Teorema di Immersione di Skorohod e Applicazioni

Candidato: Marco Tarsia

Relatore: Prof. Maurizio Pratelli

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Pisa

17 aprile 2015

Anatolii Volodymyrovych Skorohod

1930 (Nikopol', Ucraina) - 2011 (Lansing, Michigan)

Teorema (Teorema di Immersione di Skorohod)

Sia X una variabile aleatoria reale centrata e di quadrato integrabile e sia $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un moto Browniano: allora esiste un tempo d'arresto τ rispetto a $\sigma(B)$ finito q.c. tale per cui

$$B_\tau \stackrel{\mathcal{L}}{=} X \quad e \quad \mathbf{E}[\tau] = \mathbf{Var}[X] \; .$$

Teorema (Hartman-Wintner: Legge del Logaritmo Iterato)

Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie reali non degeneri i.i.d. centrate e di quadrato integrabili, e sia $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: allora

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \mathbf{Var}[X_1] \log \log n}} = 1 \quad q.c. \quad .$$

Teorema (Teorema di Immersione di Skorohod)

Sia X una variabile aleatoria reale centrata e di quadrato integrabile e sia $B=(B_t)_{t\geq 0}$ un moto Browniano: allora esiste un tempo d'arresto τ rispetto a $\sigma(B)$ finito q.c. tale per cui

$$B_\tau \overset{\mathcal{L}}{=} X \quad e \quad \mathbf{E}[\tau] = \mathbf{Var}[X] \ .$$

Teorema (Hartman-Wintner: Legge del Logaritmo Iterato)

Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie reali non degeneri i.i.d. centrate e di quadrato integrabili, e sia $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: allora

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\mathbf{Var}[X_1]\log\log n}} = 1 \quad q.c. \quad .$$

Teorema (Teorema di Immersione di Skorohod)

Sia X una variabile aleatoria reale centrata e di quadrato integrabile: allora esistono uno spazio di probabilità $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$, una variabile aleatoria Y su Ω' e un moto Browniano $B = (B_t)_{t\geq 0}$ su Ω' tali che B sia indipendente da Y e tali che, considerata la filtrazione $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ su Ω' dove $\mathcal{F}_t := \sigma(Y, (B_s)_{0\leq s\leq t})$ per ogni $t \geq 0$, esista un tempo d'arresto τ rispetto a $\mathbb{F}$ finito q.c. con

$$B_\tau \stackrel{\mathcal{L}}{=} X \quad e \quad \mathbf{E}[\tau] = \mathbf{Var}[X] \ .$$

Corollario

Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie reali i.i.d. centrate e di quadrato integrabili, e sia $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: allora, su un opportuno spazio di probabilità, esistono un moto Browniano $B = (B_t)_{t\geq 0}$, una filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ed una successione di tempi d'arresto $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rispetto a $\mathbb{F}$ finiti q.c. con

$$\tau_0 := 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \quad ,$$

tali che $(\tau_n - \tau_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione di variabili aleatorie reali i.i.d. non negative con

$$\mathbf{E}[\tau_1] = \mathbf{Var}[X_1] \quad e \quad (B_{\tau_n})_{n\in\mathbb{N}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \ .$$

Teorema (Teorema di Immersione di Skorohod)

Sia X una variabile aleatoria reale centrata e di quadrato integrabile: allora esistono uno spazio di probabilità $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$, una variabile aleatoria Y su Ω' e un moto Browniano $B = (B_t)_{t \geq 0}$ su Ω' tali che B sia indipendente da Y e tali che, considerata la filtrazione $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ su Ω' dove $\mathcal{F}_t := \sigma(Y, (B_s)_{0 \leq s \leq t})$ per ogni $t \geq 0$, esista un tempo d'arresto τ rispetto a $\mathbb{F}$ finito q.c. con

$$B_\tau \stackrel{\mathcal{L}}{=} X \quad e \quad \mathbf{E}[\tau] = \mathbf{Var}[X] \ .$$

Corollario

Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie reali i.i.d. centrate e di quadrato integrabili, e sia $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: allora, su un opportuno spazio di probabilità, esistono un moto Browniano $B = (B_t)_{t \geq 0}$, una filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ed una successione di tempi d'arresto $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rispetto a $\mathbb{F}$ finiti q.c. con

$$\tau_0 := 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots \quad ,$$

tali che $(\tau_n - \tau_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ sia una successione di variabili aleatorie reali i.i.d. non negative con

$$\mathbf{E}[\tau_1] = \mathbf{Var}[X_1] \quad e \quad (B_{\tau_n})_{n \in \mathbb{N}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \ .$$

