Università degli Studi di Pisa

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Corso di Laurea Triennale in Matematica

TESI DI LAUREA TRIENNALE IN PROBABILITÀ
17 aprile 2015

Teorema di Immersione di Skorohod e Applicazioni

CANDIDATO: Marco Tarsia

RELATORE: Prof. Maurizio Pratelli

Anno Accademico 2013/2014

A tutta la mia famiglia

Indice

Introduzione

Lo scopo principale di questo lavoro consiste nel dimostrare che una qualsiasi variabile aleatoria reale centrata e di quadrato integrabile può esser costruita, nel senso delle leggi di probabilità, a partire da un moto Browniano e da un opportuno tempo aleatorio: la formulazione matematica precisa di tale risultato costituisce appunto il *Teorema di Immersione di Skorohod* (dovuto al matematico ucraino Anatolii Volodymyrovych Skorohod, 1930 (Nikopol', Ucraina) - 2011 (Lansing, Michigan)).

Cominceremo per questo motivo da una trattazione non elementare del moto Browniano, tenendo soprattutto a verificarne la cosiddetta *proprietà forte di Markov* in quanto chiave giusta per accedere ad ulteriori proprietà sufficientemente avanzate per poter esser davvero utili rispetto ai nostri fini.

D'altra parte, come già è possibile intuire, il teorema di Skorohod può contribuire in modo decisivo a rendere relativamente semplici dimostrazioni di enunciati non banali per sostanza e per generalità: ciò accade in particolare per il *Teorema di Hartman-Wintner* (1941), anche chiamato *Legge del Logaritmo Iterato* in base al preciso "ordine di infinito" che esso stabilisce per un qualsiasi processo reale a tempi discreti ottenuto come somme parziali di una successione di variabili aleatorie reali i.i.d. centrate e di quadrato integrabili.

L'applicazione più importante del teorema di Skorohod che arriveremo ad affrontare sarà proprio la Legge del logaritmo iterato, e ne saremo in grado anche grazie al fatto cruciale che riusciremo dapprima a verificare l'analoga legge per un moto Browniano.

Tale obiettivo finale è ciò che meglio spiega il modo particolare col quale studieremo il teorema di Skorohod: inizieremo infatti dandone un enunciato più debole ed effettivamente meglio dimostrabile rispetto a quello che potrebbe avere in realtà fin da subito, perché basterà a constatare la *immersione* di un processo reale a tempi discreti del tipo sopra descritto in un moto Browniano rispetto ad un'opportuna successione di tempi aleatori; seguirà quindi la matematica che permetterà proprio di rafforzarlo, e ciò avverrà tramite un procedimento interessante di per sé.

Questo nostro percorso richiederà naturalmente sia una parte teorica del tutto fondamentale e comunque richiamata per sommi capi in Appendice, sia vari risultati tecnici minori che saranno sempre divisi da quelli maggiori e che avranno significato o di lemma o di osservazione non finalizzata al seguito, e la cui dimostrazione comparirà esplicitamente nel caso non sia pressoché immediata.

Esporremo il tutto con l'usuale linguaggio del calcolo delle probabilità, rispettando quasi pienamente la nomenclatura tradizionale di definizioni e risultati consolidati, e anche le notazioni simboliche coincideranno all'incirca con quelle comunemente adottate.

In particolare, per noi sarà sempre:

- Ω lo spazio degli eventi elementari ω ;
- $\mathbf{P} := \mathbf{P}[\,\cdot\,]$ una probabilità su una σ-algebra $\mathcal{F}$ di parti di Ω (invece che $\mathbf{P}(\cdot)$ o $\mathbf{P}\{\cdot\}$);
- $\mathbb{1}_A$ l'indicatrice dell'insieme A ;
- δ_x la misura di probabilità di Dirac concentrata nel punto x ;
- $\overset{\mathcal{L}}{=}$ la relazione binaria di uguaglianza in legge;
- *q.c.* l'acronimo di "quasi certamente" (rispetto ad un'assegnata probabilità);
- *i.i.d.* l'acronimo di "independent identically distributed", ovvero di "indipendenti equidistribuite" (che è già stato menzionato).

Seguiremo totalmente pure quella convenzione tacita ma universale per la quale ad esempio $t \geq 0$ significa *t reale e* ≥ 0, mentre però considereremo i numeri naturali come quelli interi *positivi*, ovvero $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$, riservando a quelli non negativi il simbolo $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Segnaliamo infine un'altra convenzione, ma di tutt'altro genere: salvo avviso contrario, uno spazio topologico verrà considerato al tempo stesso anche come spazio *misurabile* munito della relativa σ-algebra di Borel generata dai propri aperti.

Quella che sopra, per forza di cose, è stata solo una sintetica descrizione informale e comunque non del tutto precisa dei vari nostri oggetti di studio, verrà nella sua sostanza ripresa ed opportunatamente ampliata di capitolo in capitolo, specie nei primi due, sotto forma di utile presentazione già degli stessi capitoli ma pure al loro interno a riguardo soprattutto dei risultati più meritevoli d'attenzione.

Capitolo 1

Moto Browniano

In questo capitolo verifichiamo gradualmente le varie prime proprietà di un moto Browniano, da quelle più evidenti nella prima sezione a quella di Markov *forte* nella seconda, con lo scopo principale di ricavare a quel punto l'utilissimo *Principio di Riflessione*: infatti questa peculiarità costituirà assieme a qualcuna delle precedenti uno dei punti chiave nelle dimostrazioni delle "due leggi" del logaritmo iterato, a cominciare da quella per un moto Browniano nella terza ed ultima sezione.

Nella seconda, a proposito, proporremo già un paio di stime sull'"ordine d'infinito" di un moto Browniano, o meglio sul suo ordine di *massima fluttuazione superiore*, e ciò sia a scopo introduttivo rispetto alla successiva sezione sia per poter appunto ottenere qualcuna delle suddette proprietà grazie a degli strumenti il meno potenti possibile.

Risulterà inoltre evidente che pure queste stime discenderanno sostanzialmente proprio dalla proprietà forte di Markov.

I principali riferimenti bibliografici relativi a questo capitolo sono certamente [3] e [6].

1.1 Richiami e Primi Risultati

Definizione 1 (*Moto Browniano*)**.** Un processo reale a tempi continui $B=(B_t)_{t\geq 0}$ su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ è un *moto Browniano* (o *processo di Wiener*) su Ω se

(a) $B_0=0$;

(b) B è a incrementi indipendenti e stazionari;

(c) $\forall\, t>0$, $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$;

(d) B è q.c. continuo.

Osserviamo che la condizione (c), date le precedenti, equivale a $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ per ogni $s, t \geq 0$ con $s < t$, indici per i quali in particolare $t - s = \mathbf{Var}[B_t - B_s] = \mathbf{E}[(B_t - B_s)^2]$, e che inoltre la caratteristica di esser un moto Browniano è invariante per *modifiche* (ragione per la quale potremmo in realtà parlare *del* moto Browniano piuttosto che di *un* moto Browniano e considerarlo per giunta come processo avente traiettorie continue *per ogni* ω).

Ricordiamo che su un qualsiasi spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *non atomico* esiste un moto Browniano B, il quale precisamente soddisfa la seguente proprietà:

(d)$'$ $\forall\, \gamma \in (0, \frac{1}{2})$, *$B$ ha q.c. traiettorie localmente γ-hölderiane.*

Questo significa esplicitamente che, $\forall\, \gamma \in (0, \frac{1}{2})$ e q.c., $\forall\, r \geq 0$ e per ogni intorno aperto di r, esiste una costante $C > 0$ tale che, $\forall\, s, t$ nel suddetto aperto, valga

$$|B_t - B_s| \leq C|t-s|^\gamma\,.$$

Invece, al contrario, $\forall\, \gamma \in (\frac{1}{2}, 1)$, B ha q.c. traiettorie *non* localmente γ-hölderiane, e di conseguenza *non* derivabili in alcun punto (quindi neanche monotòne su alcun intervallo reale proprio).

Richiamiamo infatti una delle possibili costruzioni di un moto Browniano $B = (B_t)_{t\geq 0}$, quella sostanzialmente proposta dallo stesso Wiener e divisa in due passi.

(I) Fissato un qualunque spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sul quale esista sempre una successione di variabili aleatorie reali *indipendenti con leggi arbitrarie*, com'è notoriamente per uno spazio di probabilità non atomico (nel quale esiste almeno un evento per ogni possibile valore di probabilità), sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. Gaussiane di legge $\mathcal{N}(0,1)$, e siano $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormale massimale dello spazio di Hilbert separabile $\mathcal{L}^2(0,\infty) := \mathcal{L}^2([0,\infty), \mathcal{B}([0,\infty)), \lambda)$, dove λ indica la misura di Lebesgue unidimensionale ristretta appunto a $\mathcal{B}([0,\infty))$, e quindi $G_n(t) := \int_0^t g_n(s)\,ds = \langle g_n\,;\mathbb{1}_{[0,t]}\rangle_{\mathcal{L}^2(0,\infty)}$, $t \geq 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$: allora $\widetilde{B} := (\widetilde{B}_t)_{t\geq 0}$, $\widetilde{B}(t,\omega) := \sum_{n\in\mathbb{N}} G_n(t) X_n(\omega)$, è ben definito e soddisfa le prime tre condizioni della Definizione 1. Per questa elementare verifica sono essenziali il fatto che il limite in L^2 di variabili aleatorie Gaussiane resta una variabile aleatoria Gaussiana ed il fatto che componenti *incorrelate* di un vettore Gaussiano sono in realtà indipendenti.

(II) Otteniamo il desiderato moto Browniano $B = (B_t)_{t\geq 0}$ come *modifica* di $\widetilde{B}$ utilizzando opportunamente il celeberrimo Criterio di hölderianità di Kolmogorov, arrivando per l'esattezza alla condizione (d)$'$ per B.

A questo punto, la questione della maggiore regolarità delle traiettorie di $B = (B_t)_{t\geq 0}$ viene presto risolta ricordando la fondamentale identità

$$\forall\, t \geq 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left[B_{\frac{t(k+1)}{2^n}} - B_{\frac{tk}{2^n}}\right]^2 = t \quad q.c. \quad :$$

infatti, se esistesse anche solo un $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1)$ tale per cui la traiettoria $(B_t(\omega))_{t\geq 0}$ fosse localmente γ-hölderiana per un certo ω, allora fissato un $t > 0$ e considerata una costante di hölderianità $C > 0$ relativa all'intervallo $[0,t]$ avremmo che $\sum_{k=0}^{2^n-1}\left[B_{\frac{t(k+1)}{2^n}} - B_{\frac{tk}{2^n}}\right]^2 \leq C^2\, 2^n \left(\frac{t}{2^n}\right)^{2\gamma} = C^2\, t^{2\gamma}\, 2^{-n(2\gamma-1)} \to 0$ per $n \to \infty$ (sempre in corrispondenza di ω).

Rimandiamo senz'altro a [6] per una trattazione dettagliata di tutto questo richiamo (mentre a [3] e [4] per altri possibili approcci alla costruzione di un moto Browniano).

Per quanto riguarda il caso limite $\gamma = \frac{1}{2}$, comprenderemo proprio alla fine della prossima sezione che q.c., purtroppo, le traiettorie di un moto Browniano sono anche *non* localmente $\frac{1}{2}$-hölderiane. Affronteremo invece in modo diretto il discorso sulla derivabilità subito dopo aver dimostrato la Legge del logaritmo iterato per un moto Browniano.

Comunque sia, adesso ha più senso puntualizzare che potremmo considerare la "legge canonica" $\mathbf{P}_B$ del moto Browniano B come definita *non* su tutto $C([0,\infty))$, quanto piuttosto sul suo sottospazio chiuso $C_0([0,\infty))$ delle funzioni reali su $[0,\infty)$ continue *e nulle in zero*, e così faremo: questa probabilità è *la misura di Wiener*, ed indichiamo $(W, \mathcal{W}, \mathbf{P}_\mathcal{W}) := (C_0([0,\infty)), \mathcal{B}(C_0([0,\infty))), \mathbf{P}_B)$. La misura di Wiener $\mathbf{P}_\mathcal{W}$ è *unica*, e affinché un processo reale a tempi continui nullo in zero *e* q.c. continuo sia un moto Browniano occorre e *basta* che abbia come legge proprio $\mathbf{P}_\mathcal{W}$.

Passiamo dunque a stabilire qualcosa di concreto in più su un moto Browniano, e per far questo potrebbe rivelarsi utile la semplice proposizione seguente (la quale invece sicuramente farà comodo nella prossima sezione).

Proposizione 1. *Per un processo reale $B = (B_t)_{t\geq 0}$ a tempi continui, le due seguenti condizioni sono equivalenti*:

(a) *B è un moto Browniano;*

(b) *B è un processo q.c. continuo, Gaussiano e centrato con funzione di covarianza $\Gamma(s,t) = s \wedge t$ per ogni $s, t \geq 0$.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare (a)⇒(b), per cui supponiamo che B sia un moto Browniano: allora B è un processo Gaussiano grazie sostanzialmente all'identità $u_1 B_{t_1} + u_2 B_{t_2} = (u_1 + u_2) B_{t_1} + u_2 (B_{t_2} - B_{t_1})$, vera per ogni $t_1, t_2 \geq 0$ e $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$; infine, per ogni $s, t \geq 0$ con $s \leq t$, è appunto $\Gamma(s,t) = \mathbf{E}[B_s B_t] = \mathbf{E}[B_s (B_t - B_s)] + \mathbf{E}[(B_s)^2] = 0 + s = s$. □

Concludiamo proprio notando le seguenti proprietà di un moto Browniano $B = (B_t)_{t\geq 0}$:

(1) (omogeneità) $\forall\, s \geq 0$, $(B_{t+s} - B_s)_{t\geq 0}$ *è un moto Browniano;*

(2) (scaling) $\forall\, \lambda \neq 0$, $(\lambda^{-1} B_{\lambda^2 t})_{t \geq 0}$ *è un moto Browniano;*

(2)′ (simmetria) $-B$ *è un moto Browniano;*

(2)″ (specularità) *se L è un'applicazione reale dispari su $\mathbb{R}$, allora* $\limsup_{t\to\infty} L(B_t) \leq l$ *se, e solo se,* $\liminf_{t\to\infty} L(B_t) \geq -l$*;*

(3) Esercizio. $((B_t)^2 - t)_{t\geq 0}$ *è una martingala.*

Soluzione dell'Esercizio: se indichiamo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} := \sigma(B)$, allora $\mathbf{E}[[(B_t)^2 - t] - [(B_s)^2 - s] | \mathcal{F}_s] = 0$ q.c. per ogni $s, t \geq 0$ con $s \leq t$ perché, per i medesimi indici, è $t - s = \mathbf{E}[(B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[(B_t)^2 - (B_s)^2 | \mathcal{F}_s]$ q.c.. ◊

Osserviamo in particolare come la specularità di un moto Browniano giustifichi completamente il fatto di poter studiare l'ordine della sua massima fluttuazione "totale", cioè *in modulo*, studiando soltanto quello della sua massima fluttuazione *superiore*.

1.2 Proprietà Forte di Markov e Conseguenze

La proprietà di omogeneità è una sorta di *invarianza per traslazioni* per un moto Browniano, quindi viene a rappresentarne con particolare efficacia anche la proprietà di Markov con la quale in effetti potrebbe esser confusa. Un moto Browniano soddisfa in realtà una proprietà decisamente più generale, che è la seguente e la cui dimostrazione è sostanzialmente quella proposta in [1].

Teorema 1 (Proprietà forte di Markov). *Sia* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *un moto Browniano e sia* τ *un tempo d'arresto rispetto a* $\sigma(B)$ *finito q.c.: allora* $(B_{t+\tau} - B_\tau)_{t\geq 0}$ *è un moto Browniano, e inoltre è indipendente da* $\mathcal{F}_\tau$ *.*

Dimostrazione. Indichiamo $X_t := B_{t+\tau} - B_\tau$ per ogni $t \geq 0$ e concentriamoci semplicemente nel verificare l'identità

$$\mathbf{E}[f(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})\mathbb{1}_A] = \mathbf{E}[f(B_{t_1}, \dots, B_{t_m})]\mathbf{P}[A]$$

al variare di $m \in \mathbb{N}$ e $t_1, \dots, t_m \geq 0$ con $t_1 < \dots < t_m$, di $A \in \mathcal{F}_\tau$ e di f applicazione reale su $\mathbb{R}^m$ *continua e limitata*: visto infatti che $X := (X_t)_{t\geq 0}$ è un processo reale a tempi continui nullo in zero *e* q.c. continuo, avremmo allora subito che X è uguale in legge a B (scegliendo $A := \Omega$) e cioè che è a sua volta un moto Browniano, e quindi inoltre otterremmo

$$\mathbf{P}[\{X \in C\} \cap A] = \mathbf{P}[B \in C]\mathbf{P}[A]\,, = \mathbf{P}[X \in C]\mathbf{P}[A]$$

per ogni insieme cilindrico di $\mathbb{R}^m$ (o di $C_0([0,\infty))$), ovvero questa stessa identità per ogni $C \in \mathcal{B}(C_0([0,\infty)))$ grazie ad un'immediata applicazione del Teorema delle classi monotòne a $\mathcal{M} := \{C \in \mathcal{B}(C_0([0,\infty))) : \mathbf{P}[\{X \in C\} \cap A] = \mathbf{P}[X \in C]\mathbf{P}[A]\}$. Sia dunque $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ l'usuale successione di tempi d'arresto (rispetto a $\sigma(B)$) diadici e tali che $\tau_n \downarrow \tau$ q.c., ovvero $\tau_n := 2^{-n}\lfloor 2^n\tau + 1\rfloor$ per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ ("$\lfloor\ \rfloor$" è il simbolo di *parte intera*), cioè $\tau_n = \frac{k+1}{2^n}$ *se* $\tau \in (\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ per ogni $k \in \{-1\} \cup \mathbb{N}_0$, cosicché risulti sufficiente arrivare a

$$\mathbf{E}[f(B_{t_1+\tau_n} - B_{\tau_n}, \dots, B_{t_m+\tau_n} - B_{\tau_n})\mathbb{1}_A] = \mathbf{E}[f(B_{t_1}, \dots, B_{t_m})]\mathbf{P}[A]$$

per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ (concludendo subito per convergenza dominata (Lebesgue)), cosa in effetti del tutto elementare: usando infatti la proprietà di Markov di B e che $A \in \mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_{\tau_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, troviamo appunto che sempre per ogni $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[f(B_{t_1+\tau_n} - B_{\tau_n}, \dots, B_{t_m+\tau_n} - B_{\tau_n})\mathbb{1}_A] &= \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \mathbf{E}[f(B_{t_1+\tau_n} - B_{\tau_n}, \dots, B_{t_m+\tau_n} - B_{\tau_n})\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{\tau_n = \frac{k}{2^n}\}}] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \mathbf{E}[f(B_{t_1+\frac{k}{2^n}} - B_{\frac{k}{2^n}}, \dots, B_{t_m+\frac{k}{2^n}} - B_{\frac{k}{2^n}})\mathbb{1}_{A\cap\{\tau_n = \frac{k}{2^n}\}}] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \mathbf{E}[f(B_{t_1}, \dots, B_{t_m})]\mathbf{P}[A \cap \{\tau_n = \frac{k}{2^n}\}] \quad ,
\end{aligned}$$

uguale esattamente a $\mathbf{E}[f(B_{t_1}, \dots, B_{t_m})]\mathbf{P}[A]$. □

Corollario 1. *Sia* $B=(B_t)_{t\geq 0}$ *un moto Browniano e sia* τ *un tempo d'arresto rispetto a* $\sigma(B)$ *finito q.c.: allora* $(2B_{t\wedge\tau}-B_t)_{t\geq 0}$ *è un moto Browniano.*

Dimostrazione. Abbiamo appena accertato che $X=(X_t)_{t\geq 0}$ con $X_t:=B_{t+\tau}-B_\tau$ per ogni $t\geq 0$ è un moto Browniano sicuramente *indipendente* sia da τ che dal processo B arrestato al tempo τ, ovvero da $B^{|\tau}=(B_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$. Se adesso indichiamo $Y_t:=2B_{t\wedge\tau}-B_t$ per ogni $t\geq 0$, ottenendo quindi che $Y=(Y_t)_{t\geq 0}$ è un processo reale a tempi continui nullo in zero e q.c. continuo, allora l'identità $X_{(t-\tau)^+}=(B_t-B_\tau)\mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}$ valida per ogni $t\geq 0$ ci permette di scrivere che $B_t=B_{t\wedge\tau}+X_{(t-\tau)^+}$ e $Y_t=B_{t\wedge\tau}-X_{(t-\tau)^+}$ per ogni $t\geq 0$: i due processi B e Y sono per ciò uguali in legge, in quanto appunto immagini della *medesima* applicazione misurabile dei due blocchi equidistribuiti $(\tau,B^{|\tau},X)$ e $(\tau,B^{|\tau},-X)$ rispettivamente (ricordando in più che pure $-X$ è un moto Browniano). □

Siamo ora in grado di ricavare il Principio di riflessione, proprietà di un moto Browniano che è in verità equivalente proprio al precedente risultato e dal quale infatti trae il nome.

Teorema 2 (Principio di Riflessione per un Moto Browniano)**.** *Sia* $B=(B_t)_{t\geq 0}$ *un moto Browniano: allora,* $\forall\ a>0$ *e* $T>0$,

$$\mathbf{P}[\sup_{0\leq t\leq T} B_t>a]=2\mathbf{P}[B_T>a]\,.$$

Dimostrazione. Basta dimostrare il teorema con $T=1$, ovvero che

$$\mathbf{P}[\sup_{0\leq t\leq 1} B_t>a]=2\mathbf{P}[B_1>a]\,,$$

per poi applicarlo al moto Browniano $(T^{-1/2}B_{Tt})_{t\geq 0}$ (e con un $a':=T^{-1/2}a>0$ diverso da a). Per questo verificheremo più precisamente che

$$\forall\ x\leq a,\quad \mathbf{P}[\sup_{0\leq t\leq 1} B_t\geq a, B_1\leq x]=\mathbf{P}[B_1\geq 2a-x]$$

(da cui l'identità voluta scegliendo $x:=a$ ed osservando che $\{\sup_{0\leq t\leq 1}B_t\geq a, B_1>a\}=\{B_1>a\}$): considerato infatti il tempo d'arresto $\tau:=\inf\{t>0: B_t\geq a\}\wedge 2$ rispetto a $\sigma(B)$ e addirittura limitato, e scelto un qualsiasi $x\leq a$, è

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[\sup_{0\leq t\leq 1} B_t\geq a, B_1\leq x] &= \mathbf{P}[\tau\leq 1, B_1\leq x]\\ &= \mathbf{P}[\tau\leq 1]\mathbf{P}[B_1\leq x|\tau\leq 1]\quad ,\end{aligned}$$

dove $\mathbf{P}[B_1\leq x|\tau\leq 1]=\mathbf{P}[2B_\tau-B_1\geq 2a-x|\tau\leq 1]=\mathbf{P}[2B_{1\wedge\tau}-B_1\geq 2a-x|\tau\leq 1]$ in quanto $B_\tau=a$ ogni volta che $\tau\leq 1$, per cui riassumendo

$$\mathbf{P}[\sup_{0\leq t\leq 1} B_t\geq a, B_1\leq x]=\mathbf{P}[2B_{1\wedge\tau}-B_1\geq 2a-x]$$

e concludiamo usando che $2B_{1\wedge\tau}-B_1=Y_1\overset{\mathcal{L}}{=}B_1$ *se* $Y_t:=2B_{t\wedge\tau}-B_t$ per ogni $t\geq 0$ (come garantisce il Corollario 1). □

Osserviamo che in particolare $\mathbf{P}[T^{-1/2}\sup_{0\le t\le T} B_t > a] = 2\mathbf{P}[B_1 > a]$ per ogni $a, T > 0$.

In vista della prima stima sull'ordine di massima fluttuazione superiore di un moto Browniano, dobbiamo ora proseguire con un lemma più che elementare *ma* pure molto utile, in quanto può chiaramente esser utilizzato in combinazione naturale proprio col Principio di riflessione: tale modesto risultato verrà infatti invocato tra poco e soprattutto nelle dimostrazioni delle due leggi del logaritmo iterato.

Lemma 1. *Sia* $X \sim \mathcal{N}(0,1)$: *allora,* $\forall\, x > 0$,

$$\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}(x+\frac{1}{x})} \le \mathbf{P}[X > x] \le \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}x} \quad .$$

Dimostrazione. Se $\varphi(t) := \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, $t \in \mathbb{R}$, è la densità di X, allora $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$ e quindi

$$\mathbf{P}[X > x] = \int_x^\infty \varphi(t)\,dt = \int_x^\infty \frac{1}{t}(t\varphi(t))\,dt = \left[-\frac{\varphi(t)}{t}\right]_x^\infty - \int_x^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt \ :$$

anzitutto $\frac{\varphi(t)}{t^2} \ge 0$, $t \ge x$, implica $\mathbf{P}[X > x] \le \frac{\varphi(x)}{x}$; d'altra parte $-\frac{1}{t^2} \ge -\frac{1}{x^2}$, $t \ge x$, implica $\mathbf{P}[X > x] \ge \frac{\varphi(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\int_x^\infty \varphi(t)\,dt$, ovvero $(1+\frac{1}{x^2})\mathbf{P}[X > x] \ge \frac{\varphi(x)}{x}$. $\square$

La prima stima voluta sarebbe in verità trascurabile rispetto alla seconda, ed infatti è implicitamente contenuta nella *proprietà di inversione temporale* che viene spiegata nel prossimo teorema e che in effetti risulterà importante di per sé a cominciare dal fatto che contribuirà ad ottenere proprio la seconda stima, dalla quale a sua volta discenderanno le ultime caratteristiche di un moto Browniano che analizziamo in questa sezione.

Teorema 3 (Proprietà di inversione temporale)**.** *Sia* $B = (B_t)_{t\ge 0}$ *un moto Browniano*: *allora* $(tB_{1/t})_{t>0}$ *è un moto Browniano, intendendolo uscente dall'origine.*

Dimostrazione. Il processo $(tB_{1/t})_{t>0}$ è Gaussiano perché, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $t_1, \dots, t_n > 0$, il vettore $(B_{1/t_1}, \dots, B_{1/t_n})$ è Gaussiano *e* $(t_1B_{1/t_1}, \dots, t_nB_{1/t_n}) = (B_{1/t_1}, \dots, B_{1/t_n})diag[t_1, \dots, t_n]$; inoltre, per ogni $s, t \ge 0$, ha funzione di covarianza $\Gamma(s,t) = \mathbf{E}[(sB_{1/s})(tB_{1/t})] = st(\frac{1}{s} \wedge \frac{1}{t}) = s \wedge t$. Infine $\limsup_{t\downarrow 0}(tB_{1/t}) = 0$ q.c.: anzitutto, visto che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $t \ge n$ è $\frac{B_t}{t} \le \frac{B_t - B_n}{n} + \frac{B_n}{n}$, grazie alla Legge forte di Kolmogorov abbiamo

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\downarrow 0}(tB_{1/t}) &= \limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} \\
&\le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{n\le t\le n+1} (B_t - B_n) \ + \ \limsup_{n\to\infty} \frac{B_n}{n} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{n\le t\le n+1} (B_t - B_n) \quad q.c. \quad ;
\end{aligned}$$

d'altra parte, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x > 0$ scelti, il Principio di riflessione applicato a $(B_{t+n}-B_n)_{t\geq 0}$ e quindi il Lemma 1 danno

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[\sup_{n\leq t\leq n+1}(B_t - B_n) > x] &= \mathbf{P}[\sup_{0\leq t\leq 1}(B_{t+n} - B_n) > x] \\ &= 2\mathbf{P}[B_{n+1} - B_n > x] \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-x^2/2}}{x} \quad \leq \quad \frac{e^{-x^2/2}}{x} \quad , \end{aligned}$$

e ciò implica che, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}[\sup_{n\leq t\leq n+1}(B_t - B_n) > n^{\varepsilon}] < \infty \ :$$

per il Primo lemma di Borel-Cantelli, l'evento $\liminf_{n\to\infty}\{\sup_{n\leq t\leq n+1}(B_t - B_n) \leq n^{\varepsilon}\}$ è quasi certo per ogni $\varepsilon \downarrow 0$, per cui in effetti anche $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sup_{n\leq t\leq n+1}(B_t - B_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sup_{n\leq t\leq n+1}(B_t - B_n) = 0$ q.c. . □

Osserviamo che dunque il teorema precedente equivale sostanzialmente all'identità

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0 \quad q.c. \quad ,$$

che precisamente quindi sarebbe un *limite*: a parole, al fatto cioè che q.c. un moto Browniano abbia per $t \to \infty$ un ordine di massima fluttuazione superiore *minore* rispetto a quello di t. Riusciamo a dedurre quasi immediatamente una stima nel senso opposto, ovvero "dal basso", *proprio* per inversione temporale.

Corollario 2. *Sia $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un moto Browniano: allora*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \infty \quad q.c. \quad .$$

Dimostrazione. In virtù del teorema precedente, la tesi equivale all'identità

$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \infty \quad q.c. \quad ,$$

ovvero alla seguente proposizione:

$$\forall\, \lambda > 0 \text{ scelto, se } A := \{\inf\{t > 0 : B_t \geq \lambda\sqrt{t}\} = 0\}, \text{ allora } \mathbf{P}[A] = 1 \ .$$

Se indichiamo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} := \sigma(B)$, allora in effetti A contiene l'evento

$$A' := \limsup_{n\to\infty}\{B_{1/n} \geq \lambda\sqrt{1/n}\} = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n}\{B_{1/k} \geq \lambda\sqrt{1/k}\} \ \in \ \mathcal{F}_0^+ \ :$$

per la Legge 0-1 di Blumenthal, $\mathbf{P}[A'] \in \{0,1\}$; ma ora $\mathbf{P}[A'] \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}[n^{-1/2}B_{1/n} \geq \lambda] > 0$ implica $\mathbf{P}[A'] = 1$ (dove, per la prima disuguaglianza, abbiamo semplicemente applicato il classico Lemma di Fatou alla successione $\mathbb{1}_{\{n^{-1/2}B_{1/n}\geq\lambda\}}$, la quale ovviamente ha $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{n^{-1/2}B_{1/n}\geq\lambda\}} = \mathbb{1}_{A'}$). □

Così, q.c., un moto Browniano $B=(B_t)_{t\geq 0}$ ha per $t\to\infty$ un ordine di massima fluttuazione superiore *maggiore* rispetto a quello di $\sqrt{t}$, e ciò implica subito le due seguenti ulteriori proprietà per B:

(1) $\limsup_{t\to\infty} B_t = \infty$ *q.c.*;

(2) *B ha q.c. traiettorie non localmente $\frac{1}{2}$-hölderiane.*

L'ordine esatto di massima fluttuazione superiore di B sarà svelato nella prossima sezione, ma intanto quanto appreso già basta a dimostrare la semplice proposizione che segue e che chiude questa sezione, la cui *fondamentale importanza* sarà del tutto chiara nel corso del secondo capitolo a cominciare dalla dimostrazione della "versione debole" del Teorema di immersione di Skorohod. Comunque sia, ammettiamo che si tratta sostanzialmente di una specie di *Rovina del giocatore* con dinamica simmetrica.

Proposizione 2. *Sia $B=(B_t)_{t\geq 0}$ un moto Browniano: allora, per ogni $u<0\leq v$ scelti, $\tau_{u,v}:=\inf\{t>0 : B_t\in\{u,v\}\}$ è un tempo d'arresto rispetto a $\sigma(B)$ finito q.c. tale che*

$$\mathbf{P}[B_{\tau_{u,v}}=u]=\frac{v}{v-u}\,,\qquad \mathbf{P}[B_{\tau_{u,v}}=v]=\frac{-u}{v-u}\qquad e\qquad \mathbf{E}[\tau_{u,v}]=-uv\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo $\tau_u:=\inf\{t>0 : B_t=u\}$ e $\tau_v:=\inf\{t>0 : B_t=v\}$, cosicché sia $\tau_{u,v}=\tau_u\wedge\tau_v$, e poniamo $A_0:=\{\tau_u=\tau_v\}$, $A_1:=\{\tau_u<\tau_v\}$ e $A_2:=\{\tau_u>\tau_v\}$, cosicché siano $A_0=\{\tau_u=\tau_v=\infty\}$, $A_1=\{B_{\tau_{u,v}}=u\}$, $A_2=\{B_{\tau_{u,v}}=v\}$ e $\Omega=\biguplus_{i\in\{0,1,2\}}A_i$ (simbolo di *unione disgiunta*). Allora $\tau_{u,v}$ è q.c. finito perché tale è τ_v (ovvero τ_u per simmetria), usando appunto che $\limsup_{t\to\infty}B_t=\infty$ q.c., per ciò $\mathbf{P}[A_0]=0$ ossia $\mathbf{P}[A_1]+\mathbf{P}[A_2]=1$. Adesso la relazione $B_{\tau_{u,v}}=u\mathbb{1}_{A_1}+v\mathbb{1}_{A_2}$ q.c. implica la seconda identità lineare che porta alle espressioni esplicite di $\mathbf{P}[A_1]$ e $\mathbf{P}[A_2]$: infatti $0=\mathbf{E}[B_0]=\mathbf{E}[B_{\tau_{u,v}}]=u\mathbf{P}[A_1]+v\mathbf{P}[A_2]$ (dove la seconda uguaglianza è subito ottenuta applicando il Teorema d'arresto a $(B_t)_{t\geq 0}$ stesso). Per concludere, visto che $((B_t)^2-t)_{t\geq 0}$ è una martingala nulla in zero e q.c. continua tale che, comunque scelto $p\in[1,\infty)$, sia $(B_t)^2-t\in\mathcal{L}^p$ per ogni $t\geq 0$, ancora per il Teorema d'arresto vale l'uguaglianza $\mathbf{E}[T\wedge\tau_{u,v}]=\mathbf{E}[(B_{T\wedge\tau_{u,v}})^2]$ per ogni $T>0$ scelto: per convergenza monotòna nel primo membro (Beppo Levi) e convergenza dominata nell'ultimo (Lebesgue), otteniamo appunto per $T\to\infty$ che $\tau_{u,v}$ è *integrabile* con $\mathbf{E}[\tau_{u,v}]=\mathbf{E}[(B_{\tau_{u,v}})^2]=u^2\mathbf{P}[A_1]+v^2\mathbf{P}[A_2]$. $\square$

1.3 Legge del Logaritmo Iterato

Veniamo finalmente alla proprietà più raffinata di un moto Browniano tra tutte quelle che presentiamo in questo lavoro. La relativa dimostrazione dovrebbe risultare a questo punto piuttosto tecnica, e di certo non breve, *ma* per niente difficile.

Teorema 4 (Legge del Logaritmo Iterato per un Moto Browniano)**.** *Sia $B=(B_t)_{t\geq 0}$ un moto Browniano: allora*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}}=1\quad q.c.\quad .$$

Dimostrazione. Primo passo: " $\leq$ ". Consideriamo anzitutto un qualsiasi $\alpha > 1$ e quindi la successione reale $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definita per ricorsione ponendo $t_0 := 0$, $t_1 := \alpha$ e $t_{n+1} := \alpha t_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia dunque $f(t) := f_\alpha(t) := 2\alpha^2 \log\log t$, $t > 1$, ovvero tale che $f(t)/2\alpha = \alpha \log\log t$ per ogni $t > 1$; in particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, è $f(t_n)/2\alpha = \alpha \log(n \log \alpha) = \alpha \log n + \alpha \log\log \alpha = \log n^\alpha + \log(\log \alpha)^\alpha$. Se adesso $n_0 \in \mathbb{N}$ è grande abbastanza affinché sia $f(t_n) > 0$ per ogni $n \geq n_0$, allora grazie al Principio di riflessione e al Lemma 1 abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[\sup_{t_n \leq t \leq t_{n+1}} B_t > \sqrt{t_n f(t_n)}] &\leq \mathbf{P}[\sup_{0 \leq t \leq t_{n+1}} B_t > \sqrt{t_n f(t_n)}] \\
&= \mathbf{P}[t_{n+1}^{-1/2} \sup_{0 \leq t \leq t_{n+1}} B_t > \sqrt{f(t_n)/\alpha}] \\
&= 2\mathbf{P}[B_1 > \sqrt{f(t_n)/\alpha}] \\
&\leq \sqrt{\frac{\alpha}{f(t_n)}}\, e^{-f(t_n)/2\alpha} \\
&= (\log \alpha)^{-\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{f(t_n)}}\, n^{-\alpha} \quad , \quad \leq \quad n^{-\alpha}
\end{aligned}$$

per n abbastanza grande, diciamo per $n \geq n_1 \in \mathbb{N}$ (visto che $f(t_n) \to \infty$), e di conseguenza

$$\sum_{n \geq n_0 \vee n_1} \mathbf{P}[\sup_{t_n \leq t \leq t_{n+1}} B_t > \sqrt{t_n f(t_n)}] < \infty \ :$$

per il Primo lemma di Borel-Cantelli, l'evento $\liminf_{n\to\infty}\{\sup_{t_n \leq t \leq t_{n+1}} B_t \leq \sqrt{t_n f(t_n)}\}$ è quasi certo. Per crescenza dell'applicazione $t \mapsto \sqrt{t f(t)}$, $t > 1$, è quindi

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t f(t)}} \leq 1 \quad q.c. \quad ,$$

da cui la disuguaglianza voluta mandando $\alpha \downarrow 1$.

Ultimo passo: " $\geq$ ". Sia $\beta := \beta_\alpha := \frac{\alpha}{\alpha-1}$, ovvero tale che $1/\beta = 1 - 1/\alpha$, per cui $\alpha^n - \alpha^{n-1} = \alpha^n/\beta$ o in altri termini $t_n - t_{n-1} = t_n/\beta$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia dunque $g(t) := g_\beta(t) := \frac{2}{\beta^2} \log\log t$, $t > 1$, ovvero tale che $\frac{\beta g(t)}{2} = \frac{1}{\beta} \log\log t$ per ogni $t > 1$; in particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, è $\frac{\beta g(t_n)}{2} = \log n^{1/\beta} + \log(\log \alpha)^{1/\beta}$. Osservato inoltre che, per ogni $x \neq 0$, $(x + \frac{1}{x})^{-1} = \frac{x}{1+x^2}$ è $\geq \frac{1}{2x}$ certamente per ogni $x \geq 1$, sia poi $n_0 \in \mathbb{N}$ grande abbastanza affinché $\beta g(t_n) \geq 1$ per ogni $n \geq n_0$: allora il Lemma 1 *più* l'identità $\lim_{n\to\infty} n^{-\varepsilon} g(t_n) = 0$, vera per ogni $\varepsilon > 0$, danno

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[B_{t_n} - B_{t_{n-1}} > \sqrt{t_n g(t_n)}] &= \mathbf{P}[B_1 > \sqrt{\beta g(t_n)}] \\
&\geq \frac{(\log \alpha)^{1/\beta}}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\beta g(t_n)}}\, n^{-1/\beta} \quad , \\
&\geq n^{-\varepsilon} n^{-1/\beta} \quad \geq \quad n^{-1}
\end{aligned}$$

per ogni $\varepsilon \in (0, 1-1/\beta)$ e per n abbastanza grande, diciamo per $n \geq n_1 \in \mathbb{N}$, e di conseguenza

$$\sum_{n \geq n_0 \vee n_1} \mathbf{P}[B_{t_n} - B_{t_{n-1}} > \sqrt{t_n g(t_n)}] = \infty \ :$$

per il Secondo lemma di Borel-Cantelli, l'evento $\limsup_{n\to\infty}\{B_{t_n} - B_{t_{n-1}} > \sqrt{t_n g(t_n)}\}$ è quasi certo. Ora, in virtù della disuguaglianza $\liminf_{t\to\infty} B_t/\sqrt{2t \log\log t} \geq -1$ *q.c.* appena dimostrata, ed osservato che $\frac{t_n \log\log t_n}{t_{n-1}\log\log t_{n-1}} = \alpha \frac{\log(n\log\alpha)}{\log((n-1)\log\alpha)} \downarrow \alpha$, abbiamo $B_{t_{n-1}}/\sqrt{2t_{n-1}\log\log t_{n-1}} \geq -(1+\varepsilon)$ q.c. per ogni $\varepsilon > 0$ e per infiniti $n \in \mathbb{N}$, tali che *quindi* $B_{t_{n-1}}/\sqrt{2t_n \log\log t_n} \geq -(1+\varepsilon)\alpha^{-1/2}$ q.c. : segue

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{B_{t_n}}{\sqrt{2t_n \log\log t_n}} \geq \frac{1}{\beta} - (1+\varepsilon)\alpha^{-1/2} \quad q.c. \quad ,$$

da cui la tesi mandando $\alpha \uparrow \infty$. □

Osserviamo che l'applicazione $t \mapsto \sqrt{t \log t}$, $t > 0$, pur essendo per $t \to \infty$ di ordine compreso tra $\sqrt{t}$ e t al pari dell'applicazione $t \mapsto \sqrt{t \log\log t}$, $t > 1$, presenta rispetto a quest'ultima la seguente fondamentale differenza: comunque scelto $\alpha > 1$, mentre $\lim_{n\to\infty} n^{-\varepsilon}\log\log\alpha^n = 0$ per ogni $\varepsilon > 0$, *invece* $\lim_{n\to\infty} n^{-\varepsilon}\log\alpha^n \neq 0$ per $\varepsilon \downarrow 0$ (è addirittura ∞). Questa rappresenta una possibile ragione per la quale fallirebbe una dimostrazione del tutto analoga alla precedente *ma* di una a priori presumibile "Legge del logaritmo per un moto Browniano", fallendo giustamente proprio sul "$\geq$".

Corollario 3. *Sia* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *un moto Browniano: allora,* $\forall\ s \geq 0$,

$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{B_{t+s} - B_s}{\sqrt{2t \log\log(1/t)}} = 1 \quad q.c. \quad .$$

Dimostrazione. Per omogeneità la tesi equivale all'identità $\limsup_{t\downarrow 0} B_t/\sqrt{2t\log\log(1/t)} = 1$ q.c., la quale coincide esattamente col Teorema 4 applicato al moto Browniano $(tB_{1/t})_{t>0}$. □

Notiamo per finire come il corollario precedente implichi immediatamente che un moto Browniano $B = (B_t)_{t\geq 0}$ abbia q.c. traiettorie *non* derivabili in alcun punto: infatti, $\forall\ s \geq 0$, risulta perfino

$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{B_{t+s} - B_s}{t} = \infty \quad q.c. \quad .$$

Capitolo 2

Teorema di Immersione di Skorohod e Applicazioni

Il cuore del nostro lavoro coincide esattamente con questo capitolo, dal quale infatti prende il nome, e lo affronteremo come già descritto nell'Introduzione. Nel far questo buona parte dello studio svolto nel capitolo precedente si rivelerà *indispensabile*, in particolar modo la proprietà forte di Markov per un moto Browniano *più* la Proposizione 2. Il fatto è che, mentre per lo scopo della prima sezione sarà sufficiente utilizzarle "così come sono", per quello della seconda dovremo *estendere* in senso opportuno il procedimento coi tempi d'arrivo della Proposizione 2 ed invocare di conseguenza ben altre tecniche matematiche fra le quali un uso più sistematico della stessa proprietà di Markov. La semplice idea di fondo sarebbe la seguente: "così come la Proposizione 2 costituisce più o meno il punto chiave per la buona riuscita della prima versione del teorema di Skorohod, corrispondentemente un'opportuna sua estensione darà in qualche modo la seconda versione del teorema".

Il principale riferimento bibliografico relativo a questo capitolo è indubbiamente [3]. Segnaliamo comunque che la premessa matematica che veniamo subito a presentare nasce da un breve confronto col Professor Maurizio Pratelli.

2.1 Enunciato Debole del Teorema

L'"opportuno tempo aleatorio" al quale abbiamo vagamente accennato all'inizio della prima pagina non sarebbe soltanto un tempo d'arresto finito q.c. (che permetta di avere in legge una variabile aleatoria reale a partire da un moto Browniano), bensì lo vorremmo essere *integrabile*: venendo a mancare tale vincolo di migliore regolarità, infatti, il nostro problema diventerebbe quasi triviale. Spieghiamo questo apprezzamento mediante la seguente proposizione, per poi arricchirla con un'interessante osservazione legata appunto all'eventuale integrabilità di un "opportuno" tempo d'arresto.

Proposizione 3. *Sia X una variabile aleatoria reale e sia $B=(B_t)_{t\geq 0}$ un moto Browniano: allora esiste un tempo d'arresto τ rispetto a $\sigma(B)$ finito q.c. tale per cui*

$$B_\tau \overset{\mathcal{L}}{=} X \ .$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione di ripartizione F di X e la pseudo-inversa sinistra G di F ; se indichiamo quindi con Φ la funzione di ripartizione di B_1 (la quale è abbondantemente continua), allora $\Phi(B_1)$ ha legge *uniforme* su $[0,1]$ e per ciò $G(\Phi(B_1)) \overset{\mathcal{L}}{=} X$ (avendo entrambe funzione di ripartizione F): basta dunque porre $\tau := \inf\{t > 1 : B_t = G(\Phi(B_1))\}$ (ed osservare che $\{\tau < 1\} = \emptyset$). $\square$

A riguardo del precedente ragionamento, ci limitiamo ad evidenziare soltanto che il legame fondamentale fra una funzione di ripartizione F e la sua pseudo-inversa sinistra

$$G(t) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}, \quad 0 < t < 1,$$

consiste nel fatto che, per ogni $t \in (0,1)$ e $x \in \mathbb{R}$, sia $G(t) \leq x \Leftrightarrow t \leq F(x)$ (visto tra l'altro che $t \leq F(G(t))$).

Osservazione. Per quanto invece concerne il nostro problema originario, vediamo adesso mediante strumenti fondamentali di *integrazione stocastica secondo Itô* come, abbastanza sorprendentemente, l'eventuale integrabilità di τ implicherebbe la proprietà di X di esser *sia* centrata *sia* di quadrato integrabile (mentre il viceversa sarà l'obiettivo della prima metà del capitolo). Senza scrivere troppi dettagli, e ragionando sempre in riferimento alla filtrazione *generata* da B, è possibile dimostrare che per ogni processo reale a tempi continui $H = (H_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{M}^2$ (ovvero progressivamente misurabile e tale che $\mathbf{E}[\int_0^\infty H_s^2\, ds] < \infty$) è ben definito *l'integrale stocastico* $\int_0^t H_s\, dB_s$ per ogni $t \in [0,\infty]$, il quale soddisfa le due seguenti proprietà:

(a) $(\int_0^t H_s\, dB_s)_{t\geq 0}$ è una martingala centrata, di quadrato integrabile *e* continua;

(b) $\mathbf{E}[(\int_0^\infty H_s\, dB_s)^2] = \mathbf{E}[\int_0^\infty H_s^2\, ds]$ (uguaglianza chiamata *isometria di Itô*).

Se in particolare τ è un tempo d'arresto finito q.c., allora $H(t,\omega) := (\mathbb{1}_{[0,\tau]})(t,\omega) := \mathbb{1}_{[0,\tau(\omega)]}(t) = \mathbb{1}_{\{0\leq t\leq\tau\}}(\omega)$ è progressivamente misurabile (in quanto adattato e q.c. continuo a sinistra) e tale che $H \in \mathcal{M}^2 \Leftrightarrow \mathbf{E}[\tau] < \infty$ (che supponiamo), essendo precisamente $\mathbf{E}[\int_0^\infty H_s^2\, ds] = \mathbf{E}[\tau]$; inoltre quindi dalla fondamentale identità $\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau]}\, dB_s = B_t^{|\tau} = B_{t\wedge\tau}$ (di verifica comunque quasi immediata) deduciamo $\int_0^\infty \mathbb{1}_{[0,\tau]}\, dB_s = B_\tau$ e quindi $\mathbf{E}[B_\tau] = 0$ per (a), mentre $\mathbf{E}[B_\tau^2] = \mathbf{E}[\int_0^\infty \mathbb{1}_{[0,\tau]}\, ds] = \mathbf{E}[\tau]$ per (b). $\Diamond$

Comunque sia, ora tutto ha inizio da un semplice lemma, non a caso costruttivo, che giocherà un ruolo veramente decisivo nella dimostrazione appunto della versione debole del teorema di Skorohod (e, in verità, solo in questa).

Lemma 2. *Sia μ una probabilità su $\mathbb{R}$ con $\int_{\mathbb{R}} \mu(dx)\, x = 0$ e $\sigma^2 := \int_{\mathbb{R}} \mu(dx)\, x^2 < \infty$: allora esiste una probabilità $\vartheta := \vartheta_\mu$ su $(-\infty,0)\times[0,\infty)$ tale che*

$$\mu = \int_{(-\infty,0)\times[0,\infty)} \vartheta(d(u,v))\, \Big(\frac{v}{v-u}\delta_u + \frac{-u}{v-u}\delta_v\Big) \quad ,$$

per cui in particolare $\sigma^2 = -\int_{(-\infty,0)\times[0,\infty)} \vartheta(d(u,v))\, uv$.

Dimostrazione. La tesi è dunque $\mu(A) = \int_{(-\infty,0)\times[0,\infty)} \vartheta(d(u,v))\,(\frac{v}{v-u}\mathbb{1}_A(u) + \frac{-u}{v-u}\mathbb{1}_A(v))$ per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Consideriamo per questo $m := \int_{[0,\infty)} \mu(dv)\,v, = -\int_{(-\infty,0)} \mu(du)\,u$: se fosse $m = 0$ allora $\sigma^2 = 0$, per cui necessariamente $\mu = \delta_0$ e così potremmo porre $\vartheta := \delta_{(-1,0)}$. Nell'ipotesi quindi che sia $m > 0$, consideriamo *su* $(-\infty, 0) \times [0, \infty)$ la misura ϑ definita univocamente da

$$\vartheta(d(u,v)) := \mu(du)\mu(dv)\,m^{-1}(v-u) \quad , \quad \text{ovvero} \quad \vartheta := m^{-1}(v-u)\,\mu\otimes\mu \quad :$$

così, per il Teorema di Fubini (e per quello d'integrazione rispetto alla misura definita da una certa densità finita q.c.), è

$$\begin{aligned}
\int_{(-\infty,0)\times[0,\infty)} \vartheta(d(u,v)) &= m^{-1}\int_{(-\infty,0)} \mu(du) \int_{[0,\infty)} \mu(dv)\,(v-u) \\
&= m^{-1}\int_{(-\infty,0)} \mu(du)\,[\,m - u\mu([0,\infty))\,] \\
&= m^{-1}[\,m\mu((-\infty,0)) + \mu([0,\infty))m\,] = 1\,,
\end{aligned}$$

e questo significa precisamente che ϑ sia una probabilità. A questo punto, in effetti,

$$\begin{aligned}
\int_{(-\infty,0)\times[0,\infty)} \vartheta(d(u,v))\,(\frac{v}{v-u}\delta_u + \frac{-u}{v-u}\delta_v) &= m^{-1}\int_{(-\infty,0)} \mu(du) \int_{[0,\infty)} \mu(dv)\,(v\delta_u - u\delta_v) \\
&= m^{-1}\int_{(-\infty,0)} \mu(du)\,[\,m\delta_u - u\int_{[0,\infty)} \mu(dv)\,\delta_v\,] \\
&= \int_{(-\infty,0)} \mu(du)\,\delta_u + \int_{[0,\infty)} \mu(dv)\,\delta_v = \mu\,,
\end{aligned}$$

e ciò conclude la dimostrazione. □

Ecco la prima versione del teorema: *notiamo bene* la filtrazione di riferimento che viene ivi annunciata per comprendere pienamente la differenza rispetto alla seconda versione del teorema stesso, la quale comparirà alla fine della prossima sezione.

Teorema 5 (Teorema di Immersione di Skorohod)**.** *Sia X una variabile aleatoria reale centrata e di quadrato integrabile: allora esistono uno spazio di probabilità $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$, una variabile aleatoria Y su Ω' e un moto Browniano $B = (B_t)_{t\geq 0}$ su Ω' tali che B sia indipendente da Y e tali che, considerata la filtrazione $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ su Ω' dove $\mathcal{F}_t := \sigma(Y, (B_s)_{0\leq s\leq t})$ per ogni $t \geq 0$, esista un tempo d'arresto τ rispetto a $\mathbb{F}$ finito q.c. con*

$$B_\tau \overset{\mathcal{L}}{=} X \quad e \quad \mathbf{E}[\tau] = \mathbf{Var}[X]\,.$$

Dimostrazione. Primo passo: caso in cui esistano $u < 0 \leq v$ per i quali X sia a valori in $\{u,v\}$. Abbiamo che $\mathbf{P}[X = u] + \mathbf{P}[X = v] = 1$ e $0 = \mathbf{E}[X] = u\mathbf{P}[X = u] + v\mathbf{P}[X = v]$, ossia che $\mathbf{P}[X = u] = \frac{v}{v-u}$ e $\mathbf{P}[X = v] = \frac{-u}{v-u}$, e per ciò $\mathbf{Var}[X] = \mathbf{E}[X^2] = -uv$: grazie alla

Proposizione 2, basta dunque porre $\Omega' := \Omega$ sul quale esista un moto Browniano $B = (B_t)_{t\geq 0}$, e ad esempio $Y := 0$ (reale), per avere che $\tau := \tau_{u,v} = \inf\{t > 0 : B_t \in \{u, v\}\}$ risolve.
Ultimo passo: caso generale. Sia $\mu := \mathbf{P}_X$, e sia quindi $\vartheta := \vartheta_\mu$ come nel Lemma 2: se $(W, \mathcal{W}, \mathbf{P}_\mathcal{W})$ è lo spazio di Wiener, allora poniamo $\Omega' := ((-\infty, 0) \times [0, \infty)) \times W$ e lo muniamo della σ-algebra prodotto $\mathcal{F}' := \mathcal{B}((-\infty, 0) \times [0, \infty)) \otimes \mathcal{W}$ *e* della probabilità prodotto $\mathbf{P}' := \vartheta \otimes \mathbf{P}_\mathcal{W}$ per costruire Y e B in modo canonico mediante lo *schema delle prove indipendenti*, ottenendo in particolare che Y è a valori in $(-\infty, 0) \times [0, \infty)$ e ha legge ϑ. Indicando più precisamente $Y := (U, V)$, poniamo infine $\tau := \tau_{U,V} = \inf\{t > 0 : B_t \in \{U, V\}\}$: si tratta di un tempo d'arresto rispetto a $\mathbb{F}$ in quanto, per ogni $t \geq 0$, $\{\tau \leq t\} = \bigcap_{u<0\leq v,\, u,v\in\mathbb{Q}}(\{Y \in (-\infty, u] \times [v, \infty)\} \cap \{\tau_{u,v} \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$; inoltre, per ogni $x < 0$, grazie al Lemma 2 è

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[X \leq x] &= \mu((-\infty, x]) \\ &= \int_{(-\infty,x]\times[0,\infty)} \vartheta(d(u,v))\, \frac{v}{v-u} \\ &= \int_{(-\infty,x]\times[0,\infty)} \vartheta(d(u,v))\, \mathbf{P}[B_{\tau_{u,v}} = u] \\ &= \mathbf{P}[B_\tau \leq x] \quad , \end{aligned}$$

e analogamente $\mathbf{P}[X \geq x] = \mathbf{P}[B_\tau \geq x]$ per ogni $x \geq 0$, ovvero in definitiva $B_\tau \overset{\mathcal{L}}{=} X$. Infine, ancora per il Lemma 2,

$$\mathbf{E}[\tau] = -\mathbf{E}[UV] = -\int_{(-\infty,0)\times[0,\infty)} \vartheta(d(u,v))\, uv = \mathbf{Var}[X]$$

(coerentemente coi calcoli d'integrazione stocastica svolti nell'Osservazione a pagina 14). $\square$

Corollario 4. *Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie reali i.i.d. centrate e di quadrato integrabili, e sia $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: allora, su un opportuno spazio di probabilità, esistono un moto Browniano $B = (B_t)_{t\geq 0}$, una filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ed una successione di tempi d'arresto $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rispetto a $\mathbb{F}$ finiti q.c. con*

$$\tau_0 := 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \quad ,$$

tali che $(\tau_n - \tau_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione di variabili aleatorie reali i.i.d. non negative con

$$\mathbf{E}[\tau_1] = \mathbf{Var}[X_1] \quad e \quad (B_{\tau_n})_{n\in\mathbb{N}} \overset{\mathcal{L}}{=} (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \,.$$

Dimostrazione. Al variare di $n \in \mathbb{N}$, scegliamo delle triplette *i.i.d.* $(Y^{(n)}, B^{(n)}, \tau^{(n)})$ come nel teorema precedente in corrispondenza di ciascuna X_n potendo così contare in particolare sul fatto che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\tau^{(n)}$ sia un tempo d'arresto rispetto alla filtrazione $\sigma(Y^{(n)}, (B_s^{(n)})_{0\leq s\leq t})_{t\geq 0}$ integrabile con $B_{\tau^{(n)}}^{(n)} \overset{\mathcal{L}}{=} X_n$ *e* $\mathbf{E}[\tau^{(n)}] = \mathbf{Var}[X_n] = \mathbf{Var}[X_1]$. Poniamo allora $\tau_n := \tau^{(1)} + \cdots + \tau^{(n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (per cui, tra l'altro, $\mathbf{E}[\tau_n] = n\mathbf{Var}[X_1]$), *quindi* $B_t := B_t^{(1)}$ per $0 \leq t \leq \tau_1 = \tau^{(1)}$ e ricorsivamente, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$B_t := B_{\tau_n} + B_{t-\tau_n}^{(n+1)} \quad \text{per} \quad \tau_n \leq t \leq \tau_{n+1} \quad ,$$

ovvero $B_t = B^{(1)}_{\tau^{(1)}} + \cdots + B^{(n)}_{\tau^{(n)}} + B^{(n+1)}_{t-\tau_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\tau_n \le t \le \tau_{n+1}$: dobbiamo dunque solo verificare che $B = (B_t)_{t\ge 0}$ è un moto Browniano, per poi porre infine $\mathcal{F}_t := \sigma((Y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}, (B_s)_{0\le s\le t})$ per ogni $t \ge 0$; ma infatti ciò è un'immediata conseguenza della proprietà forte di Markov letta su ogni coppia $(\tau^{(n)}, B^{(n+1)})$, $n \in \mathbb{N}$. □

L'importanza della versione dimostrata del teorema di Skorohod sta in realtà proprio nel poterla rienunciare equivalentemente sotto forma di questo suo corollario per successioni di variabili aleatorie, e ciò sarà più chiaro almeno quando, nella terza sezione, dimostreremo il Teorema di Hartman-Wintner.

2.2 Enunciato Forte del Teorema

Arriveremo alla versione forte del teorema passando appunto da successioni di variabili aleatorie, ma naturalmente *non* successioni qualsiasi tra quelle per le quali il risultato voluto sia vero in senso forte: successioni per le quali sia anche possibile estenderlo, com'è per i *Modelli Binari* che definiamo subito.

Sia assegnato quindi uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Definizione 2 (*Modello Binario*)**.** Una martingala $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ a tempi discreti e nulla in zero è un *modello binario* se esiste una successione $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di variabili aleatorie reali a valori in $\{-1, 1\}$, ed esistono applicazioni $f_n : \mathbb{R}^n \times \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ misurabili per ogni $n \in \mathbb{N}$, tali che

$$X_n = f_n(X_0, \ldots, X_{n-1}, D_n) \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\,.$$

Osserviamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'ovvia identità $X_n = f_n(X_0, \ldots, X_{n-1}, -1)\mathbb{1}_{\{D_n=-1\}} + f_n(X_0, \ldots, X_{n-1}, 1)\mathbb{1}_{\{D_n=1\}}$ implica $X_{n-1} = \mathbf{E}[X_n|X_0, \ldots, X_{n-1}] = \mathbf{E}[(f_n(X_0, \ldots, X_{n-1}, 1) - f_n(X_0, \ldots, X_{n-1}, -1))\mathbb{1}_{\{D_n=1\}} + f_n(X_0, \ldots, X_{n-1}, -1)|X_0, \ldots, X_{n-1}]$, ovvero

$$\mathbf{E}[\mathbb{1}_{\{D_n=1\}}|X_0, \ldots, X_{n-1}] = \frac{X_{n-1} - f_n(X_0, \ldots, X_{n-1}, -1)}{f_n(X_0, \ldots, X_{n-1}, 1) - f_n(X_0, \ldots, X_{n-1}, -1)}$$

avendo immaginato ad esempio le f_n *crescenti* in D_n (per non considerare affatto l'eventuali variabili aleatorie nulle della successione).

L'elementare proposizione seguente, che a questo livello potrebbe anche essere solo un esercizio sulle martingale, dopo rappresenterà quasi la chiave di estensione di cui abbiamo parlato sopra.

Proposizione 4. *Sia X una variabile aleatoria reale centrata e di quadrato integrabile: allora esiste un modello binario di quadrato integrabile $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ tale che $X_n \xrightarrow{\textbf{\textit{q.c.\&}}\boldsymbol{L^2}} X$.*

Dimostrazione. Definiamo ricorsivamente $X_0 := \mathbf{E}[X] = 0$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n := \begin{cases} 1 & \text{se } X \ge X_{n-1} \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}\,,$$

$\mathcal{F}_n := \sigma(D_1, \dots, D_n)$ e $X_n := \mathbf{E}[X|\mathcal{F}_n]$, cosicché esistano applicazioni reali g_n misurabili su $\{-1,1\}^n$ tali che $X_n = g_n(D_1, \dots, D_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e inoltre $\{D_n = 1\} = \{X_n \geq X_{n-1}\}$ q.c. per ogni $n \in \mathbb{N}$: in questo modo, per ogni $n \geq 2$, le variabili aleatorie $D_1, \dots, D_{n-1}$ sono calcolabili da $X_1, \dots, X_{n-1}$ e quindi X_n è appunto calcolabile da $X_1, \dots, X_{n-1}$ e D_n. In più, ponendo $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, rispetto a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la successione $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ è pure una martingala (chiusa da X), e come tale è limitata in $\mathcal{L}^2$: esiste allora $X_\infty \in \mathcal{L}^2$ tale che $X_n \overset{\mathbf{q.c.\&L^2}}{\longrightarrow} X_\infty$. Per gli stessi ω per i quali $X_n(\omega) \to X_\infty(\omega)$, è chiaramente $D_n(\omega)(X-X_n)(\omega) \to |X-X_\infty|(\omega)$, per cui $\lim_{n\to\infty} D_n(X-X_n) = |X-X_\infty|$ q.c., e poi $\mathbf{E}[D_n(X-X_n)] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[D_n(X-X_n)|\mathcal{F}_n]] = \mathbf{E}[D_n\mathbf{E}[(X-X_n)|\mathcal{F}_n]] = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: essendo $(D_n(X-X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ limitata in $\mathcal{L}^2$ e *quindi* uniformemente integrabile, per il Teorema di Vitali è $D_n(X-X_n) \overset{\mathbf{L^1}}{\longrightarrow} |X - X_\infty|$, da cui appunto $X_\infty = X$ q.c.. □

Ecco adesso il risultato principale della sezione: nuovamente, osservare in particolar modo la filtrazione di riferimento.

Teorema 6. *Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ un modello binario e sia $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un moto Browniano: allora esistono tempi d'arresto $\tau_0 := 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots$ rispetto a $\sigma(B)$ finiti q.c. tali che*

$$(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \overset{\mathcal{L}}{=} (B_{\tau_n})_{n\in\mathbb{N}_0} \quad \textit{e con} \quad \mathbf{E}[\tau_n] = \mathbf{Var}[X_n] \quad \textit{per ogni } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Se inoltre $X_n \overset{q.c.\&L^2}{\longrightarrow} X$, allora $\tau := \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \tau_n$ è finito q.c. tale che $\mathbf{E}[\tau] = \mathbf{E}[X^2]$ e $X \overset{\mathcal{L}}{=} B_\tau$.

Dimostrazione. Consideriamo quella successione $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di variabili aleatorie reali a valori in $\{-1,1\}$, e quelle applicazioni $f_n : \mathbb{R}^n \times \{-1,1\} \to \mathbb{R}$ misurabili per ogni $n \in \mathbb{N}$, tali per cui $X_n = f_n(X_0, \dots, X_{n-1}, D_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Potendo chiaramente supporre le f_n crescenti in D_n, definiamo ricorsivamente $\tau_0 := 0$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\tau_n := \inf\{t > \tau_{n-1} : B_t \in \{f_n(B_{\tau_0}, \dots, B_{\tau_{n-1}}, -1), f_n(B_{\tau_0}, \dots, B_{\tau_{n-1}}, 1)\}\}\,,$$

ottenendo come nella dimostrazione del Teorema 5 dei tempi d'arresto finiti q.c. *ma* in questo caso rispetto a $\sigma(B)$. Se adesso poniamo $\widetilde{X}_n := B_{\tau_n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, e

$$\widetilde{D}_n := \begin{cases} 1 & \text{se } \widetilde{X}_n \geq \widetilde{X}_{n-1} \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}, \ n \in \mathbb{N},$$

allora per la proprietà forte di Markov abbiamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{B} := (B_{t+\tau_{n-1}} - B_{\tau_{n-1}})_{t\geq 0} = (B_{t+\tau_{n-1}} - \widetilde{X}_{n-1})_{t\geq 0}$ è un moto Browniano *indipendente* da ogni $\mathcal{F}_k$, $0 \leq k \leq n-1$, tale che

$$\begin{aligned}\tau^{(n)} &:= \tau_n - \tau_{n-1} = \inf\{t > 0 : B_{t+\tau_{n-1}} \in \{f_n(\widetilde{X}_0, \dots, \widetilde{X}_{n-1}, -1), f_n(\widetilde{X}_0, \dots, \widetilde{X}_{n-1}, 1)\}\} \\ &= \inf\{t > 0 : \widetilde{B}_t \in \{f_n(\widetilde{X}_0, \dots, \widetilde{X}_{n-1}, -1) - \widetilde{X}_{n-1}, f_n(\widetilde{X}_0, \dots, \widetilde{X}_{n-1}, 1) - \widetilde{X}_{n-1}\}\}\end{aligned}$$

risulti un tempo d'arresto rispetto a $\sigma(\widetilde{B})$ finito q.c. che, per la Proposizione 2 applicata a $\widetilde{B}_{\tau^{(n)}} = B_{\tau_n} - B_{\tau_{n-1}} = \widetilde{X}_n - \widetilde{X}_{n-1}$ su ogni evento di $\sigma(\widetilde{X}_0, \dots, \widetilde{X}_{n-1})$, permette di trovare subito

$$\mathbf{E}[\mathbb{1}_{\{\widetilde{D}_n = 1\}}|\widetilde{X}_0, \dots, \widetilde{X}_{n-1}] = \frac{\widetilde{X}_{n-1} - f_n(\widetilde{X}_0, \dots, \widetilde{X}_{n-1}, -1)}{f_n(\widetilde{X}_0, \dots, \widetilde{X}_{n-1}, 1) - f_n(\widetilde{X}_0, \dots, \widetilde{X}_{n-1}, -1)}$$

più $\mathbf{E}[\tau_n - \tau_{n-1}] = \mathbf{E}[(\widetilde{X}_n - \widetilde{X}_{n-1})^2]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Segue immediatamente per induzione che $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \overset{\mathcal{L}}{=} (\widetilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, per cui $\mathbf{E}[\tau_n - \tau_{n-1}] = \mathbf{E}[(X_n - X_{n-1})^2] = \mathbf{Var}[X_n - X_{n-1}]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e in particolare $\mathbf{Var}[X_1] = \mathbf{E}[\tau_1]$: scrivendo quindi X_n in "forma telescopica" come $X_n = (X_n - X_{n-1}) + (X_{n-1} - X_{n-2}) + \cdots + X_1$ otteniamo subito che $\mathbf{Var}[X_n] = \mathbf{E}[\tau_n]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (la martingala $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ è a incrementi incorrelati!).
Se infine $X_n \overset{\mathbf{q.c.\&L^2}}{\longrightarrow} X$, allora in particolare $\mathbf{E}[X] = 0$ e $\mathbf{Var}[X] = \mathbf{E}[X^2] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[(X_n)^2] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[\tau_n] = \mathbf{E}[\tau]$ (per convergenza monotòna (Beppo Levi)): τ è dunque finito q.c., ed in corrispondenza degli ω per i quali $\tau(\omega) < \infty$ e $X_n(\omega) \to X(\omega)$ abbiamo appunto che q.c. $B_\tau = \lim_{n\to\infty} B_{\tau_n} \overset{\mathcal{L}}{=} \lim_{n\to\infty} X_n = X$. □

Conseguenza davvero evidente del teorema precedente *unito* alla Proposizione 3 è ormai il teorema di Skorohod in versione forte, col quale chiudiamo la sezione in tutta eleganza.

Corollario 5 (Teorema di Immersione di Skorohod)**.** *Sia X una variabile aleatoria reale centrata e di quadrato integrabile e sia $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un moto Browniano: allora esiste un tempo d'arresto τ rispetto a $\sigma(B)$ finito q.c. tale per cui*

$$B_\tau \overset{\mathcal{L}}{=} X \quad e \quad \mathbf{E}[\tau] = \mathbf{Var}[X] .$$

2.3 Teorema di Hartman-Wintner

Illustre conseguenza del Teorema di immersione di Skorohod in forma debole è il Teorema di Hartman-Wintner o Legge del logaritmo iterato, che bene possiamo inquadrare assieme ai primi due teoremi limite per una successione di variabili aleatorie i.i.d. di quadrato integrabili che si dimostrano e che in effetti già conosciamo: la Legge Forte di Kolmogorov e il Teorema Limite Centrale di Lindeberg-Lévy (i quali vengono comunque perfettamente analizzati in [6]). Mentre infatti la Legge forte descrive per grandi $n \in \mathbb{N}$ il tipico valore *in media* delle somme parziali S_n della successione, ed il Teorema limite centrale quantifica l'ordine di deviazione delle S_n rispetto a tale valore (ordine di $\sqrt{n}$), la Legge del logaritmo iterato fornisce direttamente l'ordine di *massima* fluttuazione superiore delle S_n stesse (ordine di $\sqrt{n \log\log n}$).

Sottolineiamo comunque che, almeno per somme S_n *centrate*, l'identità $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ *q.c.* sarebbe già nota come corollario quasi immediato su passeggiate aleatorie del Teorema di Hewitt-Savage per successioni scambiabili (per il quale rimandiamo a [4]).

Teorema 7 (Hartman-Wintner: Legge del Logaritmo Iterato)**.** *Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie reali non degeneri i.i.d. centrate e di quadrato integrabili, e sia $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: allora*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\mathbf{Var}[X_1] \log\log n}} = 1 \quad q.c. \quad .$$

Dimostrazione. Possiamo anzitutto supporre che le X_n siano normalizzate, ossia che $\mathbf{Var}[X_1]=1$, volendo così arrivare all'identità

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}}=1 \quad q.c. \quad :$$

prendendo le mosse dal Corollario 4, questa equivale a

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{B_{\tau_{\lfloor t\rfloor}}}{\sqrt{2t\log\log t}}=1 \quad q.c. \quad , \quad \text{ovvero a} \quad \limsup_{t\to\infty}\frac{|B_t-B_{\tau_{\lfloor t\rfloor}}|}{\sqrt{2t\log\log t}}=0 \quad q.c.$$

in virtù del Teorema 4 ("$\lfloor\ \rfloor$" è il simbolo di *parte intera*). Sempre nelle notazioni del Corollario 4, la Legge forte di Kolmogorov dà $\frac{1}{n}\tau_n \xrightarrow{\mathbf{q.c.}} \mathbf{E}[\tau_1]=1$: per ogni $\varepsilon>0$, sia quindi $t_0 := t_0(\omega)\geq 0$ grande abbastanza affinché sia

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\leq\frac{\tau_{\lfloor t\rfloor}}{t}\leq 1+\varepsilon \quad \text{per ogni} \quad t\geq t_0\ .$$

Considerato dunque $M_t := \sup_{t/(1+\varepsilon)\leq s\leq t(1+\varepsilon)}|B_t-B_s|$ per ogni $t\geq 0$, la tesi è

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{M_t}{\sqrt{2t\log\log t}}=0 \quad q.c. \quad .$$

Se adesso $t_n := (1+\varepsilon)^n$ per ogni $n\in\mathbb{N}_0$ e $M'_n := \sup_{t_{n-1}\leq s\leq t_{n+2}}|B_s-B_{t_{n-1}}|$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, allora chiaramente $M_t\leq 2M'_n$ per ogni $t\in[t_n,t_{n+1}]$; se poi $\delta := (1+\varepsilon)^3-1$, allora $(1+\varepsilon)^{n+2}-(1+\varepsilon)^{n-1}=\delta(1+\varepsilon)^{n-1}$ o in altri termini $t_{n+2}-t_{n-1}=\delta t_{n-1}$: se $n_0\in\mathbb{N}$ è grande abbastanza affinché sia $\log t_{n-1}>1$ per ogni $n\geq n_0$, allora grazie all'omogeneità, al Principio di riflessione e al Lemma 1 abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[M'_n>\sqrt{3\delta t_{n-1}\log\log t_{n-1}}] &= \mathbf{P}[\sup_{0\leq s\leq 1}|B_s|>\sqrt{3\log\log t_{n-1}}]\\
&\leq 2\mathbf{P}[\sup_{0\leq s\leq 1}B_s>\sqrt{3\log\log t_{n-1}}]\\
&= 4\mathbf{P}[B_1>\sqrt{3\log\log t_{n-1}}]\\
&\leq [\log(1+\varepsilon)]^{-3/2}\frac{2}{\sqrt{3\log\log t_{n-1}}}(n-1)^{-3/2} \quad , \quad \leq \quad n^{-3/2}
\end{aligned}$$

per n abbastanza grande, diciamo per $n\geq n_1\in\mathbb{N}$ (visto che $\log t_n\to\infty$), e di conseguenza

$$\sum_{n\geq n_0\vee n_1}\mathbf{P}[M'_n>\sqrt{3\delta t_{n-1}\log\log t_{n-1}}]<\infty \ :$$

per il Primo lemma di Borel-Cantelli, l'evento $\liminf_{n\to\infty}\{M'_n\leq\sqrt{3\delta t_{n-1}\log\log t_{n-1}}\}$ è quasi certo. Pertanto è $\limsup_{n\to\infty}M'_n/\sqrt{t_{n-1}\log\log t_{n-1}}\leq\sqrt{3\delta}$ q.c. e quindi

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{M_t}{\sqrt{t\log\log t}}\leq\limsup_{n\to\infty}\frac{2M'_n}{\sqrt{t_{n-1}\log\log t_{n-1}}}\leq 2\sqrt{3\delta} \quad q.c. \quad ,$$

da cui la tesi mandando $\varepsilon\downarrow 0$. $\square$

2.4 Un'Ulteriore Applicazione

Terminiamo con un risultato che guardiamo come "esercizio carino" discendente direttamente sempre dal Corollario 4 e che insiste sui vari conti svolti nella precedente sezione. La sua elementare dimostrazione è sostanzialmente quella proposta in [1].

Teorema 8. *Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie reali i.i.d. centrate e di quadrato integrabili con $\mathbf{Var}[X_1] = 1$, e sia $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: se consideriamo su un opportuno spazio di probabilità un moto Browniano $B = (B_t)_{t\geq 0}$, una filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ed una successione di tempi d'arresto $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rispetto a $\mathbb{F}$ finiti q.c. ed anzi integrabili esattamente come nel Corollario 4, allora*

$$\max_{k=1,\dots,n} \frac{|B_{\tau_k} - B_k|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \ .$$

Dimostrazione. Comunque scelto $\varepsilon > 0$, verifichiamo direttamente che

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}[\max_{k=1,\dots,n} |B_{\tau_k} - B_k| > \varepsilon\sqrt{n}\,] < \varepsilon \quad :$$

data la q.c. continuità delle traiettorie di B, consideriamo per questo $\delta \in (0,1]$ piccolo abbastanza affinché sia $\mathbf{P}[\sup_{s,t\in[0,2],|t-s|\leq\delta} |B_t - B_s| > \varepsilon] < \varepsilon/2$, e anzi tale che più in generale sia

$$\mathbf{P}[\sup_{s,t\in[0,2n],|t-s|\leq\delta n} |B_t - B_s| > \varepsilon\sqrt{n}\,] < \varepsilon/2$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ (applicando lo stesso risultato al moto Browniano $(n^{-1/2}B_{nt})_{t\geq 0}$; notiamo che δ può esser supposto come *non* dipendente da n). Osservato adesso che $(\tau_n - n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ è una martingala nulla in zero, per la Disuguaglianza massimale *e* per la Legge forte di Kolmogorov abbiamo

$$\mathbf{P}[\max_{k=1,\dots,n} |\tau_k - k| > \delta n] \leq \frac{1}{\delta}\mathbf{E}[\frac{\tau_n}{n} - 1] \to 0 \ :$$

se quindi n è grande abbastanza affinché sia $\frac{1}{\delta}\mathbf{E}[\frac{\tau_n}{n} - 1] < \varepsilon/2$, allora in effetti otteniamo che

$$\mathbf{P}[\max_{k=1,\dots,n} |B_{\tau_k} - B_k| > \varepsilon\sqrt{n}\,] \leq \mathbf{P}[\max_{k=1,\dots,n} |\tau_k - k| > \delta n] + \mathbf{P}[\sup_{s,t\in[0,2n],|t-s|\leq\delta n} |B_t - B_s| > \varepsilon\sqrt{n}\,]$$

risulta $< \varepsilon$. □

Conseguenza scontata del precedente teorema è che $(\max_{k=1,\dots,n} \frac{|B_{\tau_k} - B_k|}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ammette una sottosuccessione convergente a zero *quasi certamente*. Esistono $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ davvero semplici per le quali questo tipo di convergenza valga in realtà per l'*intera* successione: proponiamo ad esempio $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di variabili aleatorie reali i.i.d. a valori in $\{-1, 1\}$ aventi $\mathbf{P}[X_1 = -1] = \mathbf{P}[X_1 = 1]$ (per cui $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diventa la passeggiata aleatoria "standard").

Appendice: i Preliminari

Questo capitolo, naturalmente, è l'ultimo in senso materiale *ma* il primo in senso ideale, coerentemente col fatto sostanziale che nei primi due capitoli di questo lavoro abbiamo fortemente contato sull'aver sistemato “altrove” le fondamenta teoriche praticamente necessarie ma davvero basilari. Comunque sia, la cosa veramente importante è l'aver condotto questo nostro studio *per intero* e sempre con lo stesso stile a cominciare appunto dai primi concetti.

La sezione di maggior peso è quella riservata ai processi stocastici, ovvero l'ultima, ed il senso di questa come delle precedenti sta soprattutto negli *enunciati* delle rispettive proposizioni vere e proprie, per i quali tuttavia sono spesso risultati indispensabili fatti e definizioni preliminari ben (ri)proposti. Per l'intero capitolo, in effetti, tendiamo a risparmiarci i vari possibili commenti alla matematica affrontata.

I principali riferimenti bibliografici relativi a quest'ultimo capitolo diventano sicuramente [2], [4] e [6].

Tre Teoremi Fondamentali

Un Teorema delle Classi Monotòne

Teorema (delle Classi Monotòne)**.** *Sia $(E, \mathcal{E})$ uno spazio misurabile, e sia $\mathcal{I}$ una parte di $\mathcal{E}$ stabile per intersezione finita e contenente E: se $\mathcal{M}$ è la più piccola famiglia di parti di E contenente $\mathcal{I}$ che sia una classe monotòna (stabile cioè per unione numerabile crescente), e che sia inoltre stabile per differenza, allora $\mathcal{M}$ è precisamente una σ-algebra di parti di E, ovvero $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{I})$.*

I due Lemmi di Borel-Cantelli

Teorema (Borel-Cantelli)**.** *In uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, sia assegnata una successione $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di eventi, e sia $A^* := \limsup_{n\to\infty} A_n$.*

(1) (Primo Lemma) *Se $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}[A_n] < \infty$, allora A^* è trascurabile.*

(2) (Secondo Lemma) *Se gli A_n sono indipendenti, e se $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}[A_n] = \infty$, allora A^* è quasi certo.*

Ricordiamo che, a proposito del secondo lemma, l'ipotesi di indipendenza potrebbe esser facilmente sostituita da quella di indipendenza *a due a due*.

Legge Forte dei Grandi Numeri di Kolmogorov

Teorema (Legge Forte di Kolmogorov)**.** *Su uno spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$*, sia* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie reali i.i.d. integrabili, e sia* $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$: *allora*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{q.c.} \mathbf{E}[X_1]\,.$$

Nuovamente l'ipotesi di indipendenza potrebbe esser rilassata a quella di indipendenza a due a due, ma per questa modifica sarebbe necessario non poco lavoro.

Uniforme Integrabilità

Sia assegnato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Per una variabile aleatoria reale X, le due seguenti condizioni sono equivalenti:

(a) X è integrabile;

(b) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, t \geq 0$ tale che $\int_{\{|X|>t\}} |X|\, d\mathbf{P} \leq \varepsilon$ (ovvero $\int_{[-s,s]^c} \mathbf{P}_X(dx)\, |x| \leq \varepsilon$ per ogni $s \geq t$).

Definizione (*Uniforme Integrabilità*)**.** Un'arbitraria famiglia di variabili aleatorie reali $(X_i)_{i\in I}$ è *uniformemente integrabile* se, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, t \geq 0$ tale che $\sup_{i\in I} \int_{\{|X_i|>t\}} |X_i|\, d\mathbf{P} \leq \varepsilon$: concisamente se

$$\inf_{t\geq 0} \sup_{i\in J} \int_{\{|X_i|>t\}} |X_i|\, d\mathbf{P} = 0, \text{ dove } J \subseteq I\,.$$

Osserviamo che l'uniforme integrabilità di $(X_i)_{i\in I}$ è una proprietà che dipende solo dalle leggi delle X_i ; in particolare, una famiglia di variabili aleatorie reali integrabili ed equidistribuite è uniformemente integrabile.

Ricordiamo i seguenti fondamentali teoremi.

(1) (Criterio di la Vallée-Poussin) *Se esiste* $\delta > 0$ *tale per cui* $(X_i)_{i\in I}$ *sia limitata in* $\mathcal{L}^{1+\delta}$*, allora* $(X_i)_{i\in I}$ *è uniformemente integrabile.*

(2) (Criterio di Vitali) *Se* $(X_i)_{i\in I}$ *è dominata in* $\mathcal{L}^1$*, allora* $(X_i)_{i\in I}$ *è uniformemente integrabile.*

(3) *Se* $(X_i)_{i\in I}$ *è uniformemente integrabile, allora tale è la famiglia delle combinazioni convesse delle* X_i *.*

(4) (Teorema di Vitali) *Se* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è una successione di variabili aleatorie reali integrabili, allora le due seguenti condizioni sono equivalenti*:

(a) $X_n \xrightarrow{L^1} X$ *;*

(b) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è uniformemente integrabile e* $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ *.*

A proposito del criterio di Vitali, possiamo affermare che a sua norma risulta uniformemente integrabile una famiglia *finita* di variabili aleatorie reali integrabili. A proposito invece del teorema di Vitali, sottolineiamo che una successione di variabili aleatorie reali che converga quasi certamente converge a maggior ragione in probabilità.

In particolare, la tesi della Legge forte di Kolmogorov potrebbe esser così precisata:

$$\frac{S_n}{n} \overset{\mathbf{q.c.\&L^1}}{\longrightarrow} \mathbf{E}[X_1]\,.$$

Speranza Condizionale

Sia assegnato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, e siano quindi $\mathcal{E}$ una σ-algebra su Ω con $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$, e $\mathbf{Q} := \mathbf{P}_{|\mathcal{E}}$.

Definizione (*Speranza Condizionale*)**.** Data $X \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$, *una versione della speranza condizionale di X rispetto a $\mathcal{E}$* è una variabile aleatoria reale V che abbia le due seguenti proprietà:

(a) V è misurabile rispetto a $\mathcal{E}$;

(b) $\forall\, A \in \mathcal{E}$, $\mathbf{E}[X \mathbb{1}_A] = \mathbf{E}[V \mathbb{1}_A]$ (ovvero $\int_A X \, d\mathbf{P} = \int_A V \, d\mathbf{P}$ per ogni elemento A in una base di $\mathcal{E}$).

La speranza condizionale di X rispetto a $\mathcal{E}$, simbolicamente $\mathbf{E}[X|\mathcal{E}]$, è l'insieme costituito da tutte le versioni V della speranza condizionale di X rispetto a $\mathcal{E}$.

Osserviamo che dunque $V \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$, ovvero $V \in \mathcal{L}^1(\mathbf{Q})$.

Ricordiamo ora che esiste $V \in \mathbf{E}[X|\mathcal{E}]$ *per ogni* $X \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$, e che precisamente, se V' è un'ulteriore variabile aleatoria reale misurabile rispetto a $\mathcal{E}$, allora le due seguenti condizioni sono equivalenti:

(a) $V' \in \mathbf{E}[X|\mathcal{E}]$;

(b) $V' = V$ q.c. .

Pertanto, passando alla relazione d'equivalenza indotta da $\mathbf{P}$, vedremo V come elemento di $L^1(\mathbf{P})$ e confonderemo $\mathbf{E}[X|\mathcal{E}]$ e V, *ovvero* $V = \mathbf{E}[X|\mathcal{E}]$.

Nel caso particolare che siano considerate una variabile aleatoria Z e quindi $\mathcal{E} := \sigma(Z)$ indicheremo $\mathbf{E}[X|Z] := \mathbf{E}[X|\sigma(Z)]$. Osserviamo che in tale situazione, per il criterio di misurabilità di Doob, esiste un'applicazione reale misurabile g sullo spazio d'arrivo di Z tale che $\mathbf{E}[X|Z] = g(Z)$.

Richiamiamo le proprietà fondamentali della speranza condizionale:
per ogni $X \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$,

(1) (indipendenza) *se X è indipendente da $\mathcal{E}$, allora* $\mathbf{E}[X|\mathcal{E}] = \mathbf{E}[X]$ *q.c.;*

(2) (linearità) $\forall\, Y \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$ *e* $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{E}[\lambda X + Y|\mathcal{E}] = \lambda \mathbf{E}[X|\mathcal{E}] + \mathbf{E}[Y|\mathcal{E}]$ *q.c.;*

(3) (monotonìa) $\forall\, Y \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$, *se* $X \leq Y$ *(q.c.), allora* $\mathbf{E}[X|\mathcal{E}] \leq \mathbf{E}[Y|\mathcal{E}]$ *q.c.;*

(4) (disuguaglianza triangolare) $|\mathbf{E}[X|\mathcal{E}]| \leq \mathbf{E}[|X||\mathcal{E}]$ *q.c.;*

(5) (proprietà di torre) *se $\mathcal{E}'$ è una σ-algebra su Ω con $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}' \subseteq \mathcal{F}$, allora* $\mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{E}']|\mathcal{E}] = \mathbf{E}[X|\mathcal{E}]$ *q.c.;*

(6) (linearità larga) *se U è una variabile aleatoria reale misurabile rispetto a $\mathcal{E}$ tale che $UX \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$, allora* $\mathbf{E}[UX|\mathcal{E}] = U\mathbf{E}[X|\mathcal{E}]$ *q.c. (in effetti, se X stessa è misurabile rispetto a $\mathcal{E}$, allora* $\mathbf{E}[X|\mathcal{E}] = X$ *q.c.);*

(7) (convergenza monotòna (Beppo Levi)) *se $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{L}^1(\mathbf{P})$ tale che $X_n \uparrow X$ q.c., allora* $\mathbf{E}[X_n|\mathcal{E}] \uparrow \mathbf{E}[X|\mathcal{E}]$ *q.c.;*

(8) (convergenza dominata (Lebesgue)) *se $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione dominata in $\mathcal{L}^1(\mathbf{P})$ tale che $X_n \xrightarrow{q.c.} X$, allora* $\mathbf{E}[X_n|\mathcal{E}] \xrightarrow{q.c.} \mathbf{E}[X|\mathcal{E}]$*;*

(9) (disuguaglianza di Jensen) *se φ è un'applicazione reale convessa su $\mathbb{R}$ tale che $\varphi(X) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$, allora* $\varphi(\mathbf{E}[X|\mathcal{E}]) \leq \mathbf{E}[\varphi(X)|\mathcal{E}]$ *q.c.;*

(10) (uniforme integrabilità) *se $(X_i)_{i\in I}$ è un'arbitraria famiglia di variabili aleatorie reali che sia uniformemente integrabile, e se $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ è un'arbitraria famiglia di σ-algebre su Ω con $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{F}$ per ogni $i \in I$, allora anche* $(\mathbf{E}[X_i|\mathcal{E}_i])_{i\in I}$ *è uniformemente integrabile.*

Processi Stocastici

Processi, Filtrazioni e Tempi d'Arresto

Sia assegnato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Definizioni (*Processo; Traiettorie, Leggi Finito Dimensionali e Legge di un Processo; Misurabilità per un Processo. Processo Reale; Processo a Tempi Discreti, risp. a Tempi Continui. Continuità* (*q.c.*), *risp. Continuità a Destra* (*q.c.*), *per un Processo* (*reale a tempi continui*). *Equivalenza, Modifica ed Indistinguibilità di Processi*)**.** Siano assegnati uno spazio misurabile $(E, \mathcal{E})$, un insieme parzialmente ordinato $I := (I, \leq)$ ed un'applicazione $X : I \times \Omega \to E$: X è un *processo* (*stocastico*) su Ω, avente $(E, \mathcal{E})$ come *spazio degli stati* e I come *insieme dei tempi*, se

$\forall\, t \in I$, l'applicazione parziale $\omega \mapsto X_t(\omega) := X(t, \omega)$ di Ω in E è una variabile aleatoria.

In questo caso confondiamo senza indugio $(X_t)_{t\in I}$ e X, *ovvero* $X=(X_t)_{t\in I}$.
Per ogni $\omega \in \Omega$ scelto, l'applicazione $(X_t(\omega))_{t\in I}$ di I in E è la *traiettoria* del processo X associata a ω. *Le leggi finito dimensionali* di X sono le leggi di $(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$ al variare di $n\in\mathbb{N}$ e $t_1,\dots,t_n\in I$ (sullo spazio $(E^n,\mathcal{E}^{\otimes n})$), mentre *la legge* di X è la legge dell'intero blocco $(X_t(\cdot))_{t\in I}:\Omega\to(E^I,\mathcal{E}^{\otimes I})$. Se inoltre l'insieme dei tempi I è anche uno spazio misurabile, e se X risulta quindi misurabile rispetto alla corrispondente σ-algebra prodotto su $I\times\Omega$ (ed $\mathcal{E}$), allora X è *misurabile.*
Un processo avente $\mathbb{R}$ come spazio degli stati è un processo *reale.* Un processo avente $\mathbb{N}_0$, rispettivamente $[0,\infty)$, come insieme dei tempi è un processo *a tempi discreti*, rispettivamente *a tempi continui.*
Un processo reale a tempi continui è (*q.c.*) *continuo*, rispettivamente (*q.c.*) *continuo a destra*, se (quasi) ogni sua traiettoria è continua, rispettivamente continua a destra.
Due processi $X=(X_t)_{t\in I}$ e $Y=(Y_t)_{t\in I}$ su Ω, aventi lo stesso spazio degli stati, sono: *equivalenti* se hanno le medesime leggi finito dimensionali (ovvero la stessa legge), *modifiche* se per ogni $t\in I$ $X_t=Y_t$ q.c., *indistinguibili* se $X_t=Y_t$ q.c. per ogni $t\in I$ (ovvero modifiche "uniformi").

Considerato lo spazio $C([0,\infty)):=C^0_{\mathbb{R}}([0,\infty))$ con l'usuale topologia della convergenza uniforme sui compatti (di $[0,\infty)$), è immediato verificare che su esso la σ-algebra $\mathcal{A}$ generata dalle proiezioni coordinate $\xi_t: f\mapsto f(t)$, di $C([0,\infty))$ in $\mathbb{R}$, coincide con quella di Borel $\mathcal{B}(C([0,\infty)))$, dunque per un processo *continuo* $X=(X_t)_{t\geq 0}$ il blocco $(X_t(\cdot))_{t\in I}$ di Ω in $C([0,\infty))$ resta una variabile aleatoria: la sua "legge canonica" sarebbe quindi definita in realtà su $\mathcal{A}=\mathcal{B}(C([0,\infty)))$, e infatti per noi sarà *questa* la legge di X. Osserviamo tra l'altro come tale scelta non leda affatto il concetto di equivalenza di processi che siano continui, e come permetta di dare l'analoga definizione per un processo solamente *q.c.* continuo (restringendo opportunamente Ω).

Definizioni (*Filtrazione; Finezza per Filtrazioni. Adattazione* (*ad una filtrazione*)*; Filtrazione Naturale di un Processo; Progressiva Misurabilità per un Processo* (*a tempi continui, e rispetto ad una filtrazione*)*. Completezza per una Filtrazione; Filtrazione Continua a Destra* (*associata ad una filtrazione*)*; Continuità a Destra per una Filtrazione; Usuali Condizioni per una Filtrazione; Filtrazione Generata da un Processo*)**.** Siano $J:=(J,\leq)$ un insieme parzialmente ordinato e $\mathbb{F}:=(\mathcal{F}_t)_{t\in J}$ una famiglia di σ-algebre su Ω con $\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{F}$ per ogni $t\in J$: $\mathbb{F}$ è una *filtrazione* su Ω, avente J come *insieme dei tempi*, se

$$\forall\, s,t\in J \text{ con } s\leq t,\ \mathcal{F}_s\subseteq\mathcal{F}_t\,.$$

In questo caso, sia $\mathbb{G}:=(\mathcal{G}_t)_{t\in J}$ un'altra filtrazione su Ω avente J come insieme dei tempi: $\mathbb{F}$ è *meno fine* di $\mathbb{G}$, o $\mathbb{G}$ è *più fine* di $\mathbb{F}$, se

$$\forall\, t\in J,\ \mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{G}_t \text{ (ovvero } \mathcal{F}_s\subseteq\mathcal{G}_t \text{ per ogni } s,t\in J \text{ con } s\leq t).$$

In tal caso, $\mathbb{F}$ *coincide* con $\mathbb{G}$ se al tempo stesso $\mathbb{F}$ è più fine di $\mathbb{G}$: in simboli, $\mathbb{F}=\mathbb{G}$.
Indicheremo inoltre $\mathcal{F}_\infty:=\bigvee_{t\in J}\mathcal{F}_t:=\sigma\big(\bigcup_{t\in J}\mathcal{F}_t\big)$, e in effetti potremmo supporre $\mathcal{F}=\mathcal{F}_\infty$ nel caso che il nostro punto di vista sia esattamente quello dei processi.
Supponendo $I\subseteq J$ ed anzi $I=J$, il processo $X=(X_t)_{t\in I}$ è *adattato* alla filtrazione $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ se

$$\forall\, t \in I,\ X_t \text{ è misurabile rispetto a } \mathcal{F}_t \text{ (ovvero } \sigma(X_s : s \in I, s \le t) \subseteq \mathcal{F}_t \text{ per ogni } t \in I).$$

La filtrazione naturale del processo $X = (X_t)_{t\in I}$ è la filtrazione meno fine tra quelle aventi I come insieme dei tempi e rispetto alle quali X sia adattato: si tratta di $\sigma(X) \coloneqq (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ dove

$$\forall\, t \in I,\ \mathcal{F}_t \coloneqq \sigma(X_s : s \in I, s \le t)\,.$$

Un processo $X = (X_t)_{t\ge 0}$ a tempi continui è *progressivamente misurabile* rispetto alla filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ se

$$\forall\, t \ge 0, \text{ il processo } (X_s)_{0\le s\le t} \text{ è misurabile rispetto a } \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t \text{ (ed } \mathcal{E}).$$

Considerato l'insieme $\mathcal{N}$ delle parti di Ω esternamente trascurabili, la filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ è *completa* se

$$\forall\, t \in I,\ \mathcal{N} \subseteq \mathcal{F}_t \text{ (ovvero } \mathcal{N} \subseteq \mathcal{F}_0).$$

La filtrazione continua a destra associata alla filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ è $\mathbb{F}^+ = (\mathcal{F}_t^+)_{t\in I}$ dove

$$\forall\, t \in I,\ \mathcal{F}_t^+ \coloneqq \textstyle\bigcap_{u\in I, u>t} \mathcal{F}_u\,.$$

Dunque $\mathbb{F}$ è meno fine di $\mathbb{F}^+$: $\mathbb{F}$ è *continua a destra* se coincide con $\mathbb{F}^+$.
Una filtrazione soddisfa le *usuali condizioni* se è completa e continua a destra.
La filtrazione generata dal processo $X = (X_t)_{t\in I}$ è la filtrazione meno fine tra quelle aventi I come insieme dei tempi, rispetto alle quali X sia adattato e che soddisfino le usuali condizioni: si tratta di $\mathbb{F}^X \coloneqq (\mathcal{F}_t^X)_{t\in I}$ ottenuta completando e rendendo continua a destra la filtrazione naturale di X, ovvero dove

$$\forall\, t \in I,\ \mathcal{F}_t^X \coloneqq \textstyle\bigcap_{u\in I, u>t} \sigma(\sigma(X_s : s \in I, s \le u) \cup \mathcal{N})\,.$$

Osserviamo che un processo reale a tempi continui, che sia adattato ad una certa filtrazione *e* che sia q.c. continuo a destra, è progressivamente misurabile rispetto alla medesima filtrazione.

Definizioni (*Processo Integrabile, risp. di Quadrato Integrabile; Processo Centrato. Funzione di Covarianza* (*di un processo di quadrato integrabile*); *Processo Gaussiano*)**.** Un processo reale $X = (X_t)_{t\in I}$ è *integrabile*, rispettivamente *di quadrato integrabile*, se

$$\forall\, t \in I,\ \mathbf{E}[|X_t|] < \infty, \text{ rispettivamente } \mathbf{E}[(X_t)^2] < \infty\,.$$

X è *centrato* se X_t è centrata per ogni $t \in I$.
Sia $X = (X_t)_{t\in I}$ un processo di quadrato integrabile: *la funzione di covarianza* di X è definita ponendo

$$\forall\, s, t \in I,\ \Gamma(s,t) \coloneqq \mathbf{Cov}[X_s, X_t] = \mathbf{E}[X_s X_t] - \mathbf{E}[X_s]\mathbf{E}[X_t]\,.$$

Un processo reale $X = (X_t)_{t\in I}$ è *Gaussiano* se

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall\, t_1, \dots, t_n \in I,\ (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \text{ è un vettore Gaussiano,}$$

ovvero se $\sum_{j=1}^{n} u_j X_{t_j}$ è una variabile aleatoria Gaussiana per ogni $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che, se X fosse centrato, allora Γ varrebbe $\Gamma(s,t) = \mathbf{E}[X_s X_t]$ per ogni $s, t \in I$, e che a proposito un processo Gaussiano centrato è univocamente determinato dalla propria funzione di covarianza.

Definizioni (*Processo Additivo* (*rispetto ad una filtrazione*)*; Processo a Incrementi Indipendenti. Processo a Incrementi Stazionari. Proprietà di Markov per un Processo* (*a tempi continui, e rispetto ad una filtrazione*))**.** Un processo reale $X = (X_t)_{t \in I}$ adattato alla filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ è *additivo* rispetto a $\mathbb{F}$ se

$$\forall\, s, t \in I \text{ con } s \leq t,\ X_t - X_s \text{ è indipendente da } \mathcal{F}_s \text{ (ovvero da } \mathcal{F}_r \text{ per ogni } r \leq s).$$

Un processo reale $X = (X_t)_{t \in I}$ additivo rispetto alla propria filtrazione naturale è *a incrementi indipendenti*:

$$\forall\, s, t \in I \text{ con } s \leq t,\ X_t - X_s \text{ è indipendente da } X_s \text{ (ovvero da } X_r \text{ per ogni } r \leq s),$$

o in altri termini, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $t_0, t_1, \ldots, t_n \in I$ con $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, gli incrementi $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sono indipendenti (chiamando *incremento* una variabile aleatoria della forma $X_t - X_s$, dove $s, t \in I$ con $s \leq t$).
Un processo reale $X = (X_t)_{t \geq 0}$ a tempi continui è *a incrementi stazionari* se

$$\forall\, r, s, t \geq 0,\ X_{t+s+r} - X_{s+r} \overset{\mathcal{L}}{=} X_{t+s} - X_s \text{ (ovvero } X_{t+s} - X_s \overset{\mathcal{L}}{=} X_t - X_0 \text{ per ogni } s, t \geq 0).$$

Un processo a tempi continui $X = (X_t)_{t \geq 0}$ adattato alla filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ soddisfa la *proprietà di Markov* rispetto a $\mathbb{F}$ se

$$\forall\, s, t \geq 0 \text{ con } s \leq t,\ \mathbf{E}[\varphi(X_t)|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[\varphi(X_t)|X_s] \text{ per ogni } \varphi : E \to \mathbb{R} \text{ misurabile e limitata.}$$

È facile riconoscere che un processo reale a tempi continui additivo rispetto ad una certa filtrazione soddisfa la proprietà di Markov rispetto alla medesima filtrazione.

Ricordiamo qui i due seguenti fondamentali teoremi, i quali sostanzialmente costituiscono la *Legge 0-1 di Blumenthal*:

(1) *Un processo reale a tempi continui q.c. continuo a destra, e additivo rispetto alla filtrazione* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$*, è additivo anche rispetto alla filtrazione* $\mathbb{F}^+ = (\mathcal{F}_t^+)_{t \geq 0}$.

(2) *Un processo reale a tempi continui* $X = (X_t)_{t \geq 0}$ *q.c. continuo a destra, e a incrementi indipendenti, per il quale indichiamo* $\mathbb{F} := \sigma(X)$*, rispetta la seguente proprietà:*
se X_0 *è degenere, allora* $\mathcal{F}_0^+$ *è degenere.*

Definizioni (*Tempo d'Arresto* (*rispetto ad una filtrazione*)*; σ-algebra degli Eventi Anteriori ad un Tempo d'Arresto*)**.** Supponendo $I \subseteq \mathbb{R}$, una variabile aleatoria $\tau : \Omega \to I \cup \{\sup I\}$ (*tempo aleatorio*) è un *tempo d'arresto* rispetto alla filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ se

$$\forall\, t \in I,\ \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Invece τ è un tempo d'arresto *largo* rispetto a $\mathbb{F}$ se

$$\forall\, t \in I,\ \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t\,.$$

Se τ è un tempo d'arresto rispetto alla filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$, allora *la σ-algebra degli eventi anteriori a τ* è

$$\mathcal{F}_\tau \coloneqq \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall\, t \in I, A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t\}\,.$$

Osserviamo come quest'ultima notazione sia coerente con l'ovvio fatto che le costanti (reali) sono tempi d'arresto rispetto ad ogni filtrazione. Osserviamo poi che un tempo d'arresto rispetto a $\mathbb{F}$ è in effetti un tempo d'arresto largo rispetto a $\mathbb{F}$, e che un tempo d'arresto largo rispetto a $\mathbb{F}$ equivale ad un tempo d'arresto rispetto a $\mathbb{F}^+$. Inoltre τ è misurabile rispetto a $\mathcal{F}_\tau$ e, per ogni $A \in \mathcal{F}$ scelto e considerata l'applicazione

$$\tau^A : \Omega \to I \cup \{\sup I\},\ \tau^A \coloneqq \begin{cases} \tau & \text{su } A \\ \sup I & \text{su } A^c \end{cases},$$

risulta $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \tau^A \text{ è un tempo d'arresto rispetto a } \mathbb{F}\}$.

Notiamo infine le seguenti ulteriori proprietà:

(1) *se $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ è una successione crescente di tempi d'arresto rispetto alla filtrazione $\mathbb{F}$, allora tale è $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \tau_n$;*

(2) *se σ,τ sono tempi d'arresto rispetto alla filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$, allora tale è $\sigma + \tau$;*

(3) *se σ,τ sono tempi d'arresto rispetto alla filtrazione $\mathbb{F}$ con $\sigma \le \tau$, allora $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$;*

(4) *se $I \subseteq \mathbb{R}$ e se $X = (X_t)_{t\in I}$ è un processo reale adattato alla filtrazione $\mathbb{F}$, allora comunque scelto $A \subseteq \mathbb{R}$ l'istante $\tau_A \coloneqq \inf\{t > 0 : X_t \in A\}$ di primo arrivo in A è un tempo d'arresto rispetto a $\mathbb{F}$ almeno nei tre seguenti casi*:

(a) $I = \mathbb{N}_0$ *;*

(b) $I = [0,\infty)$, *X è continuo (a destra), A è aperto e $\mathbb{F}$ è continua a destra;*

(c) $I = [0,\infty)$, *X è continuo e A è chiuso (per cui l'*$\inf$ *sarebbe in realtà un minimo).*

(5) *Sia $X = (X_t)_{t\ge 0}$ un processo reale progressivamente misurabile rispetto alla filtrazione $\mathbb{F}$, e sia τ un tempo d'arresto rispetto a $\mathbb{F}$ finito q.c.: allora l'applicazione reale X_τ, $(X_\tau)(\omega) \coloneqq X_{\tau(\omega)}(\omega)\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}(\omega)$, è misurabile rispetto a $\mathcal{F}_\tau$.*

Martingale

Siano assegnati uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ed un insieme parzialmente ordinato $I := (I, \leq)$.

Definizioni (*Submartingala, Supermartingala e Martingala* (*rispetto ad una filtrazione*))**.** Un processo integrabile $M = (M_t)_{t \in I}$ è una *submartingala* rispetto alla filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ se

(a) M è adattato a $\mathbb{F}$;

(b) $\forall\, s, t \in I$ con $s \leq t$, $M_s \leq \mathbf{E}[M_t | \mathcal{F}_s]$ q.c..

M è una *supermartingala* rispetto a $\mathbb{F}$ se $-M$ è una submartingala rispetto a $\mathbb{F}$.
M è una *martingala* rispetto a $\mathbb{F}$ se è contemporaneamente submartingala e supermartingala rispetto a $\mathbb{F}$.

Osserviamo che la condizione (a) equivale ad avere $M_s = \mathbf{E}[M_s | \mathcal{F}_s]$ q.c. per ogni $s \in I$, per cui la condizione (b) equivale ad avere $\mathbf{E}[M_t - M_s | \mathcal{F}_s] \geq 0$ q.c. per ogni $s, t \in I$ con $s \leq t$. Osserviamo inoltre che una submartingala M rispetto a $\mathbb{F}$ è una submartingala rispetto ad ogni filtrazione su Ω che sia meno fine di $\mathbb{F}$ ma più fine di $\sigma(M)$: parliamo semplicemente di *submartingala* nel caso sia $\mathbb{F} = \sigma(M)$. Ad esempio, un processo a incrementi centrati e indipendenti è una martingala.

Definizione (*Martingala Chiusa*)**.** Fissata $Y \in \mathcal{L}^1$, un processo integrabile $M = (M_t)_{t \in I}$ è, rispetto alla filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$, una *martingala chiusa* da Y se

$$\forall\, t \in I,\ M_t = \mathbf{E}[Y | \mathcal{F}_t] \text{ q.c.}.$$

Osserviamo che, se esiste $p \geq 1$ tale per cui $Y \in \mathcal{L}^p$, allora $M = (M_t)_{t \in I}$ è limitata in $\mathcal{L}^p$.

Notiamo le seguenti proprietà di una submartingala $M = (M_t)_{t \in I}$ rispetto alla filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$:

(1) $\mathbf{E}[M_s] \leq \mathbf{E}[M_t]$ *per ogni* $s, t \in I$ *con* $s \leq t$;

(2) *se* φ *è un'applicazione reale convessa e non decrescente su* $\mathbb{R}$ *tale che* $\varphi(M_t)$ *sia integrabile per ogni* $t \in I$, *allora* $(\varphi(M_t))_{t \in I}$ *è una submartingala rispetto a* $\mathbb{F}$;

(3) *se* M *fosse precisamente una martingala di quadrato integrabile, allora avrebbe incrementi* (*centrati e*) *incorrelati, e in più* $\mathbf{E}[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[(M_t)^2 - (M_s)^2 | \mathcal{F}_s]$ *q.c. per ogni* $s, t \in I$ *con* $s \leq t$;

(4) *sotto l'ipotesi* $I \subseteq [0, \infty)$, *se esiste* $t_0 := \min I$ *allora* $(M_t - M_{t_0})_{t \in I}$ *è una submartingala rispetto a* $\mathbb{F}$;

(5) *sotto l'ipotesi* $I = \mathbb{N}_0$, *la condizione* (b) *per* M *equivale ad avere* $\mathbf{E}[M_n - M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] \geq 0$ *q.c. per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Concludiamo richiamando tre importanti teoremi nella teoria delle martingale: una semplice disuguaglianza massimale, un teorema d'arresto ed uno di "buona" convergenza.

Teorema (Disuguaglianza Massimale (per martingale a tempi discreti))**.** *Sia* $M = (M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ *una martingala* (*rispetto ad una qualsiasi filtrazione*)*: allora,* $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ *e* $\lambda > 0$*,*

$$\mathbf{P}[\max_{k=0,\dots,n} |M_k| \geq \lambda] \leq \frac{\mathbf{E}[|M_n|]}{\lambda}\,.$$

Teorema (d'Arresto (per martingale a tempi continui))**.** *Sia* $M = (M_t)_{t \geq 0}$ *una martingala q.c. continua tale che esista* $p \in (1, \infty]$ *per il quale* $M_t \in \mathcal{L}^p$ *per ogni* $t \geq 0$*, e sia* τ *un tempo d'arresto rispetto a* $\sigma(M)$*: se* τ *è limitato, allora*

$$\mathbf{E}[M_\tau] = \mathbf{E}[M_0]\,.$$

Teorema (di Convergenza (per martingale a tempi discreti))**.** *Sia* $M = (M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ *una martingala limitata in* $\mathcal{L}^2$*: allora esiste* $M_\infty \in \mathcal{L}^2$ *tale che*

$$M_n \xrightarrow{\boldsymbol{q.c.}\&\boldsymbol{L^2}} M_\infty\,.$$

Bibliografia

[1] Bass, R. F. (2011), *Stochastic Processes*, Cambridge University Press, Cambridge.

[2] Flandoli, F. (2013), *Dispense di Istituzioni di Probabilità*, Dipartimento di Matematica di Pisa.

[3] Klenke, A. (2013), *Probability Theory: A Comprehensive Course*, 2th edn, Springer, Berlino.

[4] Letta, G. (2012), *Processi Stocastici*, Dipartimento di Matematica di Pisa.

[5] Pantieri, L. - Gordini, T. (2010), *L'Arte di Scrivere con LaTeX: un'Introduzione a LaTeX*, Gruppo Utilizzatori Italiani di TeX e LaTeX.

[6] Pratelli, M. (2012), *Un Corso di Calcolo delle Probabilità*, Dipartimento di Matematica di Pisa.