SEMINARIO DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI STOCASTICHE ED APPLICAZIONI ;

docente il Professor FRANCO FLANDOLI , in Ottobre 2017 ; candidato

MARCO TARSIA .

EQUAZIONI DIFFERENZIALI STOCASTICHE RETROGRADE [AD ORIZZONTE FINITO DETERMINISTICO] : LA TEORIA DI BASE ED ALCUNE RELAZIONI CON LE PDEs NON-LINEARI DEL SECOND'ORDINE .

[Riferimento bibliografico principale : Stochastic Controls, ..., J. Yong, X.Y. Zhou (Springer) .]
[Nelle sue notazioni.]

1. INTRODUZIONE

È ben noto che per una ODE , almeno sotto le usuali condizioni di lipschitzianità , entrambi i problemi differenziali ai valori iniziali ed ai valori terminali sono ben posti : un problema ai valori terminali su $[0,T]$, $T \in (0,+\infty)$, è infatti equivalente ad un problema ai valori iniziali su $[0,T]$ grazie alla elementare trasformazione d'inversione temporale $t \mapsto T-t$, $t \in [0,T]$.

Invece per una SDE la questione si rivela sostanzialmente differente e complessa quando l'ambito è quello del calcolo stocastico secondo Itô e quando richiediamo una soluzione adattata ad una pre-fissata filtrazione (senza coinvolgere in particolare i cosiddetti "integrali anticipativi") : le difficoltà sorgono dal fatto che vogliamo costruire un processo-soluzione risolvendo una SDE "in modo retrogrado" [all'indietro] garantendone contemporaneamente l'adattazione "in avanti" (quella usuale) .

In effetti, il primo vero problema legato ad una SDE retrograda, o "backward" (di acronimo "BSDE") , che non si presenta "parallelamente" per una SDE "forward" ("FSDE") , è la sua formulazione corretta .

Anticipiamo sommariamente quanto scopriremo a proposito nel corso di questo lavoro :

1. la filtrazione dev'essere quella generata dal processo di Wiener di riferimento ; [o non più grande]
[affinché sia possibile usare il Teorema di rappresentazione delle martingale (di quadrato integrabili)]
2. l'espressione della SDE non può essere "troppo arbitraria" (al di là della regolarità dei coefficienti del sistema) , specie in corrispondenza del termine di martingala locale ; [... vedi punto 3.]
3. la soluzione (globale) di una BSDE dev'essere una coppia di processi adattati , di cui la prima componente è un processo a valori vettoriali mentre la seconda

componente è un processo a valori matriciali (ovvero corrisponde a molteplici processi a valori vettoriali), ed inoltre è quest'ultimo processo che vincola il termine di martingala locale della SDE ad una forma "speciale";

[una possibile interpretazione del fatto che sia necessaria una coppia di soluzioni, anziché una soltanto, potrebbe essere la seguente: la seconda componente è strettamente legata alla aleatorietà del sistema e riesce a "correggere" l'eventuale non-adattezione della prima componente] [non è troppo diverso da un sistema di controllo stocastico]

4.) la notazione differenziale di una BSDE ben posta deve corrispondere ad una ben precisa decomposizione integrale per così dire "retrograda";

[compariranno integrali del tipo $-\int_t^T (\dots)$ "anziché" $+\int_0^t (\dots)$],

5.) una BSDE ben posta ammetterà non solo esistenza ed unicità globale di una coppia soluzione, ma anche altre pregevoli proprietà come per esempio un'opportuna dipendenza continua (delle soluzioni) dai dati iniziali.

Una volta sistemate le fondamenta della teoria sulle BSDEs, ~~Cominceremo~~ proporremo un breve approfondimento a riguardo delle possibili relazioni fra certe PDEs non-lineari del second'ordine ed opportune FSDEs e BSDEs. Il fatto è che esistono in modo molto naturale dei legami intrinseci fra le SDEs e le PDEs del second'ordine di tipo parabolico o ellittico (ossia non iperbolico, o cioè di diffusione che non corrisponde a propagazione ondulatoria), come dovrebbe esser intuitivo immaginare, e più precisamente è possibile verificare quanto segue: da una parte, le soluzioni di classe PDEs del second'ordine paraboliche o ellittiche possono esser rappresentate per mezzo delle soluzioni di particolari BSDEs grazie a formule tipo Feynman-Kac; d'altra parte, viceversa, certe FBSDEs possono esser risolte attraverso opportune PDEs con uno speciale approccio (chiamato "schema dei quattro step."). Noi lavoreremo sulla prima tipologia di relazione.

Concludiamo questa sezione con due esempi elementari - specie il primo - ma istruttivi - specie il secondo - che inducano a convincersi della fondamentale necessità di "gestire o controllare" opportunamente l'aleatorietà in un sistema dinamico stocastico risolvibile.

$\boxed{\text{Esempio 1.}}$ Consideriamo un investitore che si sta impegnando in un investimento di un anno con due scelte di beni. Il primo bene è un bond, ovvero un titolo privo di rischio, il quale presenta un tasso di rendimento annuale del 10% (deterministico, certo); mentre il secondo bene è uno stock, ovvero un titolo rischioso, il quale può avere due possibili tassi di rendimento: o un tasso positivo del 20% se l'anno sarà "buono", oppure un tasso negativo del -20% se l'anno sarà "non-buono".

L'obiettivo dell'investitore a riguardo delle proprie ricchezze è il seguente: quello di arrivare ad accumulare esattamente un dato ammontare $a > 0$ di denaro se l'anno si rivelerà "buono" ed un dato ammontare $0 < b \leq a$ di denaro se invece l'anno si rivelerà "non-buono".

Così il problema è quello di determinare quella/una strategia d'investimento sui due titoli utile al raggiungimento di tale goal finanziario.