Teorema (Legge del Logaritmo Iterato per un Moto Browniano)

Sia $B = (B_t)_{t \geq 0}$ *un moto Browniano: allora*

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1 \quad q.c. \quad .$$

Definizione (*Moto Browniano*)

Un processo reale a tempi continui $B = (B_t)_{t \geq 0}$ è un *moto Browniano* (o *processo di Wiener*) se

(a) $B_0 = 0$;

(b) B è a incrementi indipendenti e stazionari;

(c) $\forall\ t > 0,\ B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$;

(d) B è q.c. continuo.

Teorema (Legge del Logaritmo Iterato per un Moto Browniano)

Sia $B = (B_t)_{t \geq 0}$ *un moto Browniano: allora*

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1 \quad q.c. \quad .$$

Definizione (*Moto Browniano*)

Un processo reale a tempi continui $B = (B_t)_{t \geq 0}$ è un *moto Browniano* (o *processo di Wiener*) se

(a) $B_0 = 0$;

(b) B è a incrementi indipendenti e stazionari;

(c) $\forall\ t > 0,\ B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$;

(d) B è q.c. continuo.

(1) **(omogeneità)** $\forall\, s \geq 0$, $(B_{t+s} - B_s)_{t\geq 0}$ *è un moto Browniano;*

(2) **(scaling)** $\forall\, \lambda \neq 0$, $(\lambda^{-1} B_{\lambda^2 t})_{t\geq 0}$ *è un moto Browniano;*

(3) **(simmetria)** $-B$ *è un moto Browniano;*

(4) **(specularità)** *se L è un'applicazione reale dispari su $\mathbb{R}$, allora* $\limsup_{t\to\infty} L(B_t) \leq l$ *se, e solo se,* $\liminf_{t\to\infty} L(B_t) \geq -l$ *;*

(5) **Esercizio.** $((B_t)^2 - t)_{t\geq 0}$ *è una martingala.*

Massimo Corrente: $\sup_{0\leq t\leq T} B_t \qquad (T > 0)$

Teorema (Proprietà forte di Markov)

Sia $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un moto Browniano e sia τ un tempo d'arresto rispetto a $\sigma(B)$ finito q.c.: allora $(B_{t+\tau} - B_\tau)_{t\geq 0}$ è un moto Browniano, e inoltre è indipendente da $\mathcal{F}_\tau$.

(1) **(omogeneità)** $\forall\ s \geq 0$, $(B_{t+s} - B_s)_{t\geq 0}$ *è un moto Browniano;*

(2) **(scaling)** $\forall\ \lambda \neq 0$, $(\lambda^{-1} B_{\lambda^2 t})_{t\geq 0}$ *è un moto Browniano;*

(3) **(simmetria)** $-B$ *è un moto Browniano;*

(4) **(specularità)** *se* L *è un'applicazione reale dispari su* $\mathbb{R}$, *allora* $\limsup_{t\to\infty} L(B_t) \leq l$ *se, e solo se,* $\liminf_{t\to\infty} L(B_t) \geq -l$ *;*

(5) **Esercizio.** $((B_t)^2 - t)_{t\geq 0}$ *è una martingala.*

Massimo Corrente: $\quad \sup_{0\leq t\leq T} B_t \qquad (T > 0)$

Teorema (Proprietà forte di Markov)

Sia $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *un moto Browniano e sia* τ *un tempo d'arresto rispetto a* $\sigma(B)$ *finito q.c.: allora* $(B_{t+\tau} - B_\tau)_{t\geq 0}$ *è un moto Browniano, e inoltre è indipendente da* $\mathcal{F}_\tau$ *.*

(1) **(omogeneità)** $\forall\ s \geq 0$, $(B_{t+s} - B_s)_{t\geq 0}$ *è un moto Browniano;*

(2) **(scaling)** $\forall\ \lambda \neq 0$, $(\lambda^{-1} B_{\lambda^2 t})_{t\geq 0}$ *è un moto Browniano;*

(3) **(simmetria)** $-B$ *è un moto Browniano;*

(4) **(specularità)** *se* L *è un'applicazione reale dispari su* $\mathbb{R}$*, allora* $\limsup_{t\to\infty} L(B_t) \leq l$ *se, e solo se,* $\liminf_{t\to\infty} L(B_t) \geq -l$ *;*

(5) **Esercizio.** $((B_t)^2 - t)_{t\geq 0}$ *è una martingala.*

Massimo Corrente: $\sup\limits_{0\leq t\leq T} B_t \qquad (T > 0)$

Teorema (Proprietà forte di Markov)

Sia $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *un moto Browniano e sia* τ *un tempo d'arresto rispetto a* $\sigma(B)$ *finito q.c.: allora* $(B_{t+\tau} - B_\tau)_{t\geq 0}$ *è un moto Browniano, e inoltre è indipendente da* $\mathcal{F}_\tau$ *.*

Corollario (Principio di Riflessione per un Moto Browniano)

Sia $B = (B_t)_{t \geq 0}$ *un moto Browniano*: *allora,* $\forall\ a > 0$ *e* $T > 0$,

$$\mathbf{P}\Big[\sup_{0 \leq t \leq T} B_t > a\Big] = 2\mathbf{P}[B_T > a]\,.$$

$$\mathbf{P}\Big[T^{-1/2} \sup_{0 \leq t \leq T} B_t > a\Big] = 2\mathbf{P}[B_1 > a] \qquad (a, T > 0)$$

Lemma

Sia $X \sim \mathcal{N}(0,1)$: *allora,* $\forall\ x > 0$,

$$\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}(x + \frac{1}{x})} \leq \mathbf{P}[X > x] \leq \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}x}\,.$$

Corollario (Principio di Riflessione per un Moto Browniano)

Sia $B = (B_t)_{t \geq 0}$ *un moto Browniano: allora,* $\forall\ a > 0$ *e* $T > 0$*,*

$$\mathbf{P}\Big[\sup_{0 \leq t \leq T} B_t > a\Big] = 2\mathbf{P}[B_T > a]\,.$$

$$\mathbf{P}\Big[T^{-1/2} \sup_{0 \leq t \leq T} B_t > a\Big] = 2\mathbf{P}[B_1 > a] \qquad (a, T > 0)$$

Lemma

Sia $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ *: allora,* $\forall\ x > 0$*,*

$$\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}(x + \frac{1}{x})} \leq \mathbf{P}[X > x] \leq \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}x} \quad .$$

Corollario (Principio di Riflessione per un Moto Browniano)

Sia $B = (B_t)_{t \geq 0}$ *un moto Browniano: allora,* $\forall\ a > 0$ *e* $T > 0$,

$$\mathbf{P}\Big[\sup_{0 \leq t \leq T} B_t > a\Big] = 2\mathbf{P}[B_T > a]\,.$$

$$\mathbf{P}\Big[T^{-1/2} \sup_{0 \leq t \leq T} B_t > a\Big] = 2\mathbf{P}[B_1 > a] \qquad (a, T > 0)$$

Lemma

Sia $X \sim \mathcal{N}(0,1)$: *allora,* $\forall\ x > 0$,

$$\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}(x + \frac{1}{x})} \leq \mathbf{P}[X > x] \leq \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}x} \quad .$$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0 \quad q.c. \qquad \left(\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0 \quad q.c.\right)$$

Teorema (Proprietà di inversione temporale)

Sia $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un moto Browniano: allora $(t B_{1/t})_{t>0}$ è un moto Browniano, intendendolo uscente dall'origine.

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \infty \quad q.c.$$

$$\limsup_{t\to\infty} B_t = \infty \quad q.c. \qquad \left(\liminf_{t\to\infty} B_t = -\infty \quad q.c.\right)$$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0 \quad q.c. \qquad (\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0 \quad q.c.)$$

Teorema (Proprietà di inversione temporale)

Sia $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un moto Browniano: allora $(t B_{1/t})_{t>0}$ è un moto Browniano, intendendolo uscente dall'origine.

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \infty \quad q.c.$$

$$\limsup_{t\to\infty} B_t = \infty \quad q.c. \qquad (\liminf_{t\to\infty} B_t = -\infty \quad q.c.)$$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0 \quad q.c. \qquad (\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0 \quad q.c.)$$

Teorema (Proprietà di inversione temporale)

Sia $B=(B_t)_{t\geq 0}$ un moto Browniano: allora $(tB_{1/t})_{t>0}$ è un moto Browniano, intendendolo uscente dall'origine.

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \infty \quad q.c.$$

$$\limsup_{t\to\infty} B_t = \infty \quad q.c. \qquad (\liminf_{t\to\infty} B_t = -\infty \quad q.c.)$$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0 \quad q.c. \qquad (\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0 \quad q.c.)$$

Teorema (Proprietà di inversione temporale)

Sia $B=(B_t)_{t\geq 0}$ un moto Browniano: allora $(tB_{1/t})_{t>0}$ è un moto Browniano, intendendolo uscente dall'origine.

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \infty \quad q.c.$$

$$\limsup_{t\to\infty} B_t = \infty \quad q.c. \qquad (\liminf_{t\to\infty} B_t = -\infty \quad q.c.)$$

Proposizione

Sia $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un moto Browniano: allora, per ogni $u < 0 \leq v$, $\tau_{u,v} := \inf\{t > 0 : B_t \in \{u, v\}\}$ è un tempo d'arresto rispetto a $\sigma(B)$ finito q.c. tale che

$$\mathbf{P}[B_{\tau_{u,v}} = u] = \frac{v}{v-u} \;, \qquad \mathbf{P}[B_{\tau_{u,v}} = v] = \frac{-u}{v-u} \qquad e \qquad \mathbf{E}[\tau_{u,v}] = -uv \;.$$

Lemma

Sia μ una probabilità su $\mathbb{R}$ con $\int_{\mathbb{R}} \mu(dx)\, x = 0$ e $\sigma^2 := \int_{\mathbb{R}} \mu(dx)\, x^2 < \infty$: allora esiste una probabilità $\vartheta := \vartheta_\mu$ su $(-\infty, 0) \times [0, \infty)$ tale che

$$\mu = \int_{(-\infty,0)\times[0,\infty)} \vartheta(d(u,v)) \left(\frac{v}{v-u} \delta_u + \frac{-u}{v-u} \delta_v \right) \;,$$

per cui in particolare $\sigma^2 = -\int_{(-\infty,0)\times[0,\infty)} \vartheta(d(u,v))\, uv$.

Proposizione

Sia $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un moto Browniano: allora, per ogni $u < 0 \leq v$, $\tau_{u,v} := \inf\{t > 0 : B_t \in \{u, v\}\}$ è un tempo d'arresto rispetto a $\sigma(B)$ finito q.c. tale che

$$\mathbf{P}[B_{\tau_{u,v}} = u] = \frac{v}{v-u}\,, \qquad \mathbf{P}[B_{\tau_{u,v}} = v] = \frac{-u}{v-u} \qquad e \qquad \mathbf{E}[\tau_{u,v}] = -uv\,.$$

Lemma

Sia μ una probabilità su $\mathbb{R}$ con $\int_{\mathbb{R}} \mu(dx)\, x = 0$ e $\sigma^2 := \int_{\mathbb{R}} \mu(dx)\, x^2 < \infty$: allora esiste una probabilità $\vartheta := \vartheta_\mu$ su $(-\infty, 0) \times [0, \infty)$ tale che

$$\mu = \int_{(-\infty,0)\times[0,\infty)} \vartheta(d(u,v))\, \Big(\frac{v}{v-u}\delta_u + \frac{-u}{v-u}\delta_v\Big) \quad ,$$

per cui in particolare $\sigma^2 = -\int_{(-\infty,0)\times[0,\infty)} \vartheta(d(u,v))\, uv$.

$\mathbf{E}[\tau] = \mathbf{Var}[X] \qquad (= \mathbf{E}[X^2])$

Proposizione

Sia X una variabile aleatoria reale e sia $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un moto Browniano: allora esiste un tempo d'arresto τ rispetto a $\sigma(B)$ finito q.c. tale per cui

$$B_\tau \overset{\mathcal{L}}{=} X \, .$$

$$H(t,\omega) := (\mathbb{1}_{[0,\tau]})(t,\omega) := \mathbb{1}_{[0,\tau(\omega)]}(t) = \mathbb{1}_{\{0 \leq t \leq \tau\}}(\omega) \qquad (\tau \text{ finito q.c.})$$

$$\mathbf{E}[\int_0^\infty H_s^2 \, ds] = \mathbf{E}[\tau] \qquad (H \in \mathcal{M}^2 \Leftrightarrow \mathbf{E}[\tau] < \infty)$$

$$\mathbf{E}[\tau] = \mathbf{Var}[X] \qquad (= \mathbf{E}[X^2])$$

Proposizione

Sia X una variabile aleatoria reale e sia $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un moto Browniano: allora esiste un tempo d'arresto τ rispetto a $\sigma(B)$ finito q.c. tale per cui

$$B_\tau \overset{\mathcal{L}}{=} X \, .$$

$$H(t,\omega) := (\mathbb{1}_{[0,\tau]})(t,\omega) := \mathbb{1}_{[0,\tau(\omega)]}(t) = \mathbb{1}_{\{0 \leq t \leq \tau\}}(\omega) \qquad (\tau \text{ finito q.c.})$$

$$\mathbf{E}[\int_0^\infty H_s^2 \, ds] = \mathbf{E}[\tau] \qquad (H \in \mathcal{M}^2 \Leftrightarrow \mathbf{E}[\tau] < \infty)$$

$$\mathbf{E}[\tau] = \mathbf{Var}[X] \qquad (= \mathbf{E}[X^2])$$

Proposizione

Sia X una variabile aleatoria reale e sia $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un moto Browniano: allora esiste un tempo d'arresto τ rispetto a $\sigma(B)$ finito q.c. tale per cui

$$B_\tau \stackrel{\mathcal{L}}{=} X \, .$$

$$H(t, \omega) := (\mathbb{1}_{[0,\tau]})(t, \omega) := \mathbb{1}_{[0,\tau(\omega)]}(t) = \mathbb{1}_{\{0 \leq t \leq \tau\}}(\omega) \qquad (\tau \text{ finito q.c.})$$

$$\mathbf{E}[\int_0^\infty H_s^2 \, ds] = \mathbf{E}[\tau] \qquad (H \in \mathcal{M}^2 \Leftrightarrow \mathbf{E}[\tau] < \infty)$$

$$\mathbf{E}[\tau] = \mathbf{Var}[X] \qquad (= \mathbf{E}[X^2])$$

Proposizione

Sia X una variabile aleatoria reale e sia $B=(B_t)_{t\geq 0}$ un moto Browniano: allora esiste un tempo d'arresto τ rispetto a $\sigma(B)$ finito q.c. tale per cui

$$B_\tau \stackrel{\mathcal{L}}{=} X \, .$$

$$H(t,\omega) := (\mathbb{1}_{[0,\tau]})(t,\omega) := \mathbb{1}_{[0,\tau(\omega)]}(t) = \mathbb{1}_{\{0\leq t\leq \tau\}}(\omega) \qquad (\tau \text{ finito q.c.})$$

$$\mathbf{E}[\int_0^\infty H_s^2 \, ds] = \mathbf{E}[\tau] \qquad (H \in \mathcal{M}^2 \Leftrightarrow \mathbf{E}[\tau] < \infty)$$

Definizione (*Modello Binario*)

Una martingala $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ a tempi discreti e nulla in zero è un *modello binario* se esiste una successione $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di variabili aleatorie reali a valori in $\{-1,1\}$, ed esistono applicazioni $f_n : \mathbb{R}^n \times \{-1,1\} \to \mathbb{R}$ misurabili crescenti per ogni $n \in \mathbb{N}$, tali che

$$X_n = f_n(X_0, \ldots, X_{n-1}, D_n) \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\,.$$

$$\mathbf{E}[\mathbb{1}_{\{D_n=1\}} | X_0, \ldots, X_{n-1}] = \frac{X_{n-1} - f_n(X_0, \ldots, X_{n-1}, -1)}{f_n(X_0, \ldots, X_{n-1}, 1) - f_n(X_0, \ldots, X_{n-1}, -1)}$$

Proposizione

Sia X una variabile aleatoria reale centrata e di quadrato integrabile: allora esiste un modello binario di quadrato integrabile $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ tale che $X_n \xrightarrow{q.c.\&L^2} X$.

Definizione (*Modello Binario*)

Una martingala $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ a tempi discreti e nulla in zero è un *modello binario* se esiste una successione $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di variabili aleatorie reali a valori in $\{-1,1\}$, ed esistono applicazioni $f_n : \mathbb{R}^n \times \{-1,1\} \to \mathbb{R}$ misurabili crescenti per ogni $n \in \mathbb{N}$, tali che

$$X_n = f_n(X_0, \ldots, X_{n-1}, D_n) \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\,.$$

$$\mathbf{E}[\mathbb{1}_{\{D_n=1\}}|X_0,\ldots,X_{n-1}] = \frac{X_{n-1} - f_n(X_0,\ldots,X_{n-1},-1)}{f_n(X_0,\ldots,X_{n-1},1) - f_n(X_0,\ldots,X_{n-1},-1)}$$

Proposizione

Sia X una variabile aleatoria reale centrata e di quadrato integrabile: allora esiste un modello binario di quadrato integrabile $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ tale che $X_n \xrightarrow{q.c.\&L^2} X$.

Definizione (*Modello Binario*)

Una martingala $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ a tempi discreti e nulla in zero è un *modello binario* se esiste una successione $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di variabili aleatorie reali a valori in $\{-1,1\}$, ed esistono applicazioni $f_n : \mathbb{R}^n \times \{-1,1\} \to \mathbb{R}$ misurabili crescenti per ogni $n \in \mathbb{N}$, tali che

$$X_n = f_n(X_0, \ldots, X_{n-1}, D_n) \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\,.$$

$$\mathbf{E}[\mathbb{1}_{\{D_n=1\}} | X_0, \ldots, X_{n-1}] = \frac{X_{n-1} - f_n(X_0, \ldots, X_{n-1}, -1)}{f_n(X_0, \ldots, X_{n-1}, 1) - f_n(X_0, \ldots, X_{n-1}, -1)}$$

Proposizione

Sia X una variabile aleatoria reale centrata e di quadrato integrabile: allora esiste un modello binario di quadrato integrabile $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ tale che $X_n \xrightarrow{q.c.\&L^2} X$.

Teorema

Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *un modello binario e sia* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *un moto Browniano: allora esistono tempi d'arresto* $\tau_0 := 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots$ *rispetto a* $\sigma(B)$ *finiti q.c. tali che*

$$(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \overset{\mathcal{L}}{=} (B_{\tau_n})_{n\in\mathbb{N}_0} \quad \text{e con} \quad \mathbf{E}[\tau_n] = \mathbf{Var}[X_n] \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}_0 \; .$$

Se inoltre $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}\&L^2} X$, *allora* $\tau := \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \tau_n$ *è finito q.c. tale che* $\mathbf{E}[\tau] = \mathbf{E}[X^2]$ *e* $X \overset{\mathcal{L}}{=} B_\tau$ *.*

Corollario (Teorema di Immersione di Skorohod)

Sia X *una variabile aleatoria reale centrata e di quadrato integrabile e sia* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *un moto Browniano: allora esiste un tempo d'arresto* τ *rispetto a* $\sigma(B)$ *finito q.c. tale per cui*

$$B_\tau \overset{\mathcal{L}}{=} X \quad \text{e} \quad \mathbf{E}[\tau] = \mathbf{Var}[X] \; .$$

Teorema

Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *un modello binario e sia* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *un moto Browniano: allora esistono tempi d'arresto* $\tau_0 := 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots$ *rispetto a* $\sigma(B)$ *finiti q.c. tali che*

$$(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \overset{\mathcal{L}}{=} (B_{\tau_n})_{n\in\mathbb{N}_0} \quad \textit{e con} \quad \mathbf{E}[\tau_n] = \mathbf{Var}[X_n] \quad \textit{per ogni } n \in \mathbb{N}_0 \ .$$

Se inoltre $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}\&L^2} X$, *allora* $\tau := \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \tau_n$ *è finito q.c. tale che* $\mathbf{E}[\tau] = \mathbf{E}[X^2]$ *e* $X \overset{\mathcal{L}}{=} B_\tau$ *.*

Corollario (Teorema di Immersione di Skorohod)

Sia X *una variabile aleatoria reale centrata e di quadrato integrabile e sia* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *un moto Browniano: allora esiste un tempo d'arresto* τ *rispetto a* $\sigma(B)$ *finito q.c. tale per cui*

$$B_\tau \overset{\mathcal{L}}{=} X \quad \textit{e} \quad \mathbf{E}[\tau] = \mathbf{Var}[X] \ .$$