv x_0$ e

$$V_t \equiv x_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \cdot \Delta S_s, \quad t \in \mathcal{T} \backslash \{0\}.$$

Siano $T, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *denotiamo* $\mathcal{T} \doteq \{0, 1, \dots, T\}$ e *fissiamo*:

1. Una filtrazione $\mathbb{F} \equiv (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con $\mathcal{F}_0$ che sia $\mathbf{P}$-banale e con $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. *Indichiamo* inoltre $\mathcal{F}_{-1} := \mathcal{F}_0$.
2. d processi stocastici $\mathbb{F}$-adattati $S^i \equiv (S^i_t)_{t \in \mathcal{T}}$, $i = 1, \dots, d$, a valori in $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty[$ e già attualizzati rispetto ad un processo deterministico $B \equiv (B_t)_{t \in \mathcal{T}}$ reale e positivo. *Sia* quindi $S \equiv (S_t)_{t \in \mathcal{T}} := ((S^1_t, \dots, S^d_t)^\mathsf{T})_{t \in \mathcal{T}}$.

Per ogni strategia $H \equiv (H_t)_{t \in \mathcal{T}} \equiv ((H^1_t, \dots, H^d_t)^\mathsf{T})_{t \in \mathcal{T}}$ su S di portafoglio autofinanziato a costo $x_0 \in \mathbb{R}$ avente *processo valore* attualizzato $V \equiv V^{x_0, H} \equiv (V_t)_{t \in \mathcal{T}}$, H è un processo a valori in $\mathbb{R}^d$ che risulta $\mathbb{F}$-prevedibile, ovvero $(\mathcal{F}_{t-1})_{t \in \mathcal{T}}$-adattato, mentre V è il processo reale $\mathbb{F}$-adattato di traiettorie $V_0 \equiv x_0$ e

$$V_t \equiv x_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \cdot \Delta S_s, \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}.$$

Definizione (Insieme prevedibilmente convesso)

Sia $\mathscr{H} \equiv \mathscr{H}_{T,d,\mathbb{F},S}$ un insieme non vuoto di processi a valori in $\mathbb{R}^d$ e $\mathbb{F}$-prevedibili tali che, per ogni $H \equiv (H_t)_{t \in \mathcal{T}} \in \mathscr{H}$, la v.a.r. $\sum_{t=1}^{T} H_t \cdot \Delta S_t$ sia inferiormente limitata. Diciamo allora che $\mathscr{H}$ è un insieme prevedibilmente convesso se $0 \in \mathscr{H}$ e se, per ogni processo $\mathbb{F}$-prevedibile $\xi \equiv (\xi_t)_{t \in \mathcal{T}}$ a valori in $[0,1]$ e per ogni $H \equiv (H_t)_{t \in \mathcal{T}}, \widetilde{H} \equiv (\widetilde{H}_t)_{t \in \mathcal{T}} \in \mathscr{H}$, resta in $\mathscr{H}$ il processo dato da

$$\xi_t H_t + (1-\xi_t)\widetilde{H}_t, \quad t \in \mathcal{T}.$$

Fissiamo un insieme prevedibilmente convesso $\mathscr{H}$ ed *assumiamo* per il modello l'ipotesi NA (di non arbitraggio). *Definiamo* quindi

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_{\mathscr{H}} \doteq \bigcup_{H \in \mathscr{H}} \left\{ X \in L^{\infty}(\mathbf{P}) \,\middle|\, X + \textstyle\sum_{t=1}^{T} H_t \cdot \Delta S_t \geq 0 \right\}.$$

Definizione (Insieme prevedibilmente convesso)

Sia $\mathscr{H} \equiv \mathscr{H}_{T,d,\mathbb{F},S}$ un insieme non vuoto di processi a valori in $\mathbb{R}^d$ e $\mathbb{F}$-prevedibili tali che, per ogni $H \equiv (H_t)_{t\in\mathcal{T}} \in \mathscr{H}$, la v.a.r. $\sum_{t=1}^{T} H_t \cdot \Delta S_t$ sia inferiormente limitata. Diciamo allora che $\mathscr{H}$ è un insieme prevedibilmente convesso se $0 \in \mathscr{H}$ e se, per ogni processo $\mathbb{F}$-prevedibile $\xi \equiv (\xi_t)_{t\in\mathcal{T}}$ a valori in $[0,1]$ e per ogni $H \equiv (H_t)_{t\in\mathcal{T}}, \widetilde{H} \equiv (\widetilde{H}_t)_{t\in\mathcal{T}} \in \mathscr{H}$, resta in $\mathscr{H}$ il processo dato da

$$\xi_t H_t + (1-\xi_t)\widetilde{H}_t, \quad t \in \mathcal{T}.$$

Fissiamo un insieme prevedibilmente convesso $\mathscr{H}$ ed *assumiamo* per il modello l'ipotesi NA (di non arbitraggio). *Definiamo* quindi

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_{\mathscr{H}} \doteq \bigcup_{H\in\mathscr{H}} \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \,\middle|\, X + \sum_{t=1}^{T} H_t \cdot \Delta S_t \geq 0 \right\}.$$

Definizione (Insieme prevedibilmente convesso)

Sia $\mathscr{H} \equiv \mathscr{H}_{T,d,\mathbb{F},S}$ un insieme non vuoto di processi a valori in $\mathbb{R}^d$ e $\mathbb{F}$-prevedibili tali che, per ogni $H \equiv (H_t)_{t\in\mathcal{T}} \in \mathscr{H}$, la v.a.r. $\sum_{t=1}^{T} H_t \cdot \Delta S_t$ sia inferiormente limitata. Diciamo allora che $\mathscr{H}$ è un insieme prevedibilmente convesso se $0 \in \mathscr{H}$ e se, per ogni processo $\mathbb{F}$-prevedibile $\xi \equiv (\xi_t)_{t\in\mathcal{T}}$ a valori in $[0,1]$ e per ogni $H \equiv (H_t)_{t\in\mathcal{T}}, \widetilde{H} \equiv (\widetilde{H}_t)_{t\in\mathcal{T}} \in \mathscr{H}$, resta in $\mathscr{H}$ il processo dato da

$$\xi_t H_t + (1-\xi_t)\widetilde{H}_t, \quad t \in \mathcal{T}.$$

Fissiamo un insieme prevedibilmente convesso $\mathscr{H}$ ed *assumiamo* per il modello l'ipotesi NA (di non arbitraggio). *Definiamo* quindi

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_{\mathscr{H}} \doteq \bigcup_{H\in\mathscr{H}} \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \;\middle|\; X + \sum_{t=1}^{T} H_t \cdot \Delta S_t \ge 0 \right\}.$$

Definizione (Insieme prevedibilmente convesso)

Sia $\mathscr{H} \equiv \mathscr{H}_{T,d,\mathbb{F},S}$ un insieme non vuoto di processi a valori in $\mathbb{R}^d$ e $\mathbb{F}$-prevedibili tali che, per ogni $H \equiv (H_t)_{t\in\mathcal{T}} \in \mathscr{H}$, la v.a.r. $\sum_{t=1}^{T} H_t \cdot \Delta S_t$ sia inferiormente limitata. Diciamo allora che $\mathscr{H}$ è un insieme prevedibilmente convesso se $0 \in \mathscr{H}$ e se, per ogni processo $\mathbb{F}$-prevedibile $\xi \equiv (\xi_t)_{t\in\mathcal{T}}$ a valori in $[0,1]$ e per ogni $H \equiv (H_t)_{t\in\mathcal{T}}, \widetilde{H} \equiv (\widetilde{H}_t)_{t\in\mathcal{T}} \in \mathscr{H}$, resta in $\mathscr{H}$ il processo dato da

$$\xi_t H_t + (1-\xi_t)\widetilde{H}_t, \quad t \in \mathcal{T}.$$

Fissiamo un insieme prevedibilmente convesso $\mathscr{H}$ ed *assumiamo* per il modello l'ipotesi NA (di non arbitraggio). *Definiamo* quindi

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_{\mathscr{H}} \doteq \bigcup_{H\in\mathscr{H}} \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \,\middle|\, X + \sum_{t=1}^{T} H_t \cdot \Delta S_t \geq 0 \right\}.$$

Misure di rischio definite da vincoli di commercio
Prevedibile convessità e formula di rappresentazione

Allora la mappa $\rho \equiv \rho_{\mathcal{A}}$ è una misura convessa di rischio con $\mathcal{A}_\rho \supseteq \mathcal{A}$ e che non gode in generale della proprietà di Fatou. *Assumiamola* come ipotesi e *supponiamo* $L^1(\mathbf{P})$ separabile.

Proposizione

Per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, $\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[A_T^{\mathbf{Q}}\right]$ *dove* $A^{\mathbf{Q}} \equiv (A_t^{\mathbf{Q}})_{t \in \mathcal{T}}$ *è il processo* ≥ 0, *non decrescente e* $\mathbb{F}$*-prevedibile con* $A_0^{\mathbf{Q}} \doteq 0$ *e*

$$\Delta A_t^{\mathbf{Q}} \doteq \operatorname*{ess\,sup}_{H \in \mathscr{H}} \left\{ H_t \cdot \left(\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[S_t | \mathcal{F}_{t-1}] - S_{t-1} \right) \right\}, \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}.$$

Attenzione: possiamo sempre supporre che il processo valore $V \equiv V^{x_0,H}$ sia $\mathbf{Q}$-integrabile per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $H \in \mathscr{H}$.

Osservazione: è possibile dimostrare che, se $\mathscr{H}$ è "$\xrightarrow{\mathbf{P}}$-chiuso", allora l'ipotesi NA equivale alla proprietà di Fatou per ρ.

Allora la mappa $\rho \equiv \rho_{\mathcal{A}}$ è una misura convessa di rischio con $\mathcal{A}_\rho \supseteq \mathcal{A}$ e che non gode in generale della proprietà di Fatou. *Assumiamola* come ipotesi e *supponiamo* $L^1(\mathbf{P})$ separabile.

Proposizione

Per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, $\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[A_T^{\mathbf{Q}}\right]$ *dove* $A^{\mathbf{Q}} \equiv (A_t^{\mathbf{Q}})_{t\in\mathcal{T}}$ *è il processo* ≥ 0, *non decrescente e* $\mathbb{F}$*-prevedibile con* $A_0^{\mathbf{Q}} \doteq 0$ *e*

$$\Delta A_t^{\mathbf{Q}} \doteq \operatorname*{ess\,sup}_{H\in\mathscr{H}} \left\{ H_t \cdot \left(\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[S_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] - S_{t-1} \right) \right\}, \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}\,.$$

Attenzione: possiamo sempre supporre che il processo valore $V \equiv V^{x_0,H}$ sia $\mathbf{Q}$-integrabile per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $H \in \mathscr{H}$.

Osservazione: è possibile dimostrare che, se $\mathscr{H}$ è "$\xrightarrow{\mathbf{P}}$-chiuso", allora l'ipotesi NA equivale alla proprietà di Fatou per ρ.

Allora la mappa $\rho \equiv \rho_{\mathcal{A}}$ è una misura convessa di rischio con $\mathcal{A}_\rho \supseteq \mathcal{A}$ e che non gode in generale della proprietà di Fatou. *Assumiamola* come ipotesi e *supponiamo* $L^1(\mathbf{P})$ separabile.

Proposizione

Per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, $\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[A_T^{\mathbf{Q}}\right]$ *dove* $A^{\mathbf{Q}} \equiv (A_t^{\mathbf{Q}})_{t \in \mathcal{T}}$ *è il processo* ≥ 0, *non decrescente e* $\mathbb{F}$*-prevedibile con* $A_0^{\mathbf{Q}} \doteq 0$ *e*

$$\Delta A_t^{\mathbf{Q}} \doteq \operatorname*{ess\,sup}_{H \in \mathscr{H}} \left\{ H_t \cdot \left(\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[S_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] - S_{t-1} \right) \right\}, \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}.$$

Attenzione: possiamo sempre supporre che il processo valore $V \equiv V^{x_0,H}$ sia $\mathbf{Q}$-integrabile per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $H \in \mathscr{H}$.

Osservazione: è possibile dimostrare che, se $\mathscr{H}$ è "$\xrightarrow{\mathbf{P}}$-chiuso", allora l'ipotesi NA equivale alla proprietà di Fatou per ρ.

Allora la mappa $\rho \equiv \rho_{\mathcal{A}}$ è una misura convessa di rischio con $\mathcal{A}_\rho \supseteq \mathcal{A}$ e che non gode in generale della proprietà di Fatou. *Assumiamola* come ipotesi e *supponiamo* $L^1(\mathbf{P})$ separabile.

Proposizione

Per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, $\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[A^{\mathbf{Q}}_T\right]$ *dove* $A^{\mathbf{Q}} \equiv (A^{\mathbf{Q}}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ *è il processo* ≥ 0, *non decrescente e* $\mathbb{F}$*-prevedibile con* $A^{\mathbf{Q}}_0 \doteq 0$ *e*

$$\Delta A^{\mathbf{Q}}_t \doteq \operatorname*{ess\,sup}_{H\in\mathscr{H}} \left\{ H_t \cdot \left(\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[S_t | \mathcal{F}_{t-1}] - S_{t-1} \right) \right\}, \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}.$$

Attenzione: possiamo sempre supporre che il processo valore $V \equiv V^{x_0,H}$ sia $\mathbf{Q}$-integrabile per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $H \in \mathscr{H}$.

Osservazione: è possibile dimostrare che, se $\mathscr{H}$ è "$\xrightarrow{\mathbf{P}}$-chiuso", allora l'ipotesi NA equivale alla proprietà di Fatou per ρ.

Allora la mappa $\rho \equiv \rho_{\mathcal{A}}$ è una misura convessa di rischio con $\mathcal{A}_\rho \supseteq \mathcal{A}$ e che non gode in generale della proprietà di Fatou. *Assumiamola* come ipotesi e *supponiamo* $L^1(\mathbf{P})$ separabile.

Proposizione

Per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, $\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[A_T^{\mathbf{Q}}\right]$ *dove* $A^{\mathbf{Q}} \equiv (A_t^{\mathbf{Q}})_{t\in\mathcal{T}}$ *è il processo* ≥ 0, *non decrescente e* $\mathbb{F}$*-prevedibile con* $A_0^{\mathbf{Q}} \doteq 0$ *e*

$$\Delta A_t^{\mathbf{Q}} \doteq \operatorname*{ess\,sup}_{H\in\mathscr{H}} \left\{ H_t \cdot \left(\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[S_t | \mathcal{F}_{t-1}] - S_{t-1} \right) \right\}, \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}\,.$$

Attenzione: possiamo sempre supporre che il processo valore $V \equiv V^{x_0,H}$ sia $\mathbf{Q}$-integrabile per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $H \in \mathscr{H}$.

Osservazione: è possibile dimostrare che, se $\mathscr{H}$ è "$\xrightarrow{\mathbf{P}}$-chiuso", allora l'ipotesi NA equivale alla proprietà di Fatou per ρ.

Sia ora ρ_0 una misura convessa di rischio che soddisfi la proprietà di Fatou, *supponiamo* $L^1(\mathbf{P})$ separabile e *definiamo*

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_{\mathscr{H},\rho_0} \doteq \bigcup_{\substack{H \in \mathscr{H} \\ Y \in \mathcal{A}_{\rho_0}}} \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \;\middle|\; X + \sum_{t=1}^{T} H_t \cdot \Delta S_t \geq Y \right\}.$$

Allora la mappa $\rho \equiv \rho_{\mathcal{A}}$ è una misura convessa di rischio sotto l'*ipotesi* che $\rho(0) > -\infty$, con $\mathcal{A}_\rho \supseteq \mathcal{A}$ e tale che

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\rho_0} + \mathcal{A}_{\mathscr{H}}.$$

Assumiamo la proprietà di Fatou per ρ e $\rho_{\mathscr{H}} := \rho_{\mathcal{A}_{\mathscr{H}}}$: allora

$$\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \alpha_{\rho_0}(\mathbf{Q}) + \alpha_{\rho_{\mathscr{H}}}(\mathbf{Q}), \quad \mathbf{Q} \in \mathcal{P}.$$

Sia ora ρ_0 una misura convessa di rischio che soddisfi la proprietà di Fatou, *supponiamo* $L^1(\mathbf{P})$ separabile e *definiamo*

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_{\mathscr{H},\rho_0} \doteq \bigcup_{\substack{H\in\mathscr{H} \\ Y\in\mathcal{A}_{\rho_0}}} \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \;\middle|\; X + \sum_{t=1}^{T} H_t \cdot \Delta S_t \geq Y \right\}.$$

Allora la mappa $\rho \equiv \rho_{\mathcal{A}}$ è una misura convessa di rischio sotto l'*ipotesi* che $\rho(0) > -\infty$, con $\mathcal{A}_\rho \supseteq \mathcal{A}$ e tale che

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\rho_0} + \mathcal{A}_{\mathscr{H}}.$$

Assumiamo la proprietà di Fatou per ρ e $\rho_{\mathscr{H}} := \rho_{\mathcal{A}_{\mathscr{H}}}$: allora

$$\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \alpha_{\rho_0}(\mathbf{Q}) + \alpha_{\rho_{\mathscr{H}}}(\mathbf{Q}), \quad \mathbf{Q} \in \mathcal{P}.$$

Sia ora ρ_0 una misura convessa di rischio che soddisfi la proprietà di Fatou, *supponiamo* $L^1(\mathbf{P})$ separabile e *definiamo*

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_{\mathscr{H},\rho_0} \doteq \bigcup_{\substack{H \in \mathscr{H} \\ Y \in \mathcal{A}_{\rho_0}}} \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \,\middle|\, X + \sum_{t=1}^{T} H_t \cdot \Delta S_t \geq Y \right\}.$$

Allora la mappa $\rho \equiv \rho_{\mathcal{A}}$ è una misura convessa di rischio sotto l'*ipotesi* che $\rho(0) > -\infty$, con $\mathcal{A}_\rho \supseteq \mathcal{A}$ e tale che

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\rho_0} + \mathcal{A}_{\mathscr{H}}.$$

Assumiamo la proprietà di Fatou per ρ e $\rho_{\mathscr{H}} := \rho_{\mathcal{A}_{\mathscr{H}}}$: allora

$$\alpha_\rho(\mathbf{Q}) = \alpha_{\rho_0}(\mathbf{Q}) + \alpha_{\rho_{\mathscr{H}}}(\mathbf{Q}), \quad \mathbf{Q} \in \mathcal{P}.$$

Denotiamo anche $\rho_{\ell,a} := \rho_{\mathcal{A}^{\mathbf{P}}_{\ell,a}}$ e *definiamo* $\widetilde{\mathcal{A}} \equiv \widetilde{\mathcal{A}}_{\ell,a,\mathscr{H}}$ ponendo

$$\widetilde{\mathcal{A}} \doteq \bigcup_{H\in\mathscr{H}} \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \;\middle|\; \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[\ell\left(-X - \sum_{t=1}^T H_t \cdot \Delta S_t\right)\right] \le a \right\}.$$

Allora la mappa $\widetilde{\rho} \equiv \rho_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ è una misura convessa di rischio sotto l'*ipotesi* che $\widetilde{\rho}(0) > -\infty$, ed inoltre $\mathcal{A}_{\widetilde{\rho}} \supseteq \widetilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}_{\ell,a}$.