Si tratta di un problema sì stocastico, ma di facile risoluzione univoca: denotando infatti con $\$ y > \$ 0$ la ricchezza totale investita nei due beni e con $\$ 0 \leq \$ z \leq \$ y$ quella parte di $\$ y$ investita nello stock – per cui $\$(y-z)$ corrisponde a quanto investito nel bond –, va determinata una coppia $(y, z) \in (0,+\infty)^2$ tale che

$$\begin{cases} 1.1\,(y-z) + 1.2\,z = a \\ 1.1\,(y-z) + 0.8\,z = b \\ 0 \leq z \leq y \end{cases}$$

. Ora è facile verificare che questo semplice sistema ammette una ed una sola coppia soluzione (y, z) data da

$$y = \underbrace{\frac{5}{22}(3a+b)}_{[<a]} \quad e \quad z = \frac{5}{2}(a-b) \,. \qquad \square$$

$\boxed{\text{Esempio 2.}}$ Fissiamo uno scalare $T \in (0,+\infty)$ ed uno spazio di probabilità completo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ [ad esempio, non-atomico] sul quale esiste un processo di Wiener reale $W(\cdot) \equiv (W(t))_{0 \leq t \leq T}$, e filtriamo quindi questo spazio con la filtrazione generata da $W(t)$ che denotiamo con $\mathbb{F}^W \equiv (\mathcal{F}_t^W)_{0 \leq t \leq T}$. [Ricordiamo in particolare che, in virtù della Legge 0-1 di Blumenthal, la σ-algebra $\mathcal{F}_0^W$ è P-degenere (pur non essendo banale).]

Consideriamo il seguente problema: assegnata una v.a.r. $\xi \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}^W_T}(\Omega;\mathbb{R})$ [$\mathbb{E}|\xi|^2<+\infty$], trovare il/un processo stocastico reale $Y(\cdot) \equiv (Y(t))_{0\le t\le T}$ che sia $\mathbb{F}^W$-adattato e che verifichi il problema stocastico ai valori terminali (in senso P-quasi certo)

$$\begin{cases} dY(t) = 0\,, & t\in[0,T]\,,\\ Y(T) = \xi\,. \end{cases}$$

[NOTA. Omettiamo adesso ed ogni altra volta di scrivere esplicitamente le dipendenze dei processi da $\omega\in\Omega$.]

Questo problema è chiaramente mal posto, perché non potrebbe che essere [EQUAZ.] $\boxed{Y(0) \equiv Y(t) = \xi}$ per ogni $t\in[0,T]$, mentre però ξ non è in generale $\mathcal{F}^W_0$-misurabile (ovvero costante (P-q.c.)). Risulta così necessario modificare la SDE del sistema, la quale è evidentemente in difetto di complessità. L'idea naturale alla base della riformulazione „giusta" delle BSDE è quella di pensare bene a quale processo $\mathbb{F}^W$-adattato viene caratterizzato da esse — ed in un modo tale per cui, se ξ fosse P-q.c. costante, allora questo processo sarebbe proprio $\equiv \xi$ —: proviamo con

$$\boxed{Y(t) \triangleq \mathbb{E}[\,\xi \,|\, \mathcal{F}^W_t\,]\,,\quad t\in[0,T]}\,.$$

[$Y(T)=\xi$, e ξ costante $\Rightarrow Y(\cdot)\equiv\xi$] Dobbiamo soltanto scrivere la SDE soddisfatta da $Y(t)$. Per questo, osserviamo che $Y(t)$ è la $\mathbb{F}^W$-martingala chiusa da ξ e che in particolare $Y(\cdot)\in\mathcal{L}^2_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R})$ [significa che $Y(\cdot)$ è un processo (continuo) [$\in\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}^W_T}$] $\mathbb{F}^W$-~~progressivamente misurabile~~ ~~adattato~~ progressivamente misurabile tale che $\mathbb{E}[\int_0^T |Y(t)|^2dt]<+\infty$]: per ciò, grazie al Teorema di rappresentazione delle martingale (di quadrato integrabili), deduciamo che esiste uno ed un solo [P-q.c.] processo reale $Z(\cdot)\equiv Z(\cdot\,;Y(\cdot))\in\mathcal{L}^2_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R})$ tale che

$$Y(t) \overset{[P\text{-q.c.}]}{=} \mathbb{E}[Y(t)] + \int_0^t Z(s)\,dW(s) \overset{[\text{MART.}]}{=} Y(0) + \int_0^t Z(s)\,dW(s)\,,\quad t\in[0,T]\,,$$

[ξ costante $\Rightarrow Z(\cdot)\equiv 0$]

o equivalentemente tale che $\boxed{dY(t) = Z(t)\,dW(t)\,,\ t\in[0,T]}$. In particolare, dato che $Y(T)=\xi$, otteniamo subito che $Y(0) = \xi - \int_0^T Z(s)\,dW(s)$ e quindi che

$$\boxed{Y(t) = \xi - \int_t^T Z(s)\,dW(s)\,,\quad t\in[0,T]}\,.$$

[dunque $Z(\cdot)$ dipende da $Y(\cdot)$, ma a sua volta $Y(\cdot)$ dipende da $Z(\cdot)$]

Pertanto, la formulazione più appropriata del problema è la seguente: assegnata una v.a.r. $\xi\in\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}^W_T}(\Omega;\mathbb{R})$, trovare la/una coppia di processi reali $(Y(\cdot),Z(\cdot))\in(\mathcal{L}^2_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R}))^2$ tali che (P-q.c.)

$$\begin{cases} dY(t) = Z(t)\,dW(t)\,, & t\in[0,T]\,,\\ Y(T) = \xi\,. \end{cases}$$

o equivalentemente tale che $Y(t) = \xi - \int_t^T Z(s)\,dW(s)$, $t \in [0,T]$.

Finalmente questo problema risulta ben posto: in primo luogo, infatti, abbiamo appena costruito esplicitamente una coppia soluzione – via il Teorema di rappresentazione delle martingale –; in secondo luogo, inoltre, è elementare verificare l'unicità di una coppia soluzione. [Infatti, per una BSDE come quella risolta, vale che $\xi = Y(t) + \int_t^T Z(s)\,dW(s) \Rightarrow \mathbb{E}[|\xi|^2] = \mathbb{E}[|Y(t)|^2] + \mathbb{E}[\int_t^T |Z(s)|^2 ds]$ (per ogni $t \in [0,T]$), in quanto $\int_t^T Z(s)\,dW(s)$ è $\mathcal{F}_t^W$-indipendente e grazie alla formula di isometria di Itô. Ma allora, date due coppie soluzioni $(\hat{Y}(\cdot), \hat{Z}(\cdot))$ e $(\tilde{Y}(\cdot), \tilde{Z}(\cdot))$ della BSDE, la coppia $(\hat{Y}(\cdot) - \tilde{Y}(\cdot), \hat{Z}(\cdot) - \tilde{Z}(\cdot))$ sarebbe soluzione della BSDE

$$\begin{cases} dY(t) = Z(t)\,dW(t), & t \in [0,T], \\ Y(T) \equiv 0 \end{cases}$$

(per linearità), da cui per il calcolo appena svolto

$$\mathbb{E}[|\hat{Y}(t) - \tilde{Y}(t)|^2] + \mathbb{E}[\int_t^T |\hat{Z}(s) - \tilde{Z}(s)|^2 ds] = 0 \quad \text{per ogni } t \in [0,T].]$$

□

2. LA TEORIA DI BASE SULLE BSDEs

Con la prima sezione dimostriamo la buona positura di BSDEs *lineari* sotto condizioni ragionevolmente generali di regolarità dei coefficienti del sistema. La relativa dimostrazione sarà costruttiva grazie al fatto che potremo far uso massiccio della linearità della SDE nonché del Teorema di rappresentazione delle martingale.

Nella seconda sezione dimostriamo quindi la buona positura di BSDEs non-lineari, ossia generali, sotto condizioni piuttosto larghe sulla regolarità dei coefficienti del sistema. La relativa dimostrazione poggerà principalmente sulla buona positura delle BSDEs lineari e sul classico Teorema delle contrazioni (o del punto fisso) per spazi metrici completi.

Nel corso della terza ed ultima sezione dimostriamo invece due proprietà oggettivamente apprezzabili delle BSDEs non-lineari (ben poste): la dipendenza continua della soluzione dai dati iniziali ed un risultato di buona convergenza per uno schema iterativo tipo "iterazioni di Picard" nel calcolo "esplicito" della soluzione.

Le relative dimostrazioni consisteranno di calcoli tecnici molto simili a quelli che vedremo via via nella seconda sezione.

Fissiamo una volta per tutte uno scalare $T \in (0, +\infty)$, un intero $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ed uno spazio di probabilità completo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sul quale esista un processo di Wiener m-dimensionale $W(\cdot) \equiv (W(t))_{0\le t\le T} \equiv ((W^1(t),\dots,W^m(t))^T)_{0\le t\le T}$, e filtriamo questo spazio con la filtrazione generata da $W(t)$ che denotiamo con $\mathbb{F}^W \equiv (\mathcal{F}^W_t)_{0\le t\le T}$. [Possiamo supporre che $\mathcal{F} = \mathcal{F}^W_T$, poiché ogni processo che entrerà in gioco sarà un processo $\mathbb{F}^W$-adattato, se non $\mathbb{F}^W$-progressivamente misurabile.]

Richiamiamo inoltre un importante risultato piuttosto noto in letteratura, ~~che~~ al quale potremmo pensare come una specie di "disuguaglianza massimale".

[con $\mathbb{F}=\mathbb{F}^W$]

Teorema (Disuguaglianza di Burkholder - Davis - Gundy). Siano assegnati $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ e $r\in(0,+\infty)$. Consideriamo un processo a valori matriciali $\sigma(\cdot)\equiv((\sigma_1(t),\dots,\sigma_m(t))^T)_{0\le t\le T} \in L^{2,loc}_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R}^{n\times m}) \equiv (L^{2,loc}_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R}^n))^m$. [Significa che $\sigma(\cdot)$ è un processo ~~...~~ $\mathbb{F}^W$-progress. misurabile tale che $\int_0^T|\sigma(t)|^2dt<+\infty$ P-q.c.] Allora esiste una costante $K_r\in(0,+\infty)$ tale per cui

$$\frac{1}{K_r}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T|\sigma(s)|^2ds\right)^r\right] \le \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t\sigma(s)\cdot dW(s)\right|^{2r}\right] \le K_r\, \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T|\sigma(s)|^2 ds\right)^r\right].$$

NOTA. Per ogni $N\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, stiamo denotando con $|\cdot|\equiv\|\cdot\|_{2,\mathbb{R}^N}$ la norma euclidea standard su $\mathbb{R}^N$. Sarà ~~in~~ nel seguito $\langle\cdot,\cdot\rangle \equiv \langle\cdot,\cdot\rangle_{2,\mathbb{R}^N}$ in modo analogo.

2.1 LE BSDEs LINEARI

Siano assegnati $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\xi\in L^2_{\mathcal{F}^W_T}(\Omega;\mathbb{R}^k)$, $A(\cdot)\in L^\infty_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R}^{k^2})$ [significa che $A(\cdot)$ è un processo $\mathbb{F}^W$-prog. misurabile ~~adattato~~ ed uniformemente limitato ~~...~~] [cioè $\exists\, C\in(0,+\infty)$ tale che, $\forall (t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$, $|A(t,\omega)|\le C$], $B(\cdot) \equiv ((B_1(t),\dots,B_m(t))^T)_{0\le t\le T} \in L^\infty_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R}^{k^2\times m}) \equiv (L^\infty_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R}^{k^2}))^m$, e $f(\cdot)\in L^2_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R}^k)$.

Definiamo come BSDE (lineare) associata a tali dati il seguente sistema stocastico:

$$(L)\quad\begin{cases} dY(t) = \left\{A(t)Y(t)+\sum_{i=1}^m B_i(t)Z_i(t)+f(t)\right\}dt + Z(t)\cdot dW(t), & t\in[0,T], \\ Y(T) = \xi, \end{cases}$$

[$Z(t)\cdot dW(t) = \sum_{i=1}^m Z_i(t)\,dW^i(t)$]

dove l'incognita è la coppia di processi $(Y(\cdot),Z(\cdot))\equiv(Y(\cdot),(Z_1(\cdot),\dots,Z_m(\cdot))^T)$ a valori rispettivamente in $\mathbb{R}^k$ e in $\mathbb{R}^{k\times m}$.

Definiamo come coppia soluzione adattata di (L) una coppia di processi $(Y(\cdot),Z(\cdot)) \in L^2_{\mathbb{F}^W}(\Omega;C([0,T]);\mathbb{R}^k)\times L^2_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R}^{k\times m})$ tale che risulti [P-q.c.]

$$Y(t)=\xi-\int_t^T\left\{A(s)Y(s)+\sum_{i=1}^m B_i(s)Z_i(s)+f(s)\right\}ds - \int_t^T Z(s)\cdot dW(s), \quad t\in[0,T].$$

[$\int_t^T \equiv \int_0^T - \int_0^t$]

[In particolare, $Y(\cdot)$ è un processo continuo $\mathbb{F}^W$-progressivamente misurabile (adattato) tale che $\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|Y(t)|^2\right]<+\infty$.]

Intendiamo che una data coppia soluzione adattata $(Y(\cdot), Z(\cdot))$ della BSDE (L) è l'unica coppia soluzione adattata di (L) nel senso che, se $(\tilde{Y}(\cdot), \tilde{Z}(\cdot))$ è un'altra coppia soluzione adattata di (L), allora vale che

$$P[\,\forall t \in [0,T],\ Y(t) = \tilde{Y}(t)\ ;\ \tilde{\forall} t \in [0,T],\ Z(t) = \tilde{Z}(t)\,] = 1 .$$

Teorema (Buona positura della BSDE (L)). La BSDE lineare (L) ammette una ed una sola coppia soluzione adattata $(Y(\cdot), Z(\cdot))$. Inoltre esiste una costante $K \in (0, +\infty)$, dipendente da tutti i dati assegnati, tale per cui

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} |Y(t)|^2\Big] + \sum_{j=1}^{m} \mathbb{E}\Big[\int_0^T |Z_j(t)|^2 dt\Big] \le K \Big\{ \mathbb{E}[|\xi|^2] + \mathbb{E}\Big[\int_0^T |f(t)|^2 dt\Big] \Big\} .$$

~~[Osserviamo che l'unicità di una coppia soluzione adattata deriva da quest'ultima disuguaglianza grazie alla linearità della BSDE.]~~

Dim. Grazie alla uniforme limitatezza dei coefficienti $A(\cdot), B_1(\cdot), \dots, B_m(\cdot)$, possiamo essere sicuri che esistono e sono unici due processi di Itô $\Phi(\cdot) \equiv (\Phi(t))_{0\le t\le T}$ e $\Psi(\cdot) \equiv (\Psi(t))_{0\le t \le T}$ a valori in $\mathbb{R}^{k^2}$ – e dipendenti appunto solo da $A(\cdot)$ e $B(\cdot)$ – che verificano rispettivamente le due seguenti FSDEs (disaccoppiate):

$$\begin{cases} d\Phi(t) = \{A(t)\Phi(t) + \sum_{j=1}^{m} B_j(t) B_j(t) \Phi(t)\} dt + \sum_{j=1}^{m} B_j(t)\Phi(t) dW^j(t), & t \in [0,T], \\ \Phi(0) \equiv I_k \quad \text{[matrice identità } k\times k] & , \quad e \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\Psi(t) = -\Psi(t) A(t) dt - \sum_{j=1}^{m} \Psi(t) B_j(t) dW^j(t), & t\in[0,T], \\ \Psi(0) \equiv I_k . \end{cases}$$

[Dunque $\Phi(\cdot)$ e $\Psi(\cdot)$ sono processi di "tipo esponenziale".] [$\in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}_W}(\Omega; C([0,T]; \mathbb{R}^{k^2}))$]

Notiamo subito che avere $\Phi(\cdot)$ equivale ad avere $\Psi(\cdot)$, in quanto $\boxed{\Psi(t)^{-1} = \Phi(t),\ t \in [0,T]}$.

[Basta verificare che $d(\Psi(t)\Phi(t)) = 0$, visto poi che $\Psi(0)\Phi(0) \equiv I_k$. Ora, infatti, $\Psi(\cdot)\Phi(\cdot)$ è [P-q.c.] è una volta un processo di Itô (a valori in $\mathbb{R}^{k^2}$) con decomposizione data dalla formula di Itô
$d(\Psi(t)\Phi(t)) = d\Psi(t)\Phi(t) + \Psi(t)d\Phi(t) + d[\Psi,\Phi](t)$, ed ora basta osservare che
$\underbrace{d[\Psi,\Phi](t)}_{[\equiv d\Psi(t) d\Phi(t)]} = -\sum_{j=1}^{m} \Psi(t) B_j(t) B_j(t) \Phi(t) dt$.]

Supponiamo adesso di possedere una coppia soluzione adattata $(Y(\cdot), Z(\cdot))$ della BSDE (L): allora

$$d[\Psi(t)Y(t)] = \Psi(t) f(t) dt + \sum_{j=1}^{m} \Psi(t)[Z_j(t) - B_j(t)Y(t)] dW^j(t), \quad t\in[0,T], \text{ o cioè}$$

$$\Psi(t)Y(t) = \Psi(T)\xi - \int_t^T \Psi(s) f(s) ds - \sum_{j=1}^{m} \int_t^T \Psi(s)[Z_j(s) - B_j(s)Y(s)] dW^j(s), \quad t \in [0,T] .$$

[Grazie alla formula di Itô, $d(\Psi(t)Y(t)) = d\Psi(t)Y(t) + \Psi(t)dY(t) + d[\Psi,Y](t)$ e qui risulta
$d[\Psi,Y](t) = -\sum_{j=1}^{m} \Psi(t) B_j(t) Z_j(t) dt$.] Questa decomposizione presenta il vantaggio di avere i due processi "sconosciuti" $Y(\cdot)$ e $Z(\cdot)$ all'interno unicamente del termine di martingala locale.
[E ciò è dipeso in modo essenziale dalla linearità dell'equazione stocastica.]

Così, se denotiamo con $\boxed{\vartheta \triangleq \psi(T)\xi - \int_0^T \psi(s)f(s)ds}$ (v.a. che dipende solo dai dati assegnati $A(\cdot), B(\cdot), f(\cdot)$ e ξ), allora $\vartheta \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}^W_T}(\Omega;\mathbb{R}^k)$ [...] e sussiste l'identità

$$\psi(t)Y(t) = \vartheta + \int_0^t \psi(s)f(s)ds - \sum_{j=1}^m \int_t^T \psi(s)[Z_j(s) - B_j(s)Y(s)]dW^j(s), \quad t\in[0,T].$$

Pertanto, osservato che [per ogni $j=1,\dots,m$] $\psi(\cdot)[Z_j(\cdot) - B_j(\cdot)Y(\cdot)] \in \mathcal{L}^{2}_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R}^k)$, il calcolo delle speranze condizionali dà subito [...] [$\int_t^T(\cdot)dW^j$ è indipendente da $\mathcal{F}^W_t$ per ogni $j=1,\dots,m$ e $t\in[0,T]$]

$$\psi(t)Y(t) = \int_0^t \psi(s)f(s)ds + \mathbb{E}[\vartheta|\mathcal{F}^W_t], \quad t\in[0,T].$$

Tutto questo suggerisce con efficacia quale possa rivelarsi una coppia soluzione adattata della BSDE (L): la coppia $(Y(\cdot),Z(\cdot))$ con [ricordando che $\psi^{-1}=\phi$]

$\boxed{Y(t) \triangleq \phi(t)\left\{\int_0^t \psi(s)f(s)ds + \mathbb{E}[\vartheta|\mathcal{F}^W_t]\right\}, \quad t\in[0,T]}$ (e P-q.c.) [che è continuo], e con $Z(\cdot)$ opportuno da determinare esplicitamente. Osserviamo subito che $Y(\cdot) \in \mathcal{L}^{2,loc}_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R}^k)$ [...] e che $Y(T)=\xi$ $[Y(T) = \phi(T)\{\int_0^T\psi(s)f(s)ds + \vartheta\} = \phi(T)\{\psi(T)\xi\} = \xi]$. Inoltre $(\mathbb{E}[\vartheta|\mathcal{F}^W_t])_{0\le t\le T}$ è una $\mathbb{F}^W$-martingala di quadrato integrabile (chiusa da ξ) e per ciò, grazie al Teorema di rappresentazione delle martingale, esiste uno ed un solo processo $\eta(\cdot) \equiv (\eta_1(\cdot),\dots,\eta_m(\cdot))^T \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R}^{k\times m})$ [che dipende solo dai dati assegnati] tale che

$\mathbb{E}[\vartheta|\mathcal{F}^W_t] = \mathbb{E}[\vartheta] + \sum_{j=1}^m \int_0^t \eta_j(s)dW^j(s), \quad t\in[0,T]$, e dunque tale che

$Y(t) = \phi(t)\pi(t), \quad t\in[0,T]$, se denotiamo con $\pi(t) \triangleq \int_0^t \psi(s)f(s)ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \eta_j(s)dW^j(s) + \mathbb{E}[\vartheta]$, $t\in[0,T]$. In particolare, è $d\pi(t) = \psi(t)f(t)dt + \sum_{j=1}^m \eta_j(t)dW^j(t)$ e quindi otteniamo che

$$dY(t) = \left\{A(t)Y(t) + \sum_{j=1}^m B_j(t)[B_j(t)Y(t) + \phi(t)\eta_j(t)] + f(t)\right\}dt + \sum_{j=1}^m [B_j(t)Y(t) + \phi(t)\eta_j(t)]dW^j(t)$$

[Grazie alla formula di Itô, $dY(t) = d[\phi(t)\pi(t)] = d\phi(t)\pi(t) + \phi(t)d\pi(t) + d[\phi,\pi](t)$, dove è $d[\phi,\pi](t) = \sum_{j=1}^m B_j(t)\phi(t)\eta_j(t)dt$.]

Ecco pertanto come dovremmo definire il processo $Z(\cdot) \equiv (Z_1(\cdot),\dots,Z_m(\cdot))^T$: per ogni $j=1,\dots,m$,

$\boxed{Z_j(t) \triangleq B_j(t)Y(t) + \phi(t)\eta_j(t), \quad t\in[0,T]}$ (e P-q.c.). Notiamo che pure $Z(\cdot)$ è a sua volta tale che $Z(\cdot) \in \mathcal{L}^{2,loc}_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R}^{k\times m})$ [...].

Il CLAIM ora è che sia $(Y(\cdot),Z(\cdot)) \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}^W}(\Omega;C([0,T]);\mathbb{R}^k) \times \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R}^{k\times m})$.

Definiamo per questo $\tau_m \triangleq \underset{(min)}{\inf}\{t\in[0,+\infty) \mid \int_0^t |Z(s)|^2ds \ge m\} \wedge T$, $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$: allora, come ben sappiamo dalla teoria, $(\tau_m)_{m\ge1}$ è una successione di $\mathbb{F}^W$-tempi d'arresto che è non-decrescente e tale che $\tau_m \uparrow T$ (per $m\to+\infty$), nel senso che

$P[\lim_{m\to+\infty}\tau_m \ge T] = P[\sup_{m\ge1}\tau_m = T] = 1$, ed inoltre tale per cui risulti

$$\underset{(\ge 0)}{\mathbb{E}[|Y(0)|^2]} + \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_m}\sum_{j=1}^m |Z_j(s)|^2ds\right] = \mathbb{E}[|Y(\tau_m)|^2] - 2\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_m}\langle Y(s); A(s)Y(s) + \sum_{j=1}^m B_j(s)Z_j(s) + f(s)\rangle ds\right],$$

$m\ge1$.

[È la formula di Itô applicata al processo di Itô $(|Y(t\wedge\tau_m)|^2)_{0\le t\le T}$ [...], ovvero $d(|Y(t\wedge\tau_m)|^2) =$
$= 2\langle Y(t\wedge\tau_m); dY(t\wedge\tau_m)\rangle + d[Y(\cdot)](t\wedge\tau_m)$, per ogni $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.] [notando che $0\wedge\tau_m=0$ e $T\wedge\tau_m=\tau_m$]

Adesso è facile verificare che esiste una costante $K\in(0,+\infty)$ tale che, per ogni $m\ge 1$,

$$-2\mathbb{E}\Big[\int_0^{\tau_m}\langle Y(s); A(s)Y(s)+\sum_{j=1}^m B_j(s)Z_j(s)+f(s)\rangle ds\Big] \le K\,\mathbb{E}\Big[\int_0^{\tau_m}\{|Y(s)|^2+|f(s)|^2\}ds\Big]+\frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\int_0^{\tau_m}\sum_{j=1}^m|Z_j(s)|^2ds\Big].$$

[Infatti, per ogni $s\in[0,T]$, $-2\langle Y(s); A(s)Y(s)+\sum_{j=1}^m B_j(s)Z_j(s)+f(s)\rangle \le C\,|Y(s)|\{|Y(s)|+\sum_{j=1}^m|Z_j(s)|+|f(s)|\}$ per Cauchy–Schwarz (e per uniforme limitatezza di $A(\cdot)$ e $B(\cdot)$), ed ora ad esempio $C|Y(s)||f(s)| \overset{[\text{IMMEDIATO}]}{\le}$
$\le \frac{C^2}{4}|Y(s)|^2+|f(s)|^2$ e analogamente $C|Y(s)|\sum_{j=1}^m|Z_j(s)| = \sum_{j=1}^m C|Y(s)||Z_j(s)| \le \sum_{j=1}^m\big(\frac{C^2}{2}|Y(s)|^2+\frac{1}{2}|Z_j(s)|^2\big)$.]

D'altra parte, sempre a riguardo del RHS dell'ultima identità ottenuta, risulta ovvio che $\Big(\mathbb{E}[|Y(\tau_m)|^2] \overset{(\text{ovv.})}{\le}\Big)\ \mathbb{E}\Big[\int_0^{\tau_m}|Y(s)|^2ds\Big] \le \text{costante}\cdot\mathbb{E}[|Y(\tau_m)|^2]$, $m\ge 1$, e che in definitiva (a meno di modificare [ovviamente] K)

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^{\tau_m}\sum_{j=1}^m|Z_j(s)|^2ds\Big] \le K\Big\{\mathbb{E}[|Y(\tau_m)|^2]+\mathbb{E}\Big[\int_0^{\tau_m}|f(s)|^2ds\Big]\Big\},\quad m\ge 1,$$

da cui deduciamo subito, grazie al Lemma di Fatou (mandando $m\to+\infty$), che [$\tau_m\uparrow T$]

$$\boxed{\sum_{j=1}^m\mathbb{E}\Big[\int_0^T|Z_j(s)|^2ds\Big] \le K\Big\{\mathbb{E}[|\xi|^2]+\mathbb{E}\Big[\int_0^T|f(s)|^2ds\Big]\Big\}},$$

quindi che $Z(\cdot)\in\mathcal{L}^2_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R}^{k\times m})$. ["e $Y(\cdot)$"]

[Somma(liminf$_{m\to+\infty}$(...)) $\overset{(\text{F.})}{\le}$ liminf$_{m\to+\infty}$(Somma(...)), per cui $\sum_{j=1}^m\mathbb{E}\Big[\int_0^T|Z_j(s)|^2ds\Big] = \sum_{j=1}^m\mathbb{E}\Big[\liminf_{m\to+\infty}\int_0^{\tau_m}|Z_j(s)|^2ds\Big] \le$
$\le \liminf_{m\to+\infty}\sum_{j=1}^m\mathbb{E}\Big[\int_0^{\tau_m}|Z_j(s)|^2ds\Big]$, ed infine gli ultimi due "liminf$_{m\to+\infty}$" sono "lim$_{m\to+\infty}$".]

Concludiamo la dimostrazione mostrando che (sempre a meno di modificare K)

$\mathbb{E}\big[\sup_{t\in[0,T]}|Y(t)|^2\big] \le K\Big\{\mathbb{E}[|\xi|^2]+\mathbb{E}\Big[\int_0^T|f(s)|^2ds\Big]\Big\}$. Con questo scopo, se denotiamo con $h(t)\triangleq A(t)Y(t)+\sum_{j=1}^m B_j(t)Z_j(t)+f(t)$, $t\in[0,T]$, allora $h(\cdot)\in\mathcal{L}^2_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R}^k)$ ed è tale che $Y(t)=\xi-\int_t^T h(s)ds-\int_t^T Z(s)\cdot dW(s)$, $t\in[0,T]$. Da tale decomposizione è facile dedurre che

$$\sup_{t\in[0,T]}|Y(t)|^2 \le 3\Big\{|\xi|^2+\Big(\int_0^T|h(s)|ds\Big)^2+\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_t^T Z(s)\cdot dW(s)\Big|^2\Big\}.$$

[Notato che, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$, $(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)$ (per Cauchy–Schwarz su $\mathbb{R}^3$), da $|Y(t)|\le|\xi|+\int_0^T|h(s)|ds+$
$+\Big|\int_t^T Z(s)\cdot dW(s)\Big|$, $t\in[0,T]$, otteniamo subito la stima voluta.]

Ora $\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T|h(s)|ds\Big)^2\Big] \le T\,\mathbb{E}\Big[\int_0^T|h(s)|^2ds\Big]$ [per Hölder / Cauchy–Schwarz, $\int_0^T|h(s)|ds \le T^{1/2}\Big(\int_0^T|h(s)|^2ds\Big)^{1/2}$]
e, soprattutto, $\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_t^T Z(s)\cdot dW(s)\Big|^2\Big] \overset{(\text{facile})}{\le} 2\,\mathbb{E}\Big[\int_0^T|Z(s)|^2ds\Big]+2\,\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t Z(s)\cdot dW(s)\Big|^2\Big] \le$
$\le$ costante $\cdot\,\mathbb{E}\Big[\int_0^T|Z(s)|^2ds\Big]$ grazie alle disuguaglianze di Burkholder–Davis–Gundy (con "$r=1$").

[Notato che $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$, da $\Big|\int_t^T Z(s)\cdot dW(s)\Big| \le \Big|\int_0^T Z(s)\cdot dW(s)\Big|+\Big|\int_0^t Z(s)\cdot dW(s)\Big|$, $t\in[0,T]$, deduciamo la relazione.]

Pertanto, a meno di modificare K, possiamo scrivere che $\mathbb{E}\big[\sup_{t\in[0,T]}|Y(t)|^2\big] \le$
$\le K\Big\{\mathbb{E}[|\xi|^2]+\mathbb{E}\Big[\int_0^T|h(s)|^2ds\Big]+\mathbb{E}\Big[\int_0^T|Z(s)|^2ds\Big]\Big\}$ (che è $<+\infty$) [...] □]

2.2 LE BSDEs NON-LINEARI Siano assegnati $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\xi\in\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}^W_T}(\Omega;\mathbb{R}^k)$, ed una mappa $h(t,y,z)\equiv h(t,y,z,\omega):[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times m}\times\Omega\to\mathbb{R}^k$ [non-lineare] che soddisfa alle tre seguenti condizioni:

(i) per ogni $(y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times m}$, $h(\cdot,y,z)$ è un processo $\mathbb{F}^W$-progressivamente misurabile;
(ii) $h(\cdot,0,0) \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R}^k)$;
(iii) esiste una costante $L \in (0,+\infty)$ tale che, per ogni $t\in[0,T]$, $y,\bar{y}\in\mathbb{R}^k$ e $z,\bar{z}\in\mathbb{R}^{k\times m}$,
$|h(t,y,z) - h(t,\bar{y},\bar{z})| \leq L\{|y-\bar{y}| + |z-\bar{z}|\}$. [P-q.c.]

[Un esempio è dato da $h(t,y,z) \triangleq A(t)y + \sum_{i=1}^m B_i(t)z_i + f(t)$ [lineare], dove $A(\cdot),B_1(\cdot),\ldots,B_m(\cdot) \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R}^{k^2})$ e $f(\cdot) \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R}^k)$ come nella precedente sezione.]

Definiamo come BSDE (non-lineare) associata a tali dati il seguente sistema stocastico:

$$(NL)\begin{cases} dY(t) = h(t,Y(t),Z(t))\,dt + Z(t)\cdot dW(t), & t\in[0,T], \\ Y(T) = \xi, \end{cases}$$

dove l'incognita è la coppia di processi $(Y(\cdot),Z(\cdot)) \equiv (Y(\cdot),(Z_1(\cdot),\ldots,Z_m(\cdot))^T)$ a valori in $\mathbb{R}^k$ e in $\mathbb{R}^{k\times m}$ rispettivamente.

Definiamo come <u>coppia soluzione adattata</u> di (NL) una coppia di processi $(Y(\cdot),Z(\cdot)) \in$
$\in \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}^W}(\Omega;C([0,T]);\mathbb{R}^k) \times \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R}^{k\times m})$ tale che risulti

$$Y(t) = \xi - \int_t^T h(s,Y(s),Z(s))\,ds - \int_t^T Z(s)\cdot dW(s), \quad t\in[0,T].$$

Intendiamo poi l'<u>unicità</u> di una data coppia soluzione adattata $(Y(\cdot),Z(\cdot))$ della BSDE (NL) esattamente come la intendiamo nel caso di una BSDE di tipo (L).

NOTAZIONI E OSSERVAZIONI. $\boxed{\text{I}}$ In questa sezione e in quelle successive vogliamo usare una norma sullo spazio $\mathbb{R}^{k\times m}_z$ diversa da quella euclidea standard $\|\cdot\|_2 \equiv \|\cdot\|_{2,\mathbb{R}^{k\times m}}$: definiamo per questo $\langle Z^{(1)};Z^{(2)}\rangle \triangleq tr\{Z^{(1)}(Z^{(2)})^T\}$ (la traccia della matrice (simmetrica) $Z^{(1)}(Z^{(2)})^T \in \mathbb{R}^{k^2}$) per ogni $Z^{(1)},Z^{(2)} \in \mathbb{R}^{k\times m}$ [→ formula di Itô...], e definiamo quindi $\boxed{|Z| \triangleq tr\{ZZ^T\}^{1/2},\ Z\in\mathbb{R}^{k\times m}}$. Allora è facile verificare che $\langle;\rangle$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^{k\times m}$ rispetto al quale $\mathbb{R}^{k\times m}$ resta uno spazio di Hilbert (ossia resta completo), e che in particolare $|\cdot|$ è la norma su $\mathbb{R}^{k\times m}$ indotta.
Notiamo comunque che $|\cdot|$ e $\|\cdot\|_2$ sono norme equivalenti su $\mathbb{R}^{k\times m}$, in quanto risulta
$\|Z\|_2 \leq |Z| \leq \sqrt{k\wedge m}\,\|Z\|_2$ per ogni $Z\in\mathbb{R}^{k\times m}$. [Sono uguali se, e solo se, $k=m$.]

[Infatti, se denotiamo con $\sigma(ZZ^T)$ il sottoinsieme di $[0,+\infty)$ costituito da tutti e soli gli autovalori di ZZ^T, allora è ben noto che $\max\sigma(ZZ^T) \leq tr\{ZZ^T\} \leq (k\wedge m)\cdot\max\sigma(ZZ^T)$ così come che $\|Z\|_2 = \sqrt{\max\sigma(ZZ^T)}$.] [In particolare, la condizione (iii) per $h(\cdot)$ resta vera.]

$\boxed{\text{II}}$ Denotiamo una volta per tutte con $M_W[0,T] \triangleq \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}^W}(\Omega;C([0,T]);\mathbb{R}^k) \times \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R}^{k\times m})$.
Per ogni $\beta\in\mathbb{R}$ e per ogni $(Y(\cdot),Z(\cdot)) \in M_W[0,T]$, definiamo (usando $|\cdot|$ appena definita)

$$\boxed{\|(Y(\cdot),Z(\cdot))\|_{M^\beta_W[0,T]} \triangleq \left\{\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}(|Y(t)|^2e^{2\beta t})\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T |Z(t)|^2 e^{2\beta t}\,dt\right]\right\}^{1/2}}.$$ Allora è facile

verificare che, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, $\|\cdot\|_{M^\beta_W[0,T]}$ è una norma su $M_W[0,T]$ rispetto alla quale $M_W[0,T]$ risulta uno spazio di Banach [reale] (ossia risulta completo), ed in effetti tutte queste norme sono mutuamente equivalenti. Denoteremo con $\|\cdot\|_{M_W[0,T]} \triangleq \|\cdot\|_{M^0_W[0,T]}$ e con $M^\beta_W[0,T] \triangleq (M_W[0,T], \|\cdot\|_{M^\beta_W[0,T]})$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Teorema (Buona positura delle BSDE (NL)). La BSDE non-lineare (NL) ammette una ed una sola coppia soluzione adattata $(Y(\cdot), Z(\cdot))$.

Dim. Viste le tre proprietà delle quali $h(\cdot)$ gode per ipotesi, è facile constatare che, per ogni coppia $(y(\cdot), z(\cdot)) \in M_W[0,T]$, vale $h(\cdot, y(\cdot), z(\cdot)) \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R}^k)$ [...]. Così, per ogni $(y(\cdot), z(\cdot)) \in M_W[0,T]$, consideriamo la seguente BSDE lineare di tipo (L):

$$\begin{cases} dY(t) = h(t, y(t), z(t))\,dt + Z(t)\cdot dW(t), & t \in [0,T], \\ Y(T) = \xi . \end{cases}$$

[Rispetto alle notazioni della precedente sezione, sarebbe $A(\cdot) \equiv 0$, $B(\cdot) \equiv 0$ e $f(t) \equiv f(t;(y(\cdot),z(\cdot))) = h(t, y(t), z(t))$.]

Allora, grazie al Teorema di buona positura delle BSDE (L), possiamo affermare che, per ogni $(y(\cdot), z(\cdot)) \in M_W[0,T]$, esiste una ed una sola coppia soluzione adattata $(Y(\cdot), Z(\cdot)) \equiv ((Y(\cdot), Z(\cdot));(y(\cdot), z(\cdot))) \in M_W[0,T]$ della BSDE soprascritta.

Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, rimane così ben definito il seguente operatore dello spazio di Banach $M^\beta_W[0,T]$:

$$\mathcal{T} : M^\beta_W[0,T] \to M^\beta_W[0,T], \quad \boxed{\mathcal{T}(y(\cdot), z(\cdot)) \triangleq (Y(\cdot), Z(\cdot)) \equiv ((Y(\cdot), Z(\cdot));(y(\cdot), z(\cdot)))}.$$

La tesi voluta è che $\mathcal{T}$ ammette uno ed un solo punto fisso per almeno un $\beta \in \mathbb{R}$. Noi dimostreremo infatti che, per ogni $\beta \in (0,+\infty)$ che sia sufficientemente (grande), la mappa $\mathcal{T}$ risulta contrattiva in quanto precisamente (per $\beta \uparrow +\infty$)

$$\|\mathcal{T}(y(\cdot), z(\cdot)) - \mathcal{T}(\bar{y}(\cdot), \bar{z}(\cdot))\|_{M^\beta_W[0,T]} \leq \frac{1}{2} \|(y(\cdot), z(\cdot)) - (\bar{y}(\cdot), \bar{z}(\cdot))\|_{M^\beta_W[0,T]} \quad \text{per ogni } (y(\cdot), z