Proposizione

Assumiamo che $\rho_0 \equiv \rho_{\ell,a}$. Allora è $\rho(0) > -\infty$ e vale

$$\widetilde{\rho} = \rho.$$

Denotiamo anche $\rho_{\ell,a} := \rho_{\mathcal{A}^{\mathbf{P}}_{\ell,a}}$ e *definiamo* $\widetilde{\mathcal{A}} \equiv \widetilde{\mathcal{A}}_{\ell,a,\mathscr{H}}$ ponendo

$$\widetilde{\mathcal{A}} \doteq \bigcup_{H \in \mathscr{H}} \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \,\middle|\, \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[\ell\left(-X - \sum_{t=1}^{T} H_t \cdot \Delta S_t\right)\right] \leq a \right\}.$$

Allora la mappa $\widetilde{\rho} \equiv \rho_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ è una misura convessa di rischio sotto l'*ipotesi* che $\widetilde{\rho}(0) > -\infty$, ed inoltre $\mathcal{A}_{\widetilde{\rho}} \supseteq \widetilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}_{\ell,a}$.

Proposizione

Assumiamo che $\rho_0 \equiv \rho_{\ell,a}$. Allora è $\rho(0) > -\infty$ e vale

$$\widetilde{\rho} = \rho.$$

Misure di rischio definite da vincoli di commercio
Combinazione con funzioni di perdita

Denotiamo anche $\rho_{\ell,a} := \rho_{\mathcal{A}^{\mathbf{P}}_{\ell,a}}$ e *definiamo* $\widetilde{\mathcal{A}} \equiv \widetilde{\mathcal{A}}_{\ell,a,\mathscr{H}}$ ponendo

$$\widetilde{\mathcal{A}} \doteq \bigcup_{H \in \mathscr{H}} \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \,\middle|\, \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[\ell\left(-X - \textstyle\sum_{t=1}^{T} H_t \cdot \Delta S_t\right)\right] \leq a \right\}.$$

Allora la mappa $\widetilde{\rho} \equiv \rho_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ è una misura convessa di rischio sotto l'*ipotesi* che $\widetilde{\rho}(0) > -\infty$, ed inoltre $\mathcal{A}_{\widetilde{\rho}} \supseteq \widetilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}_{\ell,a}$.

Proposizione

Assumiamo che $\rho_0 \equiv \rho_{\ell,a}$. *Allora è* $\rho(0) > -\infty$ *e vale*

$$\widetilde{\rho} = \rho.$$

Denotiamo anche $\rho_{\ell,a} := \rho_{\mathcal{A}^{\mathbf{P}}_{\ell,a}}$ e *definiamo* $\widetilde{\mathcal{A}} \equiv \widetilde{\mathcal{A}}_{\ell,a,\mathscr{H}}$ ponendo

$$\widetilde{\mathcal{A}} \doteq \bigcup_{H \in \mathscr{H}} \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \,\middle|\, \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[\ell\left(-X - \textstyle\sum_{t=1}^{T} H_t \cdot \Delta S_t\right)\right] \leq a \right\}.$$

Allora la mappa $\widetilde{\rho} \equiv \rho_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ è una misura convessa di rischio sotto l'*ipotesi* che $\widetilde{\rho}(0) > -\infty$, ed inoltre $\mathcal{A}_{\widetilde{\rho}} \supseteq \widetilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}_{\ell,a}$.

Proposizione

Assumiamo che $\rho_0 \equiv \rho_{\ell,a}$. *Allora è* $\rho(0) > -\infty$ *e vale*

$$\widetilde{\rho} = \rho.$$

Sia $T \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, *denotiamo* $\mathcal{T} \doteq \{0, 1, \ldots, T\}$ e *sia* $\mathbb{F} \equiv (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ una filtrazione su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Definizione (Misure condizionali di rischio convesse e coerenti)

Una misura convessa condizionale di rischio ρ_t al tempo $t \in \mathcal{T}$ è una mappa $\rho_t \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to L^\infty_t(\mathbf{P}) := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ che, per ogni $X,Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, $X_t \in L^\infty_t(\mathbf{P})$ e $\lambda_t \in L^\infty_t(\mathbf{P})$ a valori in]0,1[, verifica:

1. *Monotonia:* $X \geq Y \Rightarrow \rho_t(X) \leq \rho_t(Y)$.
2. *Invar. condizionale per traslazioni:* $\rho_t(X+X_t) = \rho_t(X) - X_t$.
3. *Conv. condiz.:* $\rho_t(\lambda_t X + (1-\lambda_t)Y) \leq \lambda_t \rho_t(X) + (1-\lambda_t)\rho_t(Y)$.
4. *Normalizzazione:* $\rho_t(0) = 0$.

ρ_t è coerente se, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\lambda_t \in L^\infty_t(\mathbf{P})$, $\lambda_t \geq 0$, vale:

- *Positiva omogeneità condizionale:* $\rho_t(\lambda_t X) = \lambda_t \rho_t(X)$.

Sia $T \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *denotiamo* $\mathcal{T} \doteq \{0, 1, \dots, T\}$ e *sia* $\mathbb{F} \equiv (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ una filtrazione su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Definizione (Misure condizionali di rischio convesse e coerenti)

Una misura convessa condizionale di rischio ρ_t al tempo $t \in \mathcal{T}$ è una mappa $\rho_t : L^\infty(\mathbf{P}) \to L^\infty_t(\mathbf{P}) := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ che, per ogni $X, Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, $X_t \in L^\infty_t(\mathbf{P})$ e $\lambda_t \in L^\infty_t(\mathbf{P})$ a valori in $]0,1[$, verifica:

1. *Monotonìa*: $X \geq Y \Rightarrow \rho_t(X) \leq \rho_t(Y)$.
2. *Invar. condizionale per traslazioni*: $\rho_t(X + X_t) = \rho_t(X) - X_t$.
3. *Conv. condiz.*: $\rho_t(\lambda_t X + (1 - \lambda_t) Y) \leq \lambda_t \rho_t(X) + (1 - \lambda_t) \rho_t(Y)$.
4. *Normalizzazione*: $\rho_t(0) = 0$.

ρ_t è coerente se, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\lambda_t \in L^\infty_t(\mathbf{P})$, $\lambda_t \geq 0$, vale:

- *Positiva omogeneità condizionale*: $\rho_t(\lambda_t X) = \lambda_t \rho_t(X)$.

Sia $T \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, *denotiamo* $\mathcal{T} \doteq \{0, 1, \ldots, T\}$ e *sia* $\mathbb{F} \equiv (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ una filtrazione su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Definizione (Misure condizionali di rischio convesse e coerenti)

Una misura convessa condizionale di rischio ρ_t al tempo $t \in \mathcal{T}$ è una mappa $\rho_t : L^\infty(\mathbf{P}) \to L^\infty_t(\mathbf{P}) := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ che, per ogni $X, Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, $X_t \in L^\infty_t(\mathbf{P})$ e $\lambda_t \in L^\infty_t(\mathbf{P})$ a valori in $]0,1[$, verifica:

1. *Monotonìa*: $X \geq Y \Rightarrow \rho_t(X) \leq \rho_t(Y)$.
2. *Invar. condizionale per traslazioni*: $\rho_t(X + X_t) = \rho_t(X) - X_t$.
3. *Conv. condiz.*: $\rho_t(\lambda_t X + (1-\lambda_t) Y) \leq \lambda_t \rho_t(X) + (1-\lambda_t)\rho_t(Y)$.
4. *Normalizzazione*: $\rho_t(0) = 0$.

ρ_t è coerente se, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\lambda_t \in L^\infty_t(\mathbf{P})$, $\lambda_t \geq 0$, vale:

- *Positiva omogeneità condizionale*: $\rho_t(\lambda_t X) = \lambda_t \rho_t(X)$.

Sia $T \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, *denotiamo* $\mathcal{T} \doteq \{0, 1, \ldots, T\}$ e *sia* $\mathbb{F} \equiv (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ una filtrazione su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Definizione (Misure condizionali di rischio convesse e coerenti)

Una misura convessa condizionale di rischio ρ_t al tempo $t \in \mathcal{T}$ è una mappa $\rho_t : L^\infty(\mathbf{P}) \to L^\infty_t(\mathbf{P}) := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ che, per ogni $X, Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, $X_t \in L^\infty_t(\mathbf{P})$ e $\lambda_t \in L^\infty_t(\mathbf{P})$ a valori in]0,1[, verifica:

1. *Monotonìa*: $X \geq Y \Rightarrow \rho_t(X) \leq \rho_t(Y)$.
2. *Invar. condizionale per traslazioni*: $\rho_t(X + X_t) = \rho_t(X) - X_t$.
3. *Conv. condiz.*: $\rho_t(\lambda_t X + (1-\lambda_t) Y) \leq \lambda_t \rho_t(X) + (1-\lambda_t)\rho_t(Y)$.
4. *Normalizzazione*: $\rho_t(0) = 0$.

ρ_t è coerente se, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\lambda_t \in L^\infty_t(\mathbf{P})$, $\lambda_t \geq 0$, vale:

- *Positiva omogeneità condizionale*: $\rho_t(\lambda_t X) = \lambda_t \rho_t(X)$.

Sia $T \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *denotiamo* $\mathcal{T} \doteq \{0, 1, \dots, T\}$ e *sia* $\mathbb{F} \equiv (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ una filtrazione su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Definizione (Misure condizionali di rischio convesse e coerenti)

Una misura convessa condizionale di rischio ρ_t al tempo $t \in \mathcal{T}$ è una mappa $\rho_t : L^\infty(\mathbf{P}) \to L^\infty_t(\mathbf{P}) := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ che, per ogni $X, Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, $X_t \in L^\infty_t(\mathbf{P})$ e $\lambda_t \in L^\infty_t(\mathbf{P})$ a valori in $]0,1[$, verifica:

1. *Monotonìa*: $X \geq Y \Rightarrow \rho_t(X) \leq \rho_t(Y)$.
2. *Invar. condizionale per traslazioni*: $\rho_t(X + X_t) = \rho_t(X) - X_t$.
3. *Conv. condiz.*: $\rho_t(\lambda_t X + (1-\lambda_t)Y) \leq \lambda_t \rho_t(X) + (1-\lambda_t)\rho_t(Y)$.
4. *Normalizzazione*: $\rho_t(0) = 0$.

ρ_t è coerente se, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\lambda_t \in L^\infty_t(\mathbf{P})$, $\lambda_t \geq 0$, vale:

- *Positiva omogeneità condizionale*: $\rho_t(\lambda_t X) = \lambda_t \rho_t(X)$.

Sia $T \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *denotiamo* $\mathcal{T} \doteq \{0, 1, \dots, T\}$ e *sia* $\mathbb{F} \equiv (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ una filtrazione su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Definizione (Misure condizionali di rischio convesse e coerenti)

Una misura convessa condizionale di rischio ρ_t al tempo $t \in \mathcal{T}$ è una mappa $\rho_t : L^\infty(\mathbf{P}) \to L^\infty_t(\mathbf{P}) := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ che, per ogni $X, Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, $X_t \in L^\infty_t(\mathbf{P})$ e $\lambda_t \in L^\infty_t(\mathbf{P})$ a valori in $]0,1[$, verifica:

1. *Monotonìa*: $X \geq Y \Rightarrow \rho_t(X) \leq \rho_t(Y)$.
2. *Invar. condizionale per traslazioni*: $\rho_t(X + X_t) = \rho_t(X) - X_t$.
3. *Conv. condiz.*: $\rho_t(\lambda_t X + (1-\lambda_t)Y) \leq \lambda_t \rho_t(X) + (1-\lambda_t)\rho_t(Y)$.
4. *Normalizzazione*: $\rho_t(0) = 0$.

ρ_t è coerente se, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\lambda_t \in L^\infty_t(\mathbf{P})$, $\lambda_t \geq 0$, vale:

- *Positiva omogeneità condizionale*: $\rho_t(\lambda_t X) = \lambda_t \rho_t(X)$.

Sia $T \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *denotiamo* $\mathcal{T} \doteq \{0, 1, \ldots, T\}$ e *sia* $\mathbb{F} \equiv (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ una filtrazione su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Definizione (Misure condizionali di rischio convesse e coerenti)

Una misura convessa condizionale di rischio ρ_t al tempo $t \in \mathcal{T}$ è una mappa $\rho_t : L^\infty(\mathbf{P}) \to L^\infty_t(\mathbf{P}) := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ che, per ogni $X, Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, $X_t \in L^\infty_t(\mathbf{P})$ e $\lambda_t \in L^\infty_t(\mathbf{P})$ a valori in]0,1[, verifica:

1. *Monotonìa*: $X \geq Y \Rightarrow \rho_t(X) \leq \rho_t(Y)$.
2. *Invar. condizionale per traslazioni*: $\rho_t(X + X_t) = \rho_t(X) - X_t$.
3. *Conv. condiz.*: $\rho_t(\lambda_t X + (1-\lambda_t) Y) \leq \lambda_t \rho_t(X) + (1-\lambda_t)\rho_t(Y)$.
4. *Normalizzazione*: $\rho_t(0) = 0$.

ρ_t è coerente se, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\lambda_t \in L^\infty_t(\mathbf{P})$, $\lambda_t \geq 0$, vale:

- *Positiva omogeneità condizionale*: $\rho_t(\lambda_t X) = \lambda_t \rho_t(X)$.

Una *misura convessa* dinamica (risp. *coerente*) è una successione $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ di misure convesse condizionali di rischio (risp. coerenti).

Fissiamo una misura convessa dinamica di rischio $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$.
Allora ogni ρ_t è caratterizzata dal proprio insieme di accettazione

$$\mathcal{A}_t \overset{def}{=} \{\, X \in L^\infty(\mathbf{P}) \mid \rho_t(X) \le 0 \ (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \,\}$$

poiché $\rho_t(X) = \operatorname{ess\,inf}\{\, X_t \in L^\infty_t(\mathbf{P}) \mid X + X_t \in \mathcal{A}_t \,\}$, $X \in L^\infty(\mathbf{P})$.
Viceversa, opportuni sottoinsiemi non vuoti di $L^\infty(\mathbf{P})$ definiscono in modo univoco misure convesse dinamiche di rischio.
Intendiamo poi la proprietà di Fatou per ρ_t in maniera del tutto analoga alla parte teorica precedente.
Assumiamo per tutto il seguito che $L^1(\mathbf{P})$ sia *separabile*.
Introduciamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{P}$: $\mathcal{P}^e \doteq \{\, \mathbf{Q} \approx \mathbf{P} \,\}$ e, per ogni $t \in \mathcal{T}$, $\mathcal{P}_t \doteq \{\, \mathbf{Q}|_{\mathcal{F}_t} \approx \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t} \,\}$ e $\mathcal{Q}_t \doteq \{\, \mathbf{Q}|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t} \,\}$.

Una *misura convessa* dinamica (risp. *coerente*) è una successione $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ di misure convesse condizionali di rischio (risp. coerenti).
Fissiamo una misura convessa dinamica di rischio $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$.
Allora ogni ρ_t è caratterizzata dal proprio insieme di accettazione

$$\mathcal{A}_t \overset{def}{=} \{\, X \in L^\infty(\mathbf{P}) \mid \rho_t(X) \leq 0 \ (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \,\}$$

poiché $\rho_t(X) = \operatorname{ess\,inf}\{\, X_t \in L^\infty_t(\mathbf{P}) \mid X + X_t \in \mathcal{A}_t \,\}$, $X \in L^\infty(\mathbf{P})$.
Viceversa, opportuni sottoinsiemi non vuoti di $L^\infty(\mathbf{P})$ definiscono in modo univoco misure convesse dinamiche di rischio.
Intendiamo poi la proprietà di Fatou per ρ_t in maniera del tutto analoga alla parte teorica precedente.
Assumiamo per tutto il seguito che $L^1(\mathbf{P})$ sia *separabile*.
Introduciamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{P}$: $\mathcal{P}^e \doteq \{\, \mathbf{Q} \approx \mathbf{P} \,\}$ e, per ogni $t \in \mathcal{T}$, $\mathcal{P}_t \doteq \{\, \mathbf{Q}\,|_{\mathcal{F}_t} \approx \mathbf{P}\,|_{\mathcal{F}_t} \,\}$ e $\mathcal{Q}_t \doteq \{\, \mathbf{Q}\,|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{P}\,|_{\mathcal{F}_t} \,\}$.

Una *misura convessa* dinamica (risp. *coerente*) è una successione $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ di misure convesse condizionali di rischio (risp. coerenti).
Fissiamo una misura convessa dinamica di rischio $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$.
Allora ogni ρ_t è caratterizzata dal proprio insieme di accettazione

$$\mathcal{A}_t \overset{def}{=} \{\, X \in L^\infty(\mathbf{P}) \mid \rho_t(X) \leq 0 \ (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \,\}$$

poiché $\rho_t(X) = \operatorname{ess\,inf} \{\, X_t \in L^\infty_t(\mathbf{P}) \mid X + X_t \in \mathcal{A}_t \,\}$, $X \in L^\infty(\mathbf{P})$.
Viceversa, opportuni sottoinsiemi non vuoti di $L^\infty(\mathbf{P})$ definiscono in modo univoco misure convesse dinamiche di rischio.
Intendiamo poi la proprietà di Fatou per ρ_t in maniera del tutto analoga alla parte teorica precedente.
Assumiamo per tutto il seguito che $L^1(\mathbf{P})$ sia *separabile*.
Introduciamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{P}$: $\mathcal{P}^e \doteq \{\, \mathbf{Q} \approx \mathbf{P} \,\}$ e, per ogni $t \in \mathcal{T}$, $\mathcal{P}_t \doteq \{\, \mathbf{Q}|_{\mathcal{F}_t} \approx \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t} \,\}$ e $\mathcal{Q}_t \doteq \{\, \mathbf{Q}|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t} \,\}$.

Una *misura convessa* dinamica (risp. *coerente*) è una successione $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ di misure convesse condizionali di rischio (risp. coerenti).
Fissiamo una misura convessa dinamica di rischio $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$.
Allora ogni ρ_t è caratterizzata dal proprio insieme di accettazione

$$\mathcal{A}_t \overset{def}{=} \{\, X \in L^\infty(\mathbf{P}) \mid \rho_t(X) \leq 0 \ (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \,\}$$

poiché $\rho_t(X) = \operatorname{ess\,inf} \{\, X_t \in L_t^\infty(\mathbf{P}) \mid X + X_t \in \mathcal{A}_t \,\}$, $X \in L^\infty(\mathbf{P})$.
Viceversa, opportuni sottoinsiemi non vuoti di $L^\infty(\mathbf{P})$ definiscono in modo univoco misure convesse dinamiche di rischio.
Intendiamo poi la proprietà di Fatou per ρ_t in maniera del tutto analoga alla parte teorica precedente.
Assumiamo per tutto il seguito che $L^1(\mathbf{P})$ sia *separabile*.
Introduciamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{P}$: $\mathcal{P}^e \doteq \{\, \mathbf{Q} \approx \mathbf{P} \,\}$ e, per ogni $t \in \mathcal{T}$, $\mathcal{P}_t \doteq \{\, \mathbf{Q}|_{\mathcal{F}_t} \approx \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t} \,\}$ e $\mathcal{Q}_t \doteq \{\, \mathbf{Q}|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t} \,\}$.

Una *misura convessa* dinamica (risp. *coerente*) è una successione $(\rho_t)_{t \in \mathcal{T}}$ di misure convesse condizionali di rischio (risp. coerenti). *Fissiamo* una misura convessa dinamica di rischio $(\rho_t)_{t \in \mathcal{T}}$. Allora ogni ρ_t è caratterizzata dal proprio insieme di accettazione

$$\mathcal{A}_t \overset{def}{=} \{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \mid \rho_t(X) \leq 0 \ (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \}$$

poiché $\rho_t(X) = \operatorname{ess\,inf} \{ X_t \in L^\infty_t(\mathbf{P}) \mid X + X_t \in \mathcal{A}_t \}$, $X \in L^\infty(\mathbf{P})$. Viceversa, opportuni sottoinsiemi non vuoti di $L^\infty(\mathbf{P})$ definiscono in modo univoco misure convesse dinamiche di rischio. Intendiamo poi la proprietà di Fatou per ρ_t in maniera del tutto analoga alla parte teorica precedente.

Assumiamo per tutto il seguito che $L^1(\mathbf{P})$ sia *separabile*.
Introduciamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{P}$: $\mathcal{P}^e \doteq \{ \mathbf{Q} \approx \mathbf{P} \}$ e, per ogni $t \in \mathcal{T}$, $\mathcal{P}_t \doteq \{ \mathbf{Q}|_{\mathcal{F}_t} \approx \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t} \}$ e $\mathcal{Q}_t \doteq \{ \mathbf{Q}|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t} \}$.

Una *misura convessa* dinamica (risp. *coerente*) è una successione $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ di misure convesse condizionali di rischio (risp. coerenti). *Fissiamo* una misura convessa dinamica di rischio $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$. Allora ogni ρ_t è caratterizzata dal proprio insieme di accettazione

$$\mathcal{A}_t \overset{def}{=} \{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \mid \rho_t(X) \leq 0 \ (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \}$$

poiché $\rho_t(X) = \operatorname{ess\,inf} \{ X_t \in L^\infty_t(\mathbf{P}) \mid X + X_t \in \mathcal{A}_t \}$, $X \in L^\infty(\mathbf{P})$. Viceversa, opportuni sottoinsiemi non vuoti di $L^\infty(\mathbf{P})$ definiscono in modo univoco misure convesse dinamiche di rischio. Intendiamo poi la proprietà di Fatou per ρ_t in maniera del tutto analoga alla parte teorica precedente. *Assumiamo* per tutto il seguito che $L^1(\mathbf{P})$ sia *separabile*.
Introduciamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{P}$: $\mathcal{P}^e \doteq \{ \mathbf{Q} \approx \mathbf{P} \}$ e, per ogni $t \in \mathcal{T}$, $\mathcal{P}_t \doteq \{ \mathbf{Q}|_{\mathcal{F}_t} \approx \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t} \}$ e $\mathcal{Q}_t \doteq \{ \mathbf{Q}|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t} \}$.

Una *misura convessa* dinamica (risp. *coerente*) è una successione $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ di misure convesse condizionali di rischio (risp. coerenti). *Fissiamo* una misura convessa dinamica di rischio $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$. Allora ogni ρ_t è caratterizzata dal proprio insieme di accettazione

$$\mathcal{A}_t \overset{def}{=} \{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \mid \rho_t(X) \le 0 \ (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \}$$

poiché $\rho_t(X) = \operatorname{ess\,inf} \{ X_t \in L_t^\infty(\mathbf{P}) \mid X + X_t \in \mathcal{A}_t \}$, $X \in L^\infty(\mathbf{P})$. Viceversa, opportuni sottoinsiemi non vuoti di $L^\infty(\mathbf{P})$ definiscono in modo univoco misure convesse dinamiche di rischio. Intendiamo poi la proprietà di Fatou per ρ_t in maniera del tutto analoga alla parte teorica precedente. *Assumiamo* per tutto il seguito che $L^1(\mathbf{P})$ sia *separabile*. *Introduciamo* i seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{P}$: $\mathcal{P}^e \doteq \{ \mathbf{Q} \approx \mathbf{P} \}$ e, per ogni $t \in \mathcal{T}$, $\mathcal{P}_t \doteq \{ \mathbf{Q}|_{\mathcal{F}_t} \approx \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t} \}$ e $\mathcal{Q}_t \doteq \{ \mathbf{Q}|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t} \}$.

Una *misura convessa* dinamica (risp. *coerente*) è una successione $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ di misure convesse condizionali di rischio (risp. coerenti).

Fissiamo una misura convessa dinamica di rischio $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$.

Allora ogni ρ_t è caratterizzata dal proprio insieme di accettazione

$$\mathcal{A}_t \overset{def}{=} \{\, X \in L^\infty(\mathbf{P}) \mid \rho_t(X) \leq 0 \ (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \,\}$$

poiché $\rho_t(X) = \operatorname{ess\,inf} \{\, X_t \in L_t^\infty(\mathbf{P}) \mid X + X_t \in \mathcal{A}_t \,\}$, $X \in L^\infty(\mathbf{P})$.

Viceversa, opportuni sottoinsiemi non vuoti di $L^\infty(\mathbf{P})$ definiscono in modo univoco misure convesse dinamiche di rischio.

Intendiamo poi la proprietà di Fatou per ρ_t in maniera del tutto analoga alla parte teorica precedente.

Assumiamo per tutto il seguito che $L^1(\mathbf{P})$ sia *separabile*.

Introduciamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{P}$: $\mathcal{P}^e \doteq \{\, \mathbf{Q} \approx \mathbf{P} \,\}$ e, per ogni $t \in \mathcal{T}$, $\mathcal{P}_t \doteq \{\, \mathbf{Q}|_{\mathcal{F}_t} \approx \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t} \,\}$ e $\mathcal{Q}_t \doteq \{\, \mathbf{Q}|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t} \,\}$.

Una *misura convessa* dinamica (risp. *coerente*) è una successione $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ di misure convesse condizionali di rischio (risp. coerenti).

Fissiamo una misura convessa dinamica di rischio $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$.

Allora ogni ρ_t è caratterizzata dal proprio insieme di accettazione

$$\mathcal{A}_t \overset{def}{=} \{\, X \in L^\infty(\mathbf{P}) \mid \rho_t(X) \leq 0 \ (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \,\}$$

poiché $\rho_t(X) = \operatorname{ess\,inf}\{X_t \in L_t^\infty(\mathbf{P}) \mid X + X_t \in \mathcal{A}_t\}$, $X \in L^\infty(\mathbf{P})$.

Viceversa, opportuni sottoinsiemi non vuoti di $L^\infty(\mathbf{P})$ definiscono in modo univoco misure convesse dinamiche di rischio.

Intendiamo poi la proprietà di Fatou per ρ_t in maniera del tutto analoga alla parte teorica precedente.

Assumiamo per tutto il seguito che $L^1(\mathbf{P})$ sia *separabile*.

Introduciamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{P}$: $\mathcal{P}^e \doteq \{\, \mathbf{Q} \approx \mathbf{P} \,\}$ e, per ogni $t \in \mathcal{T}$, $\mathcal{P}_t \doteq \{\, \mathbf{Q}\,|_{\mathcal{F}_t} \approx \mathbf{P}\,|_{\mathcal{F}_t} \,\}$ e $\mathcal{Q}_t \doteq \{\, \mathbf{Q}\,|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{P}\,|_{\mathcal{F}_t} \,\}$.

Per ogni $t \in \mathcal{T}$ e $\widetilde{\mathcal{P}}_t \subseteq \mathcal{P}_t$, una funzione di penalità su $\widetilde{\mathcal{P}}_t$ è una mappa $\alpha_t \colon \widetilde{\mathcal{P}}_t \to L^0((\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P});]-\infty, +\infty])$ tale che, $\mathbf{P}$-q.c.,

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\mathbf{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}_t} \alpha_t(\mathbf{Q}) = \rho_t(0) \equiv 0.$$

Lemma

Per ogni $t \in \mathcal{T}$, se $\mathcal{A}_t$ è $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$-chiuso, allora è di penalità su $\mathcal{P}_t$ la funzione definita ponendo, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$,

$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \stackrel{def}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{Y \in \mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y | \mathcal{F}_t] \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{X \in L^\infty(\mathbf{P})} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X | \mathcal{F}_t] - \rho_t(X) \right\}.$$

Inoltre, per ogni $s \in \{0, \ldots, t\}$ ed ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$,

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) | \mathcal{F}_s] = \operatorname*{ess\,sup}_{Y \in \mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y | \mathcal{F}_s].$$

Per ogni $t \in \mathcal{T}$ e $\widetilde{\mathcal{P}}_t \subseteq \mathcal{P}_t$, una funzione di penalità su $\widetilde{\mathcal{P}}_t$ è una mappa $\alpha_t \colon \widetilde{\mathcal{P}}_t \to L^0((\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P});]-\infty, +\infty])$ tale che, $\mathbf{P}$-q.c.,

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\mathbf{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}_t} \alpha_t(\mathbf{Q}) = \rho_t(0) \equiv 0.$$

Lemma

Per ogni $t \in \mathcal{T}$, se $\mathcal{A}_t$ è $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$-chiuso, allora è di penalità su $\mathcal{P}_t$ la funzione definita ponendo, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$,

$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \overset{def}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{Y \in \mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y|\mathcal{F}_t] \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{X \in L^\infty(\mathbf{P})} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X|\mathcal{F}_t] - \rho_t(X) \right\}.$$

Inoltre, per ogni $s \in \{0, \dots, t\}$ ed ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$,

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})|\mathcal{F}_s] = \operatorname*{ess\,sup}_{Y \in \mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y|\mathcal{F}_s].$$

Per ogni $t \in \mathcal{T}$ e $\widetilde{\mathcal{P}}_t \subseteq \mathcal{P}_t$, una funzione di penalità su $\widetilde{\mathcal{P}}_t$ è una mappa $\alpha_t \colon \widetilde{\mathcal{P}}_t \to L^0((\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P});]-\infty, +\infty])$ tale che, $\mathbf{P}$-q.c.,

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\mathbf{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}_t} \alpha_t(\mathbf{Q}) = \rho_t(0) \equiv 0.$$

Lemma

Per ogni $t \in \mathcal{T}$, se $\mathcal{A}_t$ è $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$-chiuso, allora è di penalità su $\mathcal{P}_t$ la funzione definita ponendo, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$,

$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \overset{def}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{Y \in \mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y|\mathcal{F}_t] \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{X \in L^\infty(\mathbf{P})} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X|\mathcal{F}_t] - \rho_t(X) \right\}.$$

Inoltre, per ogni $s \in \{0, \dots, t\}$ ed ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$,

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})|\mathcal{F}_s] = \operatorname*{ess\,sup}_{Y \in \mathcal{A}_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y|\mathcal{F}_s].$$

Teorema (di rappresentazione delle misure convesse condizionali)

Per ogni $t \in \mathcal{T}$, sono equivalenti:

1. ρ_t *possiede la proprietà di Fatou.*
2. $\mathcal{A}_t$ *è* $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$*-chiuso.*
3. *Esiste una funzione di penalità* α_t *su un* $\widetilde{\mathcal{P}}_t \subseteq \mathcal{P}_t$ *tale che*

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}_t} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \mid \mathcal{F}_t] - \alpha_t(\mathbf{Q}) \right\}$$
$$= \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \mid \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \right\}$$
$$= \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \mid \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \right\}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}).$$

In tal caso, vale $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \leq \alpha_t(\mathbf{Q})$ *per ogni* $\mathbf{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}_t$

Teorema (di rappresentazione delle misure convesse condizionali)

Per ogni $t \in \mathcal{T}$, sono equivalenti:

1. ρ_t *possiede la proprietà di Fatou.*
2. $\mathcal{A}_t$ *è* $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$*-chiuso.*
3. *Esiste una funzione di penalità* α_t *su un* $\widetilde{\mathcal{P}}_t \subseteq \mathcal{P}_t$ *tale che*

$$\begin{aligned}\rho_t(X) &= \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\widetilde{\mathcal{P}}_t} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \mid \mathcal{F}_t] - \alpha_t(\mathbf{Q}) \right\} \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{P}_t} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \mid \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \right\} \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}_t} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \mid \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \right\}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}).\end{aligned}$$

In tal caso, vale $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \le \alpha_t(\mathbf{Q})$ *per ogni* $\mathbf{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}_t$

Teorema (di rappresentazione delle misure convesse condizionali)

Per ogni $t \in \mathcal{T}$, sono equivalenti:

1. ρ_t *possiede la proprietà di Fatou.*
2. $\mathcal{A}_t$ *è* $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$*-chiuso.*
3. *Esiste una funzione di penalità* α_t *su un* $\widetilde{\mathcal{P}}_t \subseteq \mathcal{P}_t$ *tale che*

$$\begin{aligned}\rho_t(X) &= \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\widetilde{\mathcal{P}}_t}\left\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t(\mathbf{Q})\right\}\\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{P}_t}\left\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})\right\}\\ &\equiv \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}_t}\left\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})\right\}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}).\end{aligned}$$

In tal caso, vale $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \leq \alpha_t(\mathbf{Q})$ *per ogni* $\mathbf{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}_t$.

Teorema (di rappresentazione delle misure convesse condizionali)

Per ogni $t \in \mathcal{T}$, sono equivalenti:

1. ρ_t *possiede la proprietà di Fatou.*
2. $\mathcal{A}_t$ *è* $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$*-chiuso.*
3. *Esiste una funzione di penalità* α_t *su un* $\widetilde{\mathcal{P}}_t \subseteq \mathcal{P}_t$ *tale che*

$$\begin{aligned}
\rho_t(X) &= \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\widetilde{\mathcal{P}}_t} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t(\mathbf{Q}) \right\} \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{P}_t} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \right\} \\
&\equiv \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}_t} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \right\}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}).
\end{aligned}$$

In tal caso, vale $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \leq \alpha_t(\mathbf{Q})$ *per ogni* $\mathbf{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}_t$.

Teorema (di rappresentazione delle misure convesse condizionali)

Per ogni $t \in \mathcal{T}$, sono equivalenti:

1. *ρ_t possiede la proprietà di Fatou.*
2. *$\mathcal{A}_t$ è $\sigma(L^\infty(\mathbf{P}), L^1(\mathbf{P}))$-chiuso.*
3. *Esiste una funzione di penalità α_t su un $\widetilde{\mathcal{P}}_t \subseteq \mathcal{P}_t$ tale che*

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}_t} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t(\mathbf{Q}) \right\}$$
$$= \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \right\}$$
$$\equiv \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \right\}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}).$$

In tal caso, vale $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \leq \alpha_t(\mathbf{Q})$ per ogni $\mathbf{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}_t$.

Corollario (rappresentazione delle convesse e delle coerenti)

1. *ρ_t verifica la proprietà di Fatou se e solo se, per ogni* $\mathbf{P}^* \in \mathcal{P}^e$,

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t^f(\mathbf{P}^*)} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \right\}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}),$$

$$\textit{dove } \mathcal{Q}_t^f(\mathbf{P}^*) \doteq \left\{ \mathbf{Q}\,|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{P}^*|_{\mathcal{F}_t}, \mathbf{E}^{\mathbf{P}^*}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})] < +\infty \right\}.$$

2. *Se ρ_t è coerente, ρ_t verifica Fatou se e solo se,* $\forall\, \mathbf{P}^* \in \mathcal{P}^e$,

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t^0(\mathbf{P}^*)} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X|\mathcal{F}_t], \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}),$$

$$\textit{dove } \mathcal{Q}_t^0(\mathbf{P}^*) \doteq \left\{ \mathbf{Q}\,|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{P}^*|_{\mathcal{F}_t}, \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) = 0 \ \ (\mathbf{P}^*\text{-}q.c.) \right\}.$$

Corollario (rappresentazione delle convesse e delle coerenti)

1. *ρ_t verifica la proprietà di Fatou se e solo se, per ogni $\mathbf{P}^* \in \mathcal{P}^e$,*

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t^f(\mathbf{P}^*)} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \right\}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}),$$

dove $\mathcal{Q}_t^f(\mathbf{P}^*) \doteq \left\{ \mathbf{Q}\,|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{P}^*|_{\mathcal{F}_t}, \, \mathbf{E}^{\mathbf{P}^*}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})] < +\infty \right\}.$

2. *Se ρ_t è coerente, ρ_t verifica Fatou se e solo se, $\forall\, \mathbf{P}^* \in \mathcal{P}^e$,*

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t^0(\mathbf{P}^*)} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X|\mathcal{F}_t], \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}),$$

dove $\mathcal{Q}_t^0(\mathbf{P}^*) \doteq \left\{ \mathbf{Q}\,|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{P}^*|_{\mathcal{F}_t}, \, \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) = 0 \ (\mathbf{P}^*\text{-}q.c.) \right\}.$

Teorema (di raffinamento della rappresentazione)

Assumiamo che ρ_t soddisfi la proprietà di Fatou. Se esiste $\mathbf{P}^* \in \mathcal{P}^e$ tale che $\alpha_t^{\min}(\mathbf{P}^*) < +\infty$ (ES: ρ_t "sensibile"), allora

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \mid \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \right\}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}).$$

Nel caso che $\mathbf{E}^{\mathbf{P}^*}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{P}^*)] < +\infty$ (ES: ρ_t "sensibile"), vale

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t^{f,e}(\mathbf{P}^*)} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \mid \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \right\}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}),$$

se $\mathcal{Q}_t^{f,e}(\mathbf{P}^*) \doteq \left\{ \mathbf{Q} \in \mathcal{P}^e \,\middle|\, \mathbf{Q}|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{P}^*|_{\mathcal{F}_t},\ \mathbf{E}^{\mathbf{P}^*}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})] < +\infty \right\}.$

Teorema (di raffinamento della rappresentazione)

Assumiamo che ρ_t soddisfi la proprietà di Fatou. Se esiste $\mathbf{P}^* \in \mathcal{P}^e$ tale che $\alpha_t^{\min}(\mathbf{P}^*) < +\infty$ (ES: ρ_t "sensibile"), allora

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \right\}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}).$$

Nel caso che $\mathbf{E}^{\mathbf{P}^*}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{P}^*)] < +\infty$ (ES: ρ_t "sensibile"), vale

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t^{f,e}(\mathbf{P}^*)} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \right\}, \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}),$$

se $\mathcal{Q}_t^{f,e}(\mathbf{P}^*) \doteq \left\{ \mathbf{Q} \in \mathcal{P}^e \,\middle|\, \mathbf{Q}|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{P}^*|_{\mathcal{F}_t},\ \mathbf{E}^{\mathbf{P}^*}[\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})] < +\infty \right\}.$

Nota: per ogni $t \in \mathcal{T}$, $\varepsilon > 0$ e $A \in \mathcal{F}$, è $\rho_t(-\varepsilon \mathbb{1}_A) \geq 0$.

Definizione (Sensibilità)

Diciamo che ρ_t è sensibile se, per ogni $\varepsilon > 0$ ed ogni $A \in \mathcal{F}$ che non sia $\mathbf{P}$-trascurabile, risulta $\mathbf{P}[\rho_t(-\varepsilon \mathbb{1}_A) > 0] > 0$.

Lemma

Per ogni $t \in \mathcal{T}$ e $\varepsilon > 0$, $\mathcal{Q}_t^\varepsilon \doteq \{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t \mid \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) < \varepsilon\ (\mathbf{P}\text{-}q.c.)\} \neq \emptyset$. Se ρ_t possiede la proprietà di Fatou e se è sensibile, allora

$$\mathcal{Q}_t^\varepsilon \cap \mathcal{P}^e \neq \emptyset.$$

Nota: per ogni $t \in \mathcal{T}$, $\varepsilon > 0$ e $A \in \mathcal{F}$, è $\rho_t(-\varepsilon \mathbb{1}_A) \geq 0$.

Definizione (Sensibilità)

Diciamo che ρ_t è sensibile se, per ogni $\varepsilon > 0$ ed ogni $A \in \mathcal{F}$ che non sia $\mathbf{P}$-trascurabile, risulta $\mathbf{P}[\rho_t(-\varepsilon \mathbb{1}_A) > 0] > 0$.

Lemma

Per ogni $t \in \mathcal{T}$ e $\varepsilon > 0$, $\mathcal{Q}_t^\varepsilon \doteq \left\{ \mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t \,\middle|\, \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) < \varepsilon \; (\mathbf{P}\text{-q.c.}) \right\} \neq \emptyset$. Se ρ_t possiede la proprietà di Fatou e se è sensibile, allora

$$\mathcal{Q}_t^\varepsilon \cap \mathcal{P}^e \neq \emptyset.$$

Nota: per ogni $t \in \mathcal{T}$, $\varepsilon > 0$ e $A \in \mathcal{F}$, è $\rho_t(-\varepsilon \mathbb{1}_A) \geq 0$.

Definizione (Sensibilità)

Diciamo che ρ_t è sensibile se, per ogni $\varepsilon > 0$ ed ogni $A \in \mathcal{F}$ che non sia $\mathbf{P}$-trascurabile, risulta $\mathbf{P}[\rho_t(-\varepsilon \mathbb{1}_A) > 0] > 0$.

Lemma

Per ogni $t \in \mathcal{T}$ *e* $\varepsilon > 0$, $\mathcal{Q}_t^\varepsilon \doteq \left\{ \mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t \,\middle|\, \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) < \varepsilon \; (\mathbf{P}\text{-}q.c.) \right\} \neq \emptyset$.
Se ρ_t possiede la proprietà di Fatou e se è sensibile, allora

$$\mathcal{Q}_t^\varepsilon \cap \mathcal{P}^e \neq \emptyset.$$

Nota: per ogni $t \in \mathcal{T}$, $\varepsilon > 0$ e $A \in \mathcal{F}$, è $\rho_t(-\varepsilon \mathbb{1}_A) \geq 0$.

Definizione (Sensibilità)

Diciamo che ρ_t è sensibile se, per ogni $\varepsilon > 0$ ed ogni $A \in \mathcal{F}$ che non sia $\mathbf{P}$-trascurabile, risulta $\mathbf{P}[\rho_t(-\varepsilon \mathbb{1}_A) > 0] > 0$.

Lemma

Per ogni $t \in \mathcal{T}$ *e* $\varepsilon > 0$, $\mathcal{Q}_t^\varepsilon \doteq \left\{ \mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t \,\middle|\, \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) < \varepsilon \,(\mathbf{P}\text{-}q.c.) \right\} \neq \emptyset$. *Se* ρ_t *possiede la proprietà di Fatou e se è sensibile, allora*

$$\mathcal{Q}_t^\varepsilon \cap \mathcal{P}^e \neq \emptyset.$$

Nota: per ogni $t \in \mathcal{T}$, è sempre $\rho_t = \rho_t(-\rho_t)$ ($\mathbf{P}$-q.c.).

Definizione (Consistenza temporale forte e debole)

$(\rho_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo (*in senso forte*) se, per ogni $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$, vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

1. $\rho_t = \rho_t(-\rho_{t+1})$;
2. $\forall\, s \in \mathcal{T}$ con $s + t \in \mathcal{T}$, $\rho_t = \rho_t(-\rho_{t+s})$;
3. $\forall\, X, Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, $\rho_{t+1}(X) \leq \rho_{t+1}(Y) \Rightarrow \rho_t(X) \leq \rho_t(Y)$.

$(\rho_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è *consistente rispetto al tempo* in senso debole se:

- $\forall\, t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ e $\forall\, X \in L^\infty(\mathbf{P})$, $\mathcal{A}_{t+1} \subseteq \mathcal{A}_t$.

Definiamo $\mathcal{Q}^* \doteq \left\{ \mathbf{Q} \in \mathcal{P}^e \;\middle|\; \alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) = \sup_{Y \in \mathcal{A}_0} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y] < +\infty \right\}$.

Nota: per ogni $t \in \mathcal{T}$, è sempre $\rho_t = \rho_t(-\rho_t)$ (**P**-q.c.).

Definizione (Consistenza temporale forte e debole)

$(\rho_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo (*in senso forte*) se, per ogni $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$, vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

1. $\rho_t = \rho_t(-\rho_{t+1})$.
2. $\forall\, s \in \mathcal{T}$ con $s + t \in \mathcal{T}$, $\rho_t = \rho_t(-\rho_{t+s})$.
3. $\forall\, X, Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, $\rho_{t+1}(X) \leq \rho_{t+1}(Y) \Rightarrow \rho_t(X) \leq \rho_t(Y)$.

$(\rho_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è *consistente rispetto al tempo* in senso debole se:

- $\forall\, t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ e $\forall\, X \in L^\infty(\mathbf{P})$, $\mathcal{A}_{t+1} \subseteq \mathcal{A}_t$.

Definiamo $\mathcal{Q}^* \doteq \left\{ \mathbf{Q} \in \mathcal{P}^e \;\middle|\; \alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) = \sup_{Y \in \mathcal{A}_0} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y] < +\infty \right\}$.

Nota: per ogni $t \in \mathcal{T}$, è sempre $\rho_t = \rho_t(-\rho_t)$ ($\mathbf{P}$-q.c.).

Definizione (Consistenza temporale forte e debole)

$(\rho_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo (*in senso forte*) se, per ogni $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$, vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

1. $\rho_t = \rho_t(-\rho_{t+1})$.
2. $\forall\, s \in \mathcal{T}$ con $s + t \in \mathcal{T}$, $\rho_t = \rho_t(-\rho_{t+s})$.
3. $\forall\, X, Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, $\rho_{t+1}(X) \le \rho_{t+1}(Y) \Rightarrow \rho_t(X) \le \rho_t(Y)$.

$(\rho_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è *consistente rispetto al tempo* in senso debole se:

- $\forall\, t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ e $\forall\, X \in L^\infty(\mathbf{P})$, $\mathcal{A}_{t+1} \subseteq \mathcal{A}_t$.

Definiamo $\mathcal{Q}^* \doteq \left\{ \mathbf{Q} \in \mathcal{P}^e \;\middle|\; \alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) = \sup_{Y \in \mathcal{A}_0} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y] < +\infty \right\}$.

Nota: per ogni $t \in \mathcal{T}$, è sempre $\rho_t = \rho_t(-\rho_t)$ ($\mathbf{P}$-q.c.).

Definizione (Consistenza temporale forte e debole)

$(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo (*in senso forte*) se, per ogni $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$, vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

1. $\rho_t = \rho_t(-\rho_{t+1})$.
2. $\forall\, s \in \mathcal{T}$ con $s + t \in \mathcal{T}$, $\rho_t = \rho_t(-\rho_{t+s})$.
3. $\forall\, X, Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, $\rho_{t+1}(X) \le \rho_{t+1}(Y) \Rightarrow \rho_t(X) \le \rho_t(Y)$.

$(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è *consistente rispetto al tempo* in senso debole se:

- $\forall\, t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ e $\forall\, X \in L^\infty(\mathbf{P})$, $\mathcal{A}_{t+1} \subseteq \mathcal{A}_t$.

Definiamo $\mathcal{Q}^* \doteq \left\{ \mathbf{Q} \in \mathcal{P}^e \;\middle|\; \alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) = \sup_{Y\in\mathcal{A}_0} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y] < +\infty \right\}$.

Nota: per ogni $t \in \mathcal{T}$, è sempre $\rho_t = \rho_t(-\rho_t)$ (**P**-q.c.).

Definizione (Consistenza temporale forte e debole)

$(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo (*in senso forte*) se, per ogni $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$, vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

1. $\rho_t = \rho_t(-\rho_{t+1})$.
2. $\forall\, s \in \mathcal{T}$ con $s + t \in \mathcal{T}$, $\rho_t = \rho_t(-\rho_{t+s})$.
3. $\forall\, X, Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, $\rho_{t+1}(X) \le \rho_{t+1}(Y) \Rightarrow \rho_t(X) \le \rho_t(Y)$.

$(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è *consistente rispetto al tempo* in senso debole se:

- $\forall\, t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ e $\forall\, X \in L^\infty(\mathbf{P})$, $\mathcal{A}_{t+1} \subseteq \mathcal{A}_t$.

Definiamo $\mathcal{Q}^* \doteq \left\{ \mathbf{Q} \in \mathcal{P}^e \,\middle|\, \alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) \equiv \sup_{Y \in \mathcal{A}_0} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y] < +\infty \right\}$.

Nota: per ogni $t \in \mathcal{T}$, è sempre $\rho_t = \rho_t(-\rho_t)$ (**P**-q.c.).

Definizione (Consistenza temporale forte e debole)

$(\rho_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo (*in senso forte*) se, per ogni $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$, vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

1. $\rho_t = \rho_t(-\rho_{t+1})$.
2. $\forall\, s \in \mathcal{T}$ con $s + t \in \mathcal{T}$, $\rho_t = \rho_t(-\rho_{t+s})$.
3. $\forall\, X, Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, $\rho_{t+1}(X) \leq \rho_{t+1}(Y) \Rightarrow \rho_t(X) \leq \rho_t(Y)$.

$(\rho_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è *consistente rispetto al tempo* in senso debole se:

- $\forall\, t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ e $\forall\, X \in L^\infty(\mathbf{P})$, $\mathcal{A}_{t+1} \subseteq \mathcal{A}_t$.

Definiamo $\mathcal{Q}^* \doteq \left\{ \mathbf{Q} \in \mathcal{P}^e \,\middle|\, \alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) \equiv \sup_{Y \in \mathcal{A}_0} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y] < +\infty \right\}$.

Nota: per ogni $t \in \mathcal{T}$, è sempre $\rho_t = \rho_t(-\rho_t)$ ($\mathbf{P}$-q.c.).

Definizione (Consistenza temporale forte e debole)

$(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo (*in senso forte*) se, per ogni $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$, vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

1. $\rho_t = \rho_t(-\rho_{t+1})$.
2. $\forall\, s \in \mathcal{T}$ con $s + t \in \mathcal{T}$, $\rho_t = \rho_t(-\rho_{t+s})$.
3. $\forall\, X, Y \in L^\infty(\mathbf{P})$, $\rho_{t+1}(X) \leq \rho_{t+1}(Y) \Rightarrow \rho_t(X) \leq \rho_t(Y)$.

$(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è *consistente rispetto al tempo* in senso debole se:

- $\forall\, t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ e $\forall\, X \in L^\infty(\mathbf{P})$, $\mathcal{A}_{t+1} \subseteq \mathcal{A}_t$.

Definiamo $\mathcal{Q}^* \doteq \left\{ \mathbf{Q} \in \mathcal{P}^e \;\middle|\; \alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) \equiv \sup_{Y \in \mathcal{A}_0} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y] < +\infty \right\}$.

Nota: se ρ_0 possiede la proprietà di Fatou e se è sensibile, allora

$$\mathcal{Q}^* \neq \emptyset.$$

In questo caso poi, se $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo (in senso forte), allora ρ_t è sensibile per ogni $t \in \mathcal{T}$.

Proposizione

Assumiamo che ρ_t verifichi Fatou per ogni $t \in \mathcal{T}$. Se $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo in senso debole allora, $\forall\, \mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$,

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_{t+1}^{\min}(\mathbf{Q})|\mathcal{F}_t] \leq \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}), \quad t \in \mathcal{T}\setminus\{T\},$$

e, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, $(\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}))_{t\in\mathcal{T}}$ è una $\mathbf{Q}$-$\mathbb{F}$-supermartingala. Viceversa, se per ogni $t \in \mathcal{T}\setminus\{T\}$ vale la rappresentazione col "$\operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\approx\mathbf{P}}$" per ρ_t, allora questa disuguaglianza implica che $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ sia consistente rispetto al tempo in senso debole.

Nota: se ρ_0 possiede la proprietà di Fatou e se è sensibile, allora

$$\mathcal{Q}^* \neq \emptyset.$$

In questo caso poi, se $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo (in senso forte), allora ρ_t è sensibile per ogni $t \in \mathcal{T}$.

Proposizione

Assumiamo che ρ_t verifichi Fatou per ogni $t \in \mathcal{T}$. Se $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo in senso debole allora, $\forall\, \mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$,

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_{t+1}^{\min}(\mathbf{Q})|\mathcal{F}_t] \leq \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}), \quad t \in \mathcal{T}\setminus\{T\},$$

e, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, $(\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}))_{t\in\mathcal{T}}$ è una $\mathbf{Q}$-$\mathbb{F}$-supermartingala. Viceversa, se per ogni $t \in \mathcal{T}\setminus\{T\}$ vale la rappresentazione col "$\operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\approx\mathbf{P}}$" per ρ_t, allora questa disuguaglianza implica che $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ sia consistente rispetto al tempo in senso debole.

Nota: se ρ_0 possiede la proprietà di Fatou e se è sensibile, allora

$$\mathcal{Q}^* \neq \emptyset.$$

In questo caso poi, se $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo (in senso forte), allora ρ_t è sensibile per ogni $t \in \mathcal{T}$.

Proposizione

Assumiamo che ρ_t verifichi Fatou per ogni $t \in \mathcal{T}$. Se $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo in senso debole allora, $\forall\, \mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$,

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_{t+1}^{\min}(\mathbf{Q})|\mathcal{F}_t] \leq \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}), \quad t \in \mathcal{T}\setminus\{T\},$$

e, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, $(\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}))_{t\in\mathcal{T}}$ è una $\mathbf{Q}$-$\mathbb{F}$-supermartingala. Viceversa, se per ogni $t \in \mathcal{T}\setminus\{T\}$ vale la rappresentazione col "$\operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\approx\mathbf{P}}$" per ρ_t, allora questa disuguaglianza implica che $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ sia consistente rispetto al tempo in senso debole.

Nota: se ρ_0 possiede la proprietà di Fatou e se è sensibile, allora

$$\mathcal{Q}^* \neq \emptyset.$$

In questo caso poi, se $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo (in senso forte), allora ρ_t è sensibile per ogni $t \in \mathcal{T}$.

Proposizione

Assumiamo che ρ_t verifichi Fatou per ogni $t \in \mathcal{T}$. Se $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo in senso debole allora, $\forall\, \mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$,

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_{t+1}^{\min}(\mathbf{Q})|\mathcal{F}_t] \leq \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}), \quad t \in \mathcal{T}\setminus\{T\},$$

e, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, $(\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}))_{t\in\mathcal{T}}$ è una $\mathbf{Q}$-$\mathbb{F}$-supermartingala. Viceversa, se per ogni $t \in \mathcal{T}\setminus\{T\}$ vale la rappresentazione col "$\operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\approx\mathbf{P}}$" per ρ_t, allora questa disuguaglianza implica che $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ sia consistente rispetto al tempo in senso debole.

Definiamo adesso, per ogni $s, t \in \mathcal{T}$ con $s + t \in \mathcal{T}$,

$$\mathcal{A}_{t,t+s} \stackrel{def}{=} \mathcal{A}_t \cap L^\infty_{t+s}(\mathbf{P}) \equiv \left\{ X \in L^\infty_{t+s}(\mathbf{P}) \;\middle|\; \rho_t(X) \leq 0 \right\}.$$

Se ρ_t soddisfa Fatou, allora è di penalità su $\mathcal{P}_t$ la funzione

$$\alpha^{\min}_{t,t+s}(\mathbf{Q}) \stackrel{def}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{Y \in \mathcal{A}_{t,t+s}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y|\mathcal{F}_t], \quad \mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t,$$

e $\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha^{\min}_{t,t+s}(\mathbf{Q}) \right\}$, $X \in L^\infty_{t+s}(\mathbf{P})$.

Lemma

1. $\forall X \in L^\infty(\mathbf{P})$, $-\rho_{t+s}(X) \in \mathcal{A}_{t,t+s} \Leftrightarrow X \in \mathcal{A}_{t,t+s} + \mathcal{A}_{t+s}$.
2. $\rho_t(-\rho_{t+s}) \leq \rho_t \Leftrightarrow \mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A}_{t,t+s} + \mathcal{A}_{t+s}$.
3. $\rho_t(-\rho_{t+s}) \geq \rho_t \Leftrightarrow \mathcal{A}_t \supseteq \mathcal{A}_{t,t+s} + \mathcal{A}_{t+s}$.

Definiamo adesso, per ogni $s, t \in \mathcal{T}$ con $s + t \in \mathcal{T}$,

$$\mathcal{A}_{t,t+s} \overset{def}{=} \mathcal{A}_t \cap L^\infty_{t+s}(\mathbf{P}) \equiv \left\{ X \in L^\infty_{t+s}(\mathbf{P}) \;\middle|\; \rho_t(X) \leq 0 \right\}.$$

Se ρ_t soddisfa Fatou, allora è di penalità su $\mathcal{P}_t$ la funzione

$$\alpha^{\min}_{t,t+s}(\mathbf{Q}) \overset{def}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{Y \in \mathcal{A}_{t,t+s}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y \mid \mathcal{F}_t], \quad \mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t,$$

e $\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \mid \mathcal{F}_t] - \alpha^{\min}_{t,t+s}(\mathbf{Q}) \right\}$, $X \in L^\infty_{t+s}(\mathbf{P})$.

Definiamo adesso, per ogni $s, t \in \mathcal{T}$ con $s + t \in \mathcal{T}$,

$$\mathcal{A}_{t,t+s} \stackrel{def}{=} \mathcal{A}_t \cap L^\infty_{t+s}(\mathbf{P}) \equiv \left\{ X \in L^\infty_{t+s}(\mathbf{P}) \;\middle|\; \rho_t(X) \leq 0 \right\}.$$

Se ρ_t soddisfa Fatou, allora è di penalità su $\mathcal{P}_t$ la funzione

$$\alpha^{\min}_{t,t+s}(\mathbf{Q}) \stackrel{def}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{Y \in \mathcal{A}_{t,t+s}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y | \mathcal{F}_t], \quad \mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t,$$

e $\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X | \mathcal{F}_t] - \alpha^{\min}_{t,t+s}(\mathbf{Q}) \right\}$, $X \in L^\infty_{t+s}(\mathbf{P})$.

Lemma

1. $\forall X \in L^\infty(\mathbf{P})$, $-\rho_{t+s}(X) \in \mathcal{A}_{t,t+s} \Leftrightarrow X \in \mathcal{A}_{t,t+s} + \mathcal{A}_{t+s}$.
2. $\rho_t(-\rho_{t+s}) \leq \rho_t \Leftrightarrow \mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A}_{t,t+s} + \mathcal{A}_{t+s}$.
3. $\rho_t(-\rho_{t+s}) \geq \rho_t \Leftrightarrow \mathcal{A}_t \supseteq \mathcal{A}_{t,t+s} + \mathcal{A}_{t+s}$.

Definiamo adesso, per ogni $s, t \in \mathcal{T}$ con $s + t \in \mathcal{T}$,

$$\mathcal{A}_{t,t+s} \stackrel{def}{=} \mathcal{A}_t \cap L^\infty_{t+s}(\mathbf{P}) \equiv \left\{ X \in L^\infty_{t+s}(\mathbf{P}) \;\middle|\; \rho_t(X) \leq 0 \right\}.$$

Se ρ_t soddisfa Fatou, allora è di penalità su $\mathcal{P}_t$ la funzione

$$\alpha^{\min}_{t,t+s}(\mathbf{Q}) \stackrel{def}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{Y \in \mathcal{A}_{t,t+s}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y \,|\, \mathcal{F}_t], \quad \mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t,$$

e $\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha^{\min}_{t,t+s}(\mathbf{Q}) \right\}$, $X \in L^\infty_{t+s}(\mathbf{P})$.

Lemma

1. $\forall\, X \in L^\infty(\mathbf{P})$, $-\rho_{t+s}(X) \in \mathcal{A}_{t,t+s} \Leftrightarrow X \in \mathcal{A}_{t,t+s} + \mathcal{A}_{t+s}$.
2. $\rho_t(-\rho_{t+s}) \leq \rho_t \Leftrightarrow \mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A}_{t,t+s} + \mathcal{A}_{t+s}$.
3. $\rho_t(-\rho_{t+s}) \geq \rho_t \Leftrightarrow \mathcal{A}_t \supseteq \mathcal{A}_{t,t+s} + \mathcal{A}_{t+s}$.

Definiamo adesso, per ogni $s, t \in \mathcal{T}$ con $s + t \in \mathcal{T}$,

$$\mathcal{A}_{t,t+s} \overset{def}{=} \mathcal{A}_t \cap L^\infty_{t+s}(\mathbf{P}) \equiv \left\{ X \in L^\infty_{t+s}(\mathbf{P}) \,\middle|\, \rho_t(X) \leq 0 \right\}.$$

Se ρ_t soddisfa Fatou, allora è di penalità su $\mathcal{P}_t$ la funzione

$$\alpha^{\min}_{t,t+s}(\mathbf{Q}) \overset{def}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{Y \in \mathcal{A}_{t,t+s}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-Y|\mathcal{F}_t], \quad \mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t,$$

e $\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}_t} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X|\mathcal{F}_t] - \alpha^{\min}_{t,t+s}(\mathbf{Q}) \right\}$, $X \in L^\infty_{t+s}(\mathbf{P})$.

Lemma

1. $\forall\, X \in L^\infty(\mathbf{P})$, $-\rho_{t+s}(X) \in \mathcal{A}_{t,t+s} \Leftrightarrow X \in \mathcal{A}_{t,t+s} + \mathcal{A}_{t+s}$.
2. $\rho_t(-\rho_{t+s}) \leq \rho_t \Leftrightarrow \mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A}_{t,t+s} + \mathcal{A}_{t+s}$.
3. $\rho_t(-\rho_{t+s}) \geq \rho_t \Leftrightarrow \mathcal{A}_t \supseteq \mathcal{A}_{t,t+s} + \mathcal{A}_{t+s}$.

Teorema (di raffinamento della rappresentazione)

Assumiamo che $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$ e che ρ_t verifichi Fatou per ogni $t \in \mathcal{T}$. Allora $(\rho_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo se e solo se:

1. *Per ogni $s, t \in \mathcal{T}$ con $s + t \in \mathcal{T}$, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{t,t+s} + \mathcal{A}_{t+s}$.*
2. *Per ogni $s, t \in \mathcal{T}$ con $s + t \in \mathcal{T}$ e per ogni $\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$,*
$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) = \alpha_{t,t+s}^{\min}(\mathbf{Q}) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_{t+s}^{\min}(\mathbf{Q}) | \mathcal{F}_t].$$
3. *Per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, è una $\mathbf{Q}$-$\mathbb{F}$-supermartingala il processo $(V_t^{\mathbf{Q}}(X))_{t \in \mathcal{T}} \doteq (\rho_t(X) + \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}))_{t \in \mathcal{T}}$.*

In ciascun caso, e per ogni $t \in \mathcal{T}$ e $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,
$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X | \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \right\}.$$

Teorema (di raffinamento della rappresentazione)

Assumiamo che $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$ e che ρ_t verifichi Fatou per ogni $t \in \mathcal{T}$. Allora $(\rho_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo se e solo se:

1. *Per ogni $s, t \in \mathcal{T}$ con $s + t \in \mathcal{T}$, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{t,t+s} + \mathcal{A}_{t+s}$.*
2. *Per ogni $s, t \in \mathcal{T}$ con $s + t \in \mathcal{T}$ e per ogni $\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$,*

$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) = \alpha_{t,t+s}^{\min}(\mathbf{Q}) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_{t+s}^{\min}(\mathbf{Q}) | \mathcal{F}_t].$$

3. *Per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, è una $\mathbf{Q}$-$\mathbb{F}$-supermartingala il processo $(V_t^{\mathbf{Q}}(X))_{t \in \mathcal{T}} \doteq (\rho_t(X) + \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}))_{t \in \mathcal{T}}$.*

In ciascun caso, e per ogni $t \in \mathcal{T}$ e $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X | \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \right\}.$$

Teorema (di raffinamento della rappresentazione)

Assumiamo che $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$ *e che* ρ_t *verifichi Fatou per ogni* $t \in \mathcal{T}$. *Allora* $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ *è consistente rispetto al tempo se e solo se:*

1. *Per ogni* $s, t \in \mathcal{T}$ *con* $s + t \in \mathcal{T}$, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{t,t+s} + \mathcal{A}_{t+s}$.
2. *Per ogni* $s, t \in \mathcal{T}$ *con* $s + t \in \mathcal{T}$ *e per ogni* $\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$,
$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) = \alpha_{t,t+s}^{\min}(\mathbf{Q}) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_{t+s}^{\min}(\mathbf{Q}) | \mathcal{F}_t].$$
3. *Per ogni* $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ *e* $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, *è una* $\mathbf{Q}$-$\mathbb{F}$-*supermartingala il processo* $(V_t^{\mathbf{Q}}(X))_{t\in\mathcal{T}} \doteq (\rho_t(X) + \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}))_{t\in\mathcal{T}}$.

In ciascun caso, e per ogni $t \in \mathcal{T}$ *e* $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}^*} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X | \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \right\}.$$

Teorema (di raffinamento della rappresentazione)

Assumiamo che $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$ *e che* ρ_t *verifichi Fatou per ogni* $t \in \mathcal{T}$. *Allora* $(\rho_t)_{t \in \mathcal{T}}$ *è consistente rispetto al tempo se e solo se:*

1. *Per ogni* $s, t \in \mathcal{T}$ *con* $s + t \in \mathcal{T}$, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{t,t+s} + \mathcal{A}_{t+s}$.
2. *Per ogni* $s, t \in \mathcal{T}$ *con* $s + t \in \mathcal{T}$ *e per ogni* $\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$,
$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) = \alpha_{t,t+s}^{\min}(\mathbf{Q}) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_{t+s}^{\min}(\mathbf{Q}) | \mathcal{F}_t].$$
3. *Per ogni* $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ *e* $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, *è una* $\mathbf{Q}$-$\mathbb{F}$-*supermartingala il processo* $(V_t^{\mathbf{Q}}(X))_{t \in \mathcal{T}} \doteq (\rho_t(X) + \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}))_{t \in \mathcal{T}}$.

In ciascun caso, e per ogni $t \in \mathcal{T}$ *e* $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X | \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \right\}.$$

Teorema (di raffinamento della rappresentazione)

Assumiamo che $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$ e che ρ_t verifichi Fatou per ogni $t \in \mathcal{T}$. Allora $(\rho_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo se e solo se:

1. *Per ogni $s, t \in \mathcal{T}$ con $s + t \in \mathcal{T}$, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{t,t+s} + \mathcal{A}_{t+s}$.*
2. *Per ogni $s, t \in \mathcal{T}$ con $s + t \in \mathcal{T}$ e per ogni $\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$,*
$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) = \alpha_{t,t+s}^{\min}(\mathbf{Q}) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\alpha_{t+s}^{\min}(\mathbf{Q}) \,|\, \mathcal{F}_t].$$
3. *Per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, è una $\mathbf{Q}$-$\mathbb{F}$-supermartingala il processo $(V_t^{\mathbf{Q}}(X))_{t \in \mathcal{T}} \doteq (\rho_t(X) + \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}))_{t \in \mathcal{T}}$.*

In ciascun caso, e per ogni $t \in \mathcal{T}$ e $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \right\}.$$

Definizione (Insieme stabile; incollamento di probabilità)

Un $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}^e$ è un insieme stabile se, per ogni $\mathbf{Q}^1, \mathbf{Q}^2, \mathbf{Q}^3 \in \mathcal{Q}$, $t \in \mathcal{T}$ e $A_t \in \mathcal{F}_t$, resta in $\mathcal{Q}$ la probabilità $\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$ definita da

$$\mathbf{Q}[A] \overset{def}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^1}\Big[\mathbb{1}_{A_t}\mathbf{Q}^2[A|\mathcal{F}_t] + \mathbb{1}_{\Omega\setminus A_t}\mathbf{Q}^3[A|\mathcal{F}_t]\Big], \quad A \in \mathcal{F}$$

($\mathbf{Q}^i[A|\mathcal{F}_t] \equiv \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^i}[\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_t]$ è la probabilità $\mathcal{F}_t$-*condizionale* di A data $\mathbf{Q}^i$). Chiamiamo $\mathbf{Q}$ l'incollamento *di* $\mathbf{Q}^1, \mathbf{Q}^2, \mathbf{Q}^3$ *in* t *via* A_t.

Nota: $\mathbf{Q}\,|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{Q}^1\,|_{\mathcal{F}_t}$ e, se $Z_t^i := \frac{d(\mathbf{Q}^i\,|_{\mathcal{F}_t})}{d(\mathbf{P}\,|_{\mathcal{F}_t})}$ e $Z_T := \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$, allora

$$Z_T = \mathbb{1}_{A_t}\frac{Z_t^1}{Z_t^2}Z_T^2 + \mathbb{1}_{\Omega\setminus A_t}\frac{Z_t^1}{Z_t^3}Z_T^3.$$

Definizione (Insieme stabile; incollamento di probabilità)

Un $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}^e$ è un insieme stabile se, per ogni $\mathbf{Q}^1, \mathbf{Q}^2, \mathbf{Q}^3 \in \mathcal{Q}$, $t \in \mathcal{T}$ e $A_t \in \mathcal{F}_t$, resta in $\mathcal{Q}$ la probabilità $\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$ definita da

$$\mathbf{Q}[A] \stackrel{def}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^1}\left[\mathbb{1}_{A_t}\mathbf{Q}^2[A|\mathcal{F}_t] + \mathbb{1}_{\Omega\setminus A_t}\mathbf{Q}^3[A|\mathcal{F}_t]\right], \quad A \in \mathcal{F}$$

($\mathbf{Q}^i[A|\mathcal{F}_t] \equiv \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^i}[\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_t]$ è la probabilità $\mathcal{F}_t$-*condizionale* di A data $\mathbf{Q}^i$). Chiamiamo $\mathbf{Q}$ l'incollamento *di* $\mathbf{Q}^1, \mathbf{Q}^2, \mathbf{Q}^3$ *in* t *via* A_t.

Nota: $\mathbf{Q}|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{Q}^1|_{\mathcal{F}_t}$ e, se $Z_t^i := \frac{d(\mathbf{Q}^i|_{\mathcal{F}_t})}{d(\mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t})}$ e $Z_T := \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$, allora

$$Z_T = \mathbb{1}_{A_t}\frac{Z_t^1}{Z_t^2}Z_T^2 + \mathbb{1}_{\Omega\setminus A_t}\frac{Z_t^1}{Z_t^3}Z_T^3.$$

Definizione (Insieme stabile; incollamento di probabilità)

Un $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}^e$ è un insieme stabile se, per ogni $\mathbf{Q}^1, \mathbf{Q}^2, \mathbf{Q}^3 \in \mathcal{Q}$, $t \in \mathcal{T}$ e $A_t \in \mathcal{F}_t$, resta in $\mathcal{Q}$ la probabilità $\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$ definita da

$$\mathbf{Q}[A] \stackrel{def}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^1}\left[\mathbb{1}_{A_t}\mathbf{Q}^2[A|\mathcal{F}_t] + \mathbb{1}_{\Omega\setminus A_t}\mathbf{Q}^3[A|\mathcal{F}_t]\right], \quad A \in \mathcal{F}$$

($\mathbf{Q}^i[A|\mathcal{F}_t] \equiv \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^i}[\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_t]$ è la probabilità $\mathcal{F}_t$-*condizionale* di A data $\mathbf{Q}^i$). Chiamiamo $\mathbf{Q}$ l'incollamento *di* $\mathbf{Q}^1, \mathbf{Q}^2, \mathbf{Q}^3$ *in* t *via* A_t.

Nota: $\mathbf{Q}\,|_{\mathcal{F}_t} = \mathbf{Q}^1\,|_{\mathcal{F}_t}$ e, se $Z_t^i := \frac{d(\mathbf{Q}^i\,|_{\mathcal{F}_t})}{d(\mathbf{P}\,|_{\mathcal{F}_t})}$ e $Z_T := \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$, allora

$$Z_T = \mathbb{1}_{A_t}\frac{Z_t^1}{Z_t^2}Z_T^2 + \mathbb{1}_{\Omega\setminus A_t}\frac{Z_t^1}{Z_t^3}Z_T^3.$$

Corollario (raffinamento della rappresentazione per le *coerenti*)

Assumiamo che $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$ e che ρ_t verifichi Fatou per ogni $t \in \mathcal{T}$. Se ρ_0 è coerente, allora sono equivalenti:

1. $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ *è consistente rispetto al tempo.*
2. *L'insieme $\mathcal{Q}^*$ è stabile e, per ogni $t \in \mathcal{T}$ e $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,*
$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}^*} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X|\mathcal{F}_t].$$
3. *Vale tale formula per ogni $t \in \mathcal{T}$ e, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, è una $\mathbf{Q}$-$\mathbb{F}$-supermartingala il processo $(\rho_t(X))_{t\in\mathcal{T}}$.*

In ciascun caso, ρ_t è coerente per ogni $t \in \mathcal{T}$.

Corollario (raffinamento della rappresentazione per le *coerenti*)

Assumiamo che $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$ *e che* ρ_t *verifichi Fatou per ogni* $t \in \mathcal{T}$. *Se* ρ_0 *è coerente, allora sono equivalenti*:

1. $(\rho_t)_{t \in \mathcal{T}}$ *è consistente rispetto al tempo.*
2. *L'insieme* $\mathcal{Q}^*$ *è stabile e, per ogni* $t \in \mathcal{T}$ *e* $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,

$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t].$$

3. *Vale tale formula per ogni* $t \in \mathcal{T}$ *e, per ogni* $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ *e* $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, *è una* $\mathbf{Q}$-$\mathbb{F}$-*supermartingala il processo* $(\rho_t(X))_{t \in \mathcal{T}}$.

In ciascun caso, ρ_t *è coerente per ogni* $t \in \mathcal{T}$.

Corollario (raffinamento della rappresentazione per le *coerenti*)

Assumiamo che $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$ *e che* ρ_t *verifichi Fatou per ogni* $t \in \mathcal{T}$. *Se* ρ_0 *è coerente, allora sono equivalenti*:

1. $(\rho_t)_{t \in \mathcal{T}}$ *è consistente rispetto al tempo.*
2. *L'insieme* $\mathcal{Q}^*$ *è stabile e, per ogni* $t \in \mathcal{T}$ *e* $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,
$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t].$$
3. *Vale tale formula per ogni* $t \in \mathcal{T}$ *e, per ogni* $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ *e* $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, *è una* $\mathbf{Q}$-$\mathbb{F}$-*supermartingala il processo* $(\rho_t(X))_{t \in \mathcal{T}}$.

In ciascun caso, ρ_t *è coerente per ogni* $t \in \mathcal{T}$.

Corollario (raffinamento della rappresentazione per le *coerenti*)

Assumiamo che $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$ *e che* ρ_t *verifichi Fatou per ogni* $t \in \mathcal{T}$. *Se* ρ_0 *è coerente, allora sono equivalenti*:

1. $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ *è consistente rispetto al tempo.*
2. *L'insieme* $\mathcal{Q}^*$ *è stabile e, per ogni* $t \in \mathcal{T}$ *e* $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,
$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}^*} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t].$$
3. *Vale tale formula per ogni* $t \in \mathcal{T}$ *e, per ogni* $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ *e* $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, *è una* $\mathbf{Q}$-$\mathbb{F}$-*supermartingala il processo* $(\rho_t(X))_{t\in\mathcal{T}}$.

In ciascun caso, ρ_t *è coerente per ogni* $t \in \mathcal{T}$.

Corollario (raffinamento della rappresentazione per le *coerenti*)

Assumiamo che $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$ *e che* ρ_t *verifichi Fatou per ogni* $t \in \mathcal{T}$. *Se* ρ_0 *è coerente, allora sono equivalenti*:

1. $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ *è consistente rispetto al tempo.*
2. *L'insieme* $\mathcal{Q}^*$ *è stabile e, per ogni* $t \in \mathcal{T}$ *e* $X \in L^\infty(\mathbf{P})$,
$$\rho_t(X) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}^*} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X|\mathcal{F}_t].$$
3. *Vale tale formula per ogni* $t \in \mathcal{T}$ *e, per ogni* $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ *e* $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, *è una* $\mathbf{Q}$-$\mathbb{F}$-*supermartingala il processo* $(\rho_t(X))_{t\in\mathcal{T}}$.

In ciascun caso, ρ_t *è coerente per ogni* $t \in \mathcal{T}$.

Assumiamo che $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ sia consistente rispetto al tempo, con $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$ e tale che ρ_t soddisfi Fatou per ogni $t \in \mathcal{T}$.

Domanda: cosa possiamo dire se passiamo al limite per $T \to +\infty$?

Ridefiniamo quindi $T \equiv +\infty$, $\mathcal{T} \equiv \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\mathcal{F}_T \equiv \sigma\left(\bigcup_{t\in\mathcal{T}} \mathcal{F}_t\right)$.

Dati $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, esistono $V_\infty^{\mathbf{Q}}(X)$ e $\alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$ in $L^1(\mathbf{Q})$ t.c., se $\rho_\infty(X) := V_\infty^{\mathbf{Q}}(X) - \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$, allora per $t \to +\infty$ e $\mathbf{Q}$-q.c. $V_t^{\mathbf{Q}}(X) \to V_\infty^{\mathbf{Q}}(X)$, $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \to \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$ e $\rho_t(X) \to \rho_\infty(X)$.

Nota: la mappa $\rho_\infty \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to L^\infty(\mathbf{P})$ soddisfa tutte le proprietà di misura convessa $\mathcal{F}_t$-condizionale di rischio per ogni $t \in \mathcal{T}$.

Inoltre $\rho_\infty(X) \geq -X - \operatorname*{ess\,inf}_{\mathbf{Q}'\in\mathcal{Q}^*} \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q}')$ per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$.

Definizione (Sicurezza e precisione asintotiche)

$(\rho_t)_t$ è asintoticamente *sicura*, risp. *precisa*, se $\rho_\infty(X) \geq -X$, risp. $\rho_\infty(X) = -X$, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$.

Assumiamo che $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ sia consistente rispetto al tempo, con $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$ e tale che ρ_t soddisfi Fatou per ogni $t \in \mathcal{T}$.
Domanda: cosa possiamo dire se passiamo al limite per $T \to +\infty$?
Ridefiniamo quindi $T \equiv +\infty$, $\mathcal{T} \equiv \mathbb{N}\setminus\{0\}$ e $\mathcal{F}_T \equiv \sigma\left(\bigcup_{t\in\mathcal{T}} \mathcal{F}_t\right)$.
Dati $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, esistono $V_\infty^{\mathbf{Q}}(X)$ e $\alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$ in $L^1(\mathbf{Q})$ t.c., se $\rho_\infty(X) := V_\infty^{\mathbf{Q}}(X) - \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$, allora per $t \to +\infty$ e $\mathbf{Q}$-q.c. $V_t^{\mathbf{Q}}(X) \to V_\infty^{\mathbf{Q}}(X)$, $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \to \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$ e $\rho_t(X) \to \rho_\infty(X)$.
Nota: la mappa $\rho_\infty \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to L^\infty(\mathbf{P})$ soddisfa tutte le proprietà di misura convessa $\mathcal{F}_t$-condizionale di rischio per ogni $t \in \mathcal{T}$.
Inoltre $\rho_\infty(X) \geq -X - \operatorname*{ess\,inf}_{\mathbf{Q}'\in\mathcal{Q}^*} \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q}')$ per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$.

Definizione (Sicurezza e precisione asintotiche)

$(\rho_t)_t$ è asintoticamente *sicura*, risp. *precisa*, se $\rho_\infty(X) \geq -X$, risp. $\rho_\infty(X) = -X$, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$.

Assumiamo che $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ sia consistente rispetto al tempo, con $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$ e tale che ρ_t soddisfi Fatou per ogni $t \in \mathcal{T}$.
Domanda: cosa possiamo dire se passiamo al limite per $T \to +\infty$?
Ridefiniamo quindi $T \equiv +\infty$, $\mathcal{T} \equiv \mathbb{N}\setminus\{0\}$ e $\mathcal{F}_T \equiv \sigma\left(\bigcup_{t\in\mathcal{T}} \mathcal{F}_t\right)$.
Dati $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, esistono $V_\infty^{\mathbf{Q}}(X)$ e $\alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$ in $L^1(\mathbf{Q})$ t.c., se $\rho_\infty(X) := V_\infty^{\mathbf{Q}}(X) - \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$, allora per $t \to +\infty$ e $\mathbf{Q}$-q.c. $V_t^{\mathbf{Q}}(X) \to V_\infty^{\mathbf{Q}}(X)$, $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \to \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$ e $\rho_t(X) \to \rho_\infty(X)$.
Nota: la mappa $\rho_\infty \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to L^\infty(\mathbf{P})$ soddisfa tutte le proprietà di misura convessa $\mathcal{F}_t$-condizionale di rischio per ogni $t \in \mathcal{T}$.
Inoltre $\rho_\infty(X) \geq -X - \operatorname*{ess\,inf}_{\mathbf{Q}'\in\mathcal{Q}^*} \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q}')$ per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$.

Definizione (Sicurezza e precisione asintotiche)

$(\rho_t)_t$ è asintoticamente *sicura*, risp. *precisa*, se $\rho_\infty(X) \geq -X$, risp. $\rho_\infty(X) = -X$, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$.

Assumiamo che $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ sia consistente rispetto al tempo, con $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$ e tale che ρ_t soddisfi Fatou per ogni $t \in \mathcal{T}$.
Domanda: cosa possiamo dire se passiamo al limite per $T \to +\infty$?
Ridefiniamo quindi $T \equiv +\infty$, $\mathcal{T} \equiv \mathbb{N}\setminus\{0\}$ e $\mathcal{F}_T \equiv \sigma\left(\bigcup_{t\in\mathcal{T}} \mathcal{F}_t\right)$.
Dati $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, esistono $V_\infty^{\mathbf{Q}}(X)$ e $\alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$ in $L^1(\mathbf{Q})$ t.c., se $\rho_\infty(X) := V_\infty^{\mathbf{Q}}(X) - \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$, allora per $t \to +\infty$ e $\mathbf{Q}$-q.c. $V_t^{\mathbf{Q}}(X) \to V_\infty^{\mathbf{Q}}(X)$, $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \to \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$ e $\rho_t(X) \to \rho_\infty(X)$.
Nota: la mappa $\rho_\infty\colon L^\infty(\mathbf{P}) \to L^\infty(\mathbf{P})$ soddisfa tutte le proprietà di misura convessa $\mathcal{F}_t$-condizionale di rischio per ogni $t \in \mathcal{T}$.
Inoltre $\rho_\infty(X) \geq -X - \operatorname*{ess\,inf}_{\mathbf{Q}'\in\mathcal{Q}^*} \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q}')$ per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$.

Definizione (Sicurezza e precisione asintotiche)

$(\rho_t)_t$ è asintoticamente *sicura*, risp. *precisa*, se $\rho_\infty(X) \geq -X$, risp. $\rho_\infty(X) = -X$, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$.

Assumiamo che $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ sia consistente rispetto al tempo, con $\mathcal{Q}^*\neq\emptyset$ e tale che ρ_t soddisfi Fatou per ogni $t\in\mathcal{T}$.
Domanda: cosa possiamo dire se passiamo al limite per $T\to+\infty$?
Ridefiniamo quindi $T\equiv+\infty$, $\mathcal{T}\equiv\mathbb{N}\setminus\{0\}$ e $\mathcal{F}_T\equiv\sigma\left(\bigcup_{t\in\mathcal{T}}\mathcal{F}_t\right)$.
Dati $X\in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}^*$, esistono $V_\infty^{\mathbf{Q}}(X)$ e $\alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$ in $L^1(\mathbf{Q})$ t.c., se $\rho_\infty(X):=V_\infty^{\mathbf{Q}}(X)-\alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$, allora per $t\to+\infty$ e $\mathbf{Q}$-q.c. $V_t^{\mathbf{Q}}(X)\to V_\infty^{\mathbf{Q}}(X)$, $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q})\to\alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$ e $\rho_t(X)\to\rho_\infty(X)$.
Nota: la mappa $\rho_\infty\colon L^\infty(\mathbf{P})\to L^\infty(\mathbf{P})$ soddisfa tutte le proprietà di misura convessa $\mathcal{F}_t$-condizionale di rischio per ogni $t\in\mathcal{T}$.
Inoltre $\rho_\infty(X)\geq -X-\operatorname*{ess\,inf}_{\mathbf{Q}'\in\mathcal{Q}^*}\alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q}')$ per ogni $X\in L^\infty(\mathbf{P})$.

Definizione (Sicurezza e precisione asintotiche)

$(\rho_t)_t$ è asintoticamente *sicura*, risp. *precisa*, se $\rho_\infty(X)\geq -X$, risp. $\rho_\infty(X)=-X$, per ogni $X\in L^\infty(\mathbf{P})$.

Assumiamo che $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ sia consistente rispetto al tempo, con $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$ e tale che ρ_t soddisfi Fatou per ogni $t \in \mathcal{T}$.
Domanda: cosa possiamo dire se passiamo al limite per $T \to +\infty$?
Ridefiniamo quindi $T \equiv +\infty$, $\mathcal{T} \equiv \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\mathcal{F}_T \equiv \sigma\left(\bigcup_{t\in\mathcal{T}} \mathcal{F}_t\right)$.
Dati $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, esistono $V_\infty^{\mathbf{Q}}(X)$ e $\alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$ in $L^1(\mathbf{Q})$ t.c., se $\rho_\infty(X) := V_\infty^{\mathbf{Q}}(X) - \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$, allora per $t \to +\infty$ e $\mathbf{Q}$-q.c. $V_t^{\mathbf{Q}}(X) \to V_\infty^{\mathbf{Q}}(X)$, $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \to \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$ e $\rho_t(X) \to \rho_\infty(X)$.
Nota: la mappa $\rho_\infty \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to L^\infty(\mathbf{P})$ soddisfa tutte le proprietà di misura convessa $\mathcal{F}_t$-condizionale di rischio per ogni $t \in \mathcal{T}$.
Inoltre $\rho_\infty(X) \geq -X - \operatorname*{ess\,inf}_{\mathbf{Q}'\in\mathcal{Q}^*} \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q}')$ per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$.

Definizione (Sicurezza e precisione asintotiche)

$(\rho_t)_t$ è asintoticamente *sicura*, risp. *precisa*, se $\rho_\infty(X) \geq -X$, risp. $\rho_\infty(X) = -X$, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$.

Assumiamo che $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ sia consistente rispetto al tempo, con $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$ e tale che ρ_t soddisfi Fatou per ogni $t \in \mathcal{T}$.
Domanda: cosa possiamo dire se passiamo al limite per $T \to +\infty$?
Ridefiniamo quindi $T \equiv +\infty$, $\mathcal{T} \equiv \mathbb{N}\setminus\{0\}$ e $\mathcal{F}_T \equiv \sigma\left(\bigcup_{t\in\mathcal{T}} \mathcal{F}_t\right)$.
Dati $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, esistono $V^{\mathbf{Q}}_\infty(X)$ e $\alpha^{\min}_\infty(\mathbf{Q})$ in $L^1(\mathbf{Q})$ t.c., se $\rho_\infty(X) := V^{\mathbf{Q}}_\infty(X) - \alpha^{\min}_\infty(\mathbf{Q})$, allora per $t \to +\infty$ e $\mathbf{Q}$-q.c. $V^{\mathbf{Q}}_t(X) \to V^{\mathbf{Q}}_\infty(X)$, $\alpha^{\min}_t(\mathbf{Q}) \to \alpha^{\min}_\infty(\mathbf{Q})$ e $\rho_t(X) \to \rho_\infty(X)$.
Nota: la mappa $\rho_\infty \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to L^\infty(\mathbf{P})$ soddisfa tutte le proprietà di misura convessa $\mathcal{F}_t$-condizionale di rischio per ogni $t \in \mathcal{T}$.
Inoltre $\rho_\infty(X) \geq -X - \operatorname*{ess\,inf}_{\mathbf{Q}'\in\mathcal{Q}^*} \alpha^{\min}_\infty(\mathbf{Q}')$ per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$.

Definizione (Sicurezza e precisione asintotiche)

$(\rho_t)_t$ è asintoticamente *sicura*, risp. *precisa*, se $\rho_\infty(X) \geq -X$, risp. $\rho_\infty(X) = -X$, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$.

Assumiamo che $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ sia consistente rispetto al tempo, con $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$ e tale che ρ_t soddisfi Fatou per ogni $t \in \mathcal{T}$.
Domanda: cosa possiamo dire se passiamo al limite per $T \to +\infty$?
Ridefiniamo quindi $T \equiv +\infty$, $\mathcal{T} \equiv \mathbb{N}\setminus\{0\}$ e $\mathcal{F}_T \equiv \sigma\left(\bigcup_{t\in\mathcal{T}} \mathcal{F}_t\right)$.
Dati $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, esistono $V_\infty^{\mathbf{Q}}(X)$ e $\alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$ in $L^1(\mathbf{Q})$ t.c., se $\rho_\infty(X) := V_\infty^{\mathbf{Q}}(X) - \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$, allora per $t \to +\infty$ e $\mathbf{Q}$-q.c. $V_t^{\mathbf{Q}}(X) \to V_\infty^{\mathbf{Q}}(X)$, $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \to \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$ e $\rho_t(X) \to \rho_\infty(X)$.
Nota: la mappa $\rho_\infty \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to L^\infty(\mathbf{P})$ soddisfa tutte le proprietà di misura convessa $\mathcal{F}_t$-condizionale di rischio per ogni $t \in \mathcal{T}$.
Inoltre $\rho_\infty(X) \geq -X - \operatorname*{ess\,inf}_{\mathbf{Q}'\in\mathcal{Q}^*} \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q}')$ per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$.

Definizione (Sicurezza e precisione asintotiche)

$(\rho_t)_t$ è asintoticamente *sicura*, risp. *precisa*, se $\rho_\infty(X) \geq -X$, risp. $\rho_\infty(X) = -X$, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$.

Assumiamo che $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ sia consistente rispetto al tempo, con $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$ e tale che ρ_t soddisfi Fatou per ogni $t \in \mathcal{T}$.
Domanda: cosa possiamo dire se passiamo al limite per $T \to +\infty$?
Ridefiniamo quindi $T \equiv +\infty$, $\mathcal{T} \equiv \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\mathcal{F}_T \equiv \sigma\left(\bigcup_{t\in\mathcal{T}} \mathcal{F}_t\right)$.
Dati $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, esistono $V_\infty^{\mathbf{Q}}(X)$ e $\alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$ in $L^1(\mathbf{Q})$ t.c., se $\rho_\infty(X) := V_\infty^{\mathbf{Q}}(X) - \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$, allora per $t \to +\infty$ e $\mathbf{Q}$-q.c. $V_t^{\mathbf{Q}}(X) \to V_\infty^{\mathbf{Q}}(X)$, $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) \to \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q})$ e $\rho_t(X) \to \rho_\infty(X)$.
Nota: la mappa $\rho_\infty \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to L^\infty(\mathbf{P})$ soddisfa tutte le proprietà di misura convessa $\mathcal{F}_t$-condizionale di rischio per ogni $t \in \mathcal{T}$.
Inoltre $\rho_\infty(X) \geq -X - \operatorname*{ess\,inf}_{\mathbf{Q}' \in \mathcal{Q}^*} \alpha_\infty^{\min}(\mathbf{Q}')$ per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$.

Definizione (Sicurezza e precisione asintotiche)

$(\rho_t)_t$ è asintoticamente *sicura*, risp. *precisa*, se $\rho_\infty(X) \geq -X$, risp. $\rho_\infty(X) = -X$, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$.

Nota: per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, $\alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q})$ è non decrescente nella t ed esiste $\mathbf{P}$-q.c. il limite $\alpha_{0,\infty}^{\min}(\mathbf{Q}) := \sup_t \alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q}) \leq \alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) < +\infty$.

Definizione (Prevedibile accettabilità)

Una $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ è prevedibilmente accettabile se esiste una $(X_t)_t$ limitata in $L^\infty(\mathbf{P})$ con $X_t \in \mathcal{A}_{0,t}$ per ogni $t \in \mathcal{T}$ e che converga $\mathbf{P}$-q.c. con $\lim_t X_t \leq X$. Denotiamo $\mathcal{A}_{0,\infty}$ l'insieme di tali X.

Nota: vale $L_+^\infty(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{A}_{0,\infty} \subseteq \mathcal{A}_0$.

Teorema (di caratterizzazione della sicurezza asintotica)

$(\rho_t)_t$ *è asintoticamente sicura se e solo se* $\mathcal{A}_{0,\infty} \supseteq \mathcal{A}_0$, *o anche:*

$$\bigcap_{t \in \mathcal{T}} \mathcal{A}_t \subseteq L_+^\infty(\mathbf{P}) \Leftrightarrow \alpha_{0,\infty}^{\min}(\cdot) \geq \alpha_0^{\min}(\cdot) \Leftrightarrow \alpha_{0,\infty}^{\min}(\cdot) \equiv 0.$$

Nota: per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, $\alpha^{\min}_{0,t}(\mathbf{Q})$ è non decrescente nella t ed esiste $\mathbf{P}$-q.c. il limite $\alpha^{\min}_{0,\infty}(\mathbf{Q}) := \sup_t \alpha^{\min}_{0,t}(\mathbf{Q}) \leq \alpha^{\min}_0(\mathbf{Q}) < +\infty$.

Definizione (Prevedibile accettabilità)

Una $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ è prevedibilmente accettabile se esiste una $(X_t)_t$ limitata in $L^\infty(\mathbf{P})$ con $X_t \in \mathcal{A}_{0,t}$ per ogni $t \in \mathcal{T}$ e che converga $\mathbf{P}$-q.c. con $\lim_t X_t \leq X$. Denotiamo $\mathcal{A}_{0,\infty}$ l'insieme di tali X.

Nota: vale $L^\infty_+(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{A}_{0,\infty} \subseteq \mathcal{A}_0$.

Teorema (di caratterizzazione della sicurezza asintotica)

$(\rho_t)_t$ *è asintoticamente sicura se e solo se* $\mathcal{A}_{0,\infty} \supseteq \mathcal{A}_0$, *o anche:*

$$\bigcap_{t \in \mathcal{T}} \mathcal{A}_t \subseteq L^\infty_+(\mathbf{P}) \Leftrightarrow \alpha^{\min}_{0,\infty}(\cdot) \geq \alpha^{\min}_0(\cdot) \Leftrightarrow \alpha^{\min}_{0,\infty}(\cdot) \equiv 0.$$

Misure convesse condizionali e dinamiche di rischio

Sicurezza asintotica e precisione asintotica

Nota: per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, $\alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q})$ è non decrescente nella t ed esiste $\mathbf{P}$-q.c. il limite $\alpha_{0,\infty}^{\min}(\mathbf{Q}) := \sup_t \alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q}) \leq \alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) < +\infty$.

Definizione (Prevedibile accettabilità)

Una $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ è prevedibilmente accettabile se esiste una $(X_t)_t$ limitata in $L^\infty(\mathbf{P})$ con $X_t \in \mathcal{A}_{0,t}$ per ogni $t \in \mathcal{T}$ e che converga $\mathbf{P}$-q.c. con $\lim_t X_t \leq X$. Denotiamo $\mathcal{A}_{0,\infty}$ l'insieme di tali X.

Nota: vale $L_+^\infty(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{A}_{0,\infty} \subseteq \mathcal{A}_0$.

Teorema (di caratterizzazione della sicurezza asintotica)

$(\rho_t)_t$ *è asintoticamente sicura se e solo se* $\mathcal{A}_{0,\infty} \supseteq \mathcal{A}_0$, *o anche:*

$$\bigcap_{t \in \mathcal{T}} \mathcal{A}_t \subseteq L_+^\infty(\mathbf{P}) \Leftrightarrow \alpha_{0,\infty}^{\min}(\cdot) \geq \alpha_0^{\min}(\cdot) \Leftrightarrow \alpha_{0,\infty}^{\min}(\cdot) \equiv 0.$$

Misure convesse di rischio

Marco Tarsia

Teoria assiomatica delle misure convesse di rischio

Esempi notevoli di misure convesse di rischio

Misure convesse condizionali e dinamiche di rischio

Nota: per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, $\alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q})$ è non decrescente nella t ed esiste $\mathbf{P}$-q.c. il limite $\alpha_{0,\infty}^{\min}(\mathbf{Q}) := \sup_t \alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q}) \leq \alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) < +\infty$.

Definizione (Prevedibile accettabilità)

Una $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ è prevedibilmente accettabile se esiste una $(X_t)_t$ limitata in $L^\infty(\mathbf{P})$ con $X_t \in \mathcal{A}_{0,t}$ per ogni $t \in \mathcal{T}$ e che converga $\mathbf{P}$-q.c. con $\lim_t X_t \leq X$. Denotiamo $\mathcal{A}_{0,\infty}$ l'insieme di tali X.

Nota: vale $L_+^\infty(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{A}_{0,\infty} \subseteq \mathcal{A}_0$.

Teorema (di caratterizzazione della sicurezza asintotica)

$(\rho_t)_t$ *è asintoticamente sicura se e solo se* $\mathcal{A}_{0,\infty} \supseteq \mathcal{A}_0$*, o anche:*

$$\bigcap_{t \in \mathcal{T}} \mathcal{A}_t \subseteq L_+^\infty(\mathbf{P}) \Leftrightarrow \alpha_{0,\infty}^{\min}(\cdot) \geq \alpha_0^{\min}(\cdot) \Leftrightarrow \alpha_{0,\infty}^{\min}(\cdot) \equiv 0.$$

Misure convesse di rischio

Marco Tarsia

Teoria assiomatica delle misure convesse di rischio

Esempi notevoli di misure convesse di rischio

Misure convesse condizionali e dinamiche di rischio

Nota: per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, $\alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q})$ è non decrescente nella t ed esiste $\mathbf{P}$-q.c. il limite $\alpha_{0,\infty}^{\min}(\mathbf{Q}) := \sup_t \alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q}) \leq \alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) < +\infty$.

Definizione (Prevedibile accettabilità)

Una $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ è prevedibilmente accettabile se esiste una $(X_t)_t$ limitata in $L^\infty(\mathbf{P})$ con $X_t \in \mathcal{A}_{0,t}$ per ogni $t \in \mathcal{T}$ e che converga $\mathbf{P}$-q.c. con $\lim_t X_t \leq X$. Denotiamo $\mathcal{A}_{0,\infty}$ l'insieme di tali X.

Nota: vale $L_+^\infty(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{A}_{0,\infty} \subseteq \mathcal{A}_0$.

Teorema (di caratterizzazione della sicurezza asintotica)

$(\rho_t)_t$ *è asintoticamente sicura se e solo se* $\mathcal{A}_{0,\infty} \supseteq \mathcal{A}_0$, *o anche*:

$$\bigcap_{t \in \mathcal{T}} \mathcal{A}_t \subseteq L_+^\infty(\mathbf{P}) \Leftrightarrow \alpha_{0,\infty}^{\min}(\cdot) \geq \alpha_0^{\min}(\cdot) \Leftrightarrow \alpha_{0,\infty}^{\min}(\cdot) \equiv 0.$$

Nota: per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, $\alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q})$ è non decrescente nella t ed esiste $\mathbf{P}$-q.c. il limite $\alpha_{0,\infty}^{\min}(\mathbf{Q}) := \sup_t \alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q}) \leq \alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) < +\infty$.

Definizione (Prevedibile accettabilità)

Una $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ è prevedibilmente accettabile se esiste una $(X_t)_t$ limitata in $L^\infty(\mathbf{P})$ con $X_t \in \mathcal{A}_{0,t}$ per ogni $t \in \mathcal{T}$ e che converga $\mathbf{P}$-q.c. con $\lim_t X_t \leq X$. Denotiamo $\mathcal{A}_{0,\infty}$ l'insieme di tali X.

Nota: vale $L_+^\infty(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{A}_{0,\infty} \subseteq \mathcal{A}_0$.

Teorema (di caratterizzazione della sicurezza asintotica)

$(\rho_t)_t$ *è asintoticamente sicura se e solo se* $\mathcal{A}_{0,\infty} \supseteq \mathcal{A}_0$, *o anche*:

$$\bigcap_{t \in \mathcal{T}} \mathcal{A}_t \subseteq L_+^\infty(\mathbf{P}) \Leftrightarrow \alpha_{0,\infty}^{\min}(\cdot) \geq \alpha_0^{\min}(\cdot) \Leftrightarrow \alpha_{0,\infty}^{\min}(\cdot) \equiv 0.$$

Nota: per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$, $\alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q})$ è non decrescente nella t ed esiste $\mathbf{P}$-q.c. il limite $\alpha_{0,\infty}^{\min}(\mathbf{Q}) := \sup_t \alpha_{0,t}^{\min}(\mathbf{Q}) \leq \alpha_0^{\min}(\mathbf{Q}) < +\infty$.

Definizione (Prevedibile accettabilità)

Una $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ è prevedibilmente accettabile se esiste una $(X_t)_t$ limitata in $L^\infty(\mathbf{P})$ con $X_t \in \mathcal{A}_{0,t}$ per ogni $t \in \mathcal{T}$ e che converga $\mathbf{P}$-q.c. con $\lim_t X_t \leq X$. Denotiamo $\mathcal{A}_{0,\infty}$ l'insieme di tali X.

Nota: vale $L_+^\infty(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{A}_{0,\infty} \subseteq \mathcal{A}_0$.

Teorema (di caratterizzazione della sicurezza asintotica)

$(\rho_t)_t$ *è asintoticamente sicura se e solo se* $\mathcal{A}_{0,\infty} \supseteq \mathcal{A}_0$, *o anche*:

$$\bigcap_{t \in \mathcal{T}} \mathcal{A}_t \subseteq L_+^\infty(\mathbf{P}) \Leftrightarrow \alpha_{0,\infty}^{\min}(\cdot) \geq \alpha_0^{\min}(\cdot) \Leftrightarrow \alpha_{0,\infty}^{\min}(\cdot) \equiv 0.$$

Esempio (la *misura dinamica entropica di rischio* di par. γ)

Scegliamo $\gamma > 0$ e, come funzione di *utilità* (normalizzata), la mappa $u(x) \doteq 1 - e^{-\gamma x}$, $x \in \mathbb{R}$. *Fissiamo* inoltre $t \in \mathcal{T}$. L'*utilità condizionale attesa* di $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ al tempo t è quindi $U_t(X) \doteq \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[u(X)|\mathcal{F}_t] = 1 - \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_t] \in L^\infty_t(\mathbf{P})$. *Definiamo*

$$\mathcal{A}_t \doteq \{ X \mid U_t(X) \ge U_t(0) \} = \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \,\middle|\, \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_t] \le 1 \right\}.$$

Allora la mappa $\rho_t \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to L^\infty_t(\mathbf{P})$ definita ponendo

$$\rho_t(X) \doteq \operatorname{ess\,inf}\{\dots\} = \frac{1}{\gamma} \log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_t], \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}),$$

è una misura convessa condizionale di rischio al tempo t con insieme di accettazione $\mathcal{A}_t$ e che possiede la proprietà di Fatou.

Esempio (la *misura dinamica entropica di rischio* di par. γ)

Scegliamo $\gamma > 0$ e, come funzione di *utilità* (normalizzata), la mappa $u(x) \doteq 1 - e^{-\gamma x}$, $x \in \mathbb{R}$. *Fissiamo* inoltre $t \in \mathcal{T}$.

L'*utilità condizionale attesa* di $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ al tempo t è quindi $U_t(X) \doteq \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[u(X)|\mathcal{F}_t] = 1 - \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_t] \in L^\infty_t(\mathbf{P})$. *Definiamo*

$$\mathcal{A}_t \doteq \{ X \mid U_t(X) \geq U_t(0) \} = \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \,\middle|\, \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_t] \leq 1 \right\}.$$

Allora la mappa $\rho_t \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to L^\infty_t(\mathbf{P})$ definita ponendo

$$\rho_t(X) \doteq \operatorname{ess\,inf} \{ \dots \} = \frac{1}{\gamma} \log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_t], \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}),$$

è una misura convessa condizionale di rischio al tempo t con insieme di accettazione $\mathcal{A}_t$ e che possiede la proprietà di Fatou.

Esempio (la *misura dinamica entropica di rischio* di par. γ)

Scegliamo $\gamma > 0$ e, come funzione di *utilità* (normalizzata), la mappa $u(x) \doteq 1 - e^{-\gamma x}$, $x \in \mathbb{R}$. *Fissiamo* inoltre $t \in \mathcal{T}$. L'*utilità condizionale attesa* di $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ al tempo t è quindi $U_t(X) \doteq \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[u(X) | \mathcal{F}_t] \equiv 1 - \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X} | \mathcal{F}_t] \in L^\infty_t(\mathbf{P})$. Definiamo

$$\mathcal{A}_t \doteq \{ X \mid U_t(X) \geq U_t(0) \} \equiv \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \,\middle|\, \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X} | \mathcal{F}_t] \leq 1 \right\}.$$

Allora la mappa $\rho_t \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to L^\infty_t(\mathbf{P})$ definita ponendo

$$\rho_t(X) \doteq \operatorname{ess\,inf} \{ \dots \} = \frac{1}{\gamma} \log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X} | \mathcal{F}_t], \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}),$$

è una misura convessa condizionale di rischio al tempo t con insieme di accettazione $\mathcal{A}_t$ e che possiede la proprietà di Fatou.

Esempio (la *misura dinamica entropica di rischio* di par. γ)

Scegliamo $\gamma > 0$ e, come funzione di *utilità* (normalizzata), la mappa $u(x) \doteq 1 - e^{-\gamma x}$, $x \in \mathbb{R}$. *Fissiamo* inoltre $t \in \mathcal{T}$. L'*utilità condizionale attesa* di $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ al tempo t è quindi $U_t(X) \doteq \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[u(X)|\mathcal{F}_t] \equiv 1 - \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_t] \in L_t^\infty(\mathbf{P})$. *Definiamo*

$$\mathcal{A}_t \doteq \{ X \mid U_t(X) \geq U_t(0) \} \equiv \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \,\middle|\, \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_t] \leq 1 \right\}.$$

Allora la mappa $\rho_t \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to L_t^\infty(\mathbf{P})$ definita ponendo

$$\rho_t(X) \doteq \operatorname{ess\,inf} \{ \dots \} = \frac{1}{\gamma} \log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_t], \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}),$$

è una misura convessa condizionale di rischio al tempo t con insieme di accettazione $\mathcal{A}_t$ e che possiede la proprietà di Fatou.

Esempio (la *misura dinamica entropica di rischio* di par. γ)

Scegliamo $\gamma > 0$ e, come funzione di *utilità* (normalizzata), la mappa $u(x) \doteq 1 - e^{-\gamma x}$, $x \in \mathbb{R}$. *Fissiamo* inoltre $t \in \mathcal{T}$. L'*utilità condizionale attesa* di $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ al tempo t è quindi $U_t(X) \doteq \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[u(X)|\mathcal{F}_t] \equiv 1 - \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_t] \in L^\infty_t(\mathbf{P})$. *Definiamo*

$$\mathcal{A}_t \doteq \{\, X \mid U_t(X) \geq U_t(0) \,\} \equiv \left\{ X \in L^\infty(\mathbf{P}) \,\middle|\, \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_t] \leq 1 \right\}.$$

Allora la mappa $\rho_t \colon L^\infty(\mathbf{P}) \to L^\infty_t(\mathbf{P})$ definita ponendo

$$\rho_t(X) \doteq \operatorname{ess\,inf}\{\dots\} = \frac{1}{\gamma} \log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_t], \quad X \in L^\infty(\mathbf{P}),$$

è una misura convessa condizionale di rischio al tempo t con insieme di accettazione $\mathcal{A}_t$ e che possiede la proprietà di Fatou.

Esempio (la *misura dinamica entropica di rischio* di par. γ)

La sua minima funzione di penalità è, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$,

$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) = \operatorname*{ess\,sup}_{X \in L^\infty(\mathbf{P})} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \mid \mathcal{F}_t] - \frac{1}{\gamma} \log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X} \mid \mathcal{F}_t] \right\}.$$

Per ogni $t \in \mathcal{T}$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, indichiamo $Z_t := \frac{d(\mathbf{Q}|_{\mathcal{F}_t})}{d(\mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t})} = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \middle| \mathcal{F}_t\right]$.
Ricordiamo che l'entropia relativa $\mathcal{F}_t$-*condizionale* di $\mathbf{Q}$ dato $\mathbf{P}$ è

$$\widehat{H}_t(\mathbf{Q} \mid \mathbf{P}) \equiv \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[\mathbb{1}_{\{Z_t>0\}} \frac{Z_T}{Z_t} \log \frac{Z_T}{Z_t} \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{Z_t>0\}} \log \frac{Z_T}{Z_t} \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

Così, per ogni $t \in \mathcal{T}$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$, $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) = \frac{1}{\gamma} \widehat{H}_t(\mathbf{Q} \mid \mathbf{P})$ e dunque

$$\mathcal{Q}^* = \{\mathbf{Q} \in \mathcal{P}^e \mid H(\mathbf{Q} \mid \mathbf{P}) < +\infty\} \neq \emptyset.$$

Esempio (la *misura dinamica entropica di rischio* di par. γ)

La sua minima funzione di penalità è, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$,

$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) = \operatorname*{ess\,sup}_{X \in L^\infty(\mathbf{P})} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \frac{1}{\gamma} \log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X} \,|\, \mathcal{F}_t] \right\}.$$

Per ogni $t \in \mathcal{T}$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, indichiamo $Z_t := \frac{d(\mathbf{Q}\,|_{\mathcal{F}_t})}{d(\mathbf{P}\,|_{\mathcal{F}_t})} = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$.

Ricordiamo che l'entropia relativa $\mathcal{F}_t$-*condizionale* di $\mathbf{Q}$ dato $\mathbf{P}$ è

$$\widehat{H}_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) \equiv \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[\mathbb{1}_{\{Z_t>0\}} \frac{Z_T}{Z_t} \log \frac{Z_T}{Z_t} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{Z_t>0\}} \log \frac{Z_T}{Z_t} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right].$$

Così, per ogni $t \in \mathcal{T}$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$, $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) = \frac{1}{\gamma} \widehat{H}_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P})$ e dunque

$$\mathcal{Q}^* \equiv \{\mathbf{Q} \in \mathcal{P}^e \mid H(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) < +\infty\} \neq \emptyset.$$

Esempio (la *misura dinamica entropica di rischio* di par. γ)

La sua minima funzione di penalità è, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$,

$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) = \operatorname*{ess\,sup}_{X \in L^\infty(\mathbf{P})} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \frac{1}{\gamma} \log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X} \,|\, \mathcal{F}_t] \right\}.$$

Per ogni $t \in \mathcal{T}$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, indichiamo $Z_t := \frac{d(\mathbf{Q}\,|_{\mathcal{F}_t})}{d(\mathbf{P}\,|_{\mathcal{F}_t})} = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$.
Ricordiamo che l'entropia relativa $\mathcal{F}_t$-*condizionale* di $\mathbf{Q}$ dato $\mathbf{P}$ è

$$\widehat{H}_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) \equiv \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[\mathbb{1}_{\{Z_t>0\}} \frac{Z_T}{Z_t} \log \frac{Z_T}{Z_t} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{Z_t>0\}} \log \frac{Z_T}{Z_t} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right].$$

Così, per ogni $t \in \mathcal{T}$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$, $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) = \frac{1}{\gamma} \widehat{H}_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P})$ e dunque

$$\mathcal{Q}^* \equiv \{ \mathbf{Q} \in \mathcal{P}^e \mid H(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P}) < +\infty \} \neq \emptyset.$$

Esempio (la *misura dinamica entropica di rischio* di par. γ)

La sua minima funzione di penalità è, per ogni $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$,

$$\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) = \underset{X \in L^\infty(\mathbf{P})}{\operatorname{ess\,sup}} \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[-X \,|\, \mathcal{F}_t] - \frac{1}{\gamma} \log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X} \,|\, \mathcal{F}_t] \right\}.$$

Per ogni $t \in \mathcal{T}$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$, indichiamo $Z_t := \frac{d(\mathbf{Q}\,|_{\mathcal{F}_t})}{d(\mathbf{P}\,|_{\mathcal{F}_t})} = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$. Ricordiamo che l'entropia relativa $\mathcal{F}_t$-*condizionale* di $\mathbf{Q}$ dato $\mathbf{P}$ è

$$\widehat{H}_t(\mathbf{Q} \,|\, \mathbf{P}) \equiv \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[\mathbb{1}_{\{Z_t > 0\}} \frac{Z_T}{Z_t} \log \frac{Z_T}{Z_t} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{Z_t > 0\}} \log \frac{Z_T}{Z_t} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right].$$

Così, per ogni $t \in \mathcal{T}$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_t$, $\alpha_t^{\min}(\mathbf{Q}) = \frac{1}{\gamma} \widehat{H}_t(\mathbf{Q} \,|\, \mathbf{P})$ e dunque

$$\mathcal{Q}^* \equiv \{ \mathbf{Q} \in \mathcal{P}^e \mid H(\mathbf{Q} \,|\, \mathbf{P}) < +\infty \} \neq \emptyset.$$

Esempio (la *misura dinamica entropica di rischio* di par. γ)

Di conseguenza, per ogni $t \in \mathcal{T}$, $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$,

$$V_t^{\mathbf{Q}}(X) = \frac{1}{\gamma}\left\{\log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X} \,|\, \mathcal{F}_t] + \widehat{H}_t(\mathbf{Q} \,|\, \mathbf{P})\right\}.$$

Poi $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo in quanto, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, $\rho_t(X) = \frac{1}{\gamma}\log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[e^{\gamma\left\{\frac{1}{\gamma}\log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_{t+1}]\right\}}\middle|\mathcal{F}_t\right]$.
Per $T = +\infty$, $(\rho_t)_t$ è anche asintoticamente precisa.

Teorema

$(V_t^{\mathbf{Q}}(X))_{t\in\mathcal{T}}$ è una $\mathbf{Q}$-$\mathbb{F}$-martingala se e solo se $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^X$, dove

$$d\mathbf{P}^X/d\mathbf{P} \doteq e^{-\gamma X}/\,\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}].$$

Esempio (la *misura dinamica entropica di rischio* di par. γ)

Di conseguenza, per ogni $t \in \mathcal{T}$, $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$,

$$V_t^{\mathbf{Q}}(X) = \frac{1}{\gamma}\left\{\log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X} \,|\, \mathcal{F}_t] + \widehat{H}_t(\mathbf{Q} \,|\, \mathbf{P})\right\}.$$

Poi $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo in quanto, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, $\rho_t(X) = \frac{1}{\gamma} \log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[e^{\gamma\left\{\frac{1}{\gamma}\log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_{t+1}]\right\}} \middle| \mathcal{F}_t\right]$.

Per $T = +\infty$, $(\rho_t)_t$ è anche asintoticamente precisa.

Teorema

$(V_t^{\mathbf{Q}}(X))_{t\in\mathcal{T}}$ *è una* $\mathbf{Q}$-$\mathbb{F}$-*martingala se e solo se* $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^X$, *dove*

$$d\mathbf{P}^X / d\mathbf{P} \doteq e^{-\gamma X} / \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}].$$

Misure convesse di rischio
Marco Tarsia
Teoria assiomatica delle misure convesse di rischio
Esempi notevoli di misure convesse di rischio
Misure convesse condizionali e dinamiche di rischio

Esempio (la *misura dinamica entropica di rischio* di par. γ)

Di conseguenza, per ogni $t \in \mathcal{T}$, $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$,

$$V_t^{\mathbf{Q}}(X) = \frac{1}{\gamma}\left\{\log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X} \,|\, \mathcal{F}_t] + \widehat{H}_t(\mathbf{Q} \,|\, \mathbf{P})\right\}.$$

Poi $(\rho_t)_{t \in \mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo in quanto, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, $\rho_t(X) = \frac{1}{\gamma} \log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[e^{\gamma\left\{\frac{1}{\gamma}\log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X} | \mathcal{F}_{t+1}]\right\}} \middle| \mathcal{F}_t\right]$.
Per $T = +\infty$, $(\rho_t)_t$ è anche asintoticamente precisa.

Teorema

$(V_t^{\mathbf{Q}}(X))_{t \in \mathcal{T}}$ è una $\mathbf{Q}$-$\mathbb{F}$-*martingala* se e solo se $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^X$, dove

$$d\mathbf{P}^X / d\mathbf{P} \doteq e^{-\gamma X} / \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}].$$

Esempio (la *misura dinamica entropica di rischio* di par. γ)

Di conseguenza, per ogni $t \in \mathcal{T}$, $X \in L^\infty(\mathbf{P})$ e $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}^*$,

$$V_t^{\mathbf{Q}}(X) = \frac{1}{\gamma}\left\{\log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X} \,|\, \mathcal{F}_t] + \widehat{H}_t(\mathbf{Q}\,|\,\mathbf{P})\right\}.$$

Poi $(\rho_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è consistente rispetto al tempo in quanto, per ogni $X \in L^\infty(\mathbf{P})$, $\rho_t(X) = \frac{1}{\gamma}\log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left[e^{\gamma\left\{\frac{1}{\gamma}\log \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_{t+1}]\right\}}\middle|\mathcal{F}_t\right]$.
Per $T = +\infty$, $(\rho_t)_t$ è anche asintoticamente precisa.

Teorema

$(V_t^{\mathbf{Q}}(X))_{t\in\mathcal{T}}$ *è una* $\mathbf{Q}$-$\mathbb{F}$-*martingala se e solo se* $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^X$, *dove*

$$d\mathbf{P}^X/d\mathbf{P} \doteq e^{-\gamma X}/\,\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[e^{-\gamma X}].$$

Fine

Grazie per l'attenzione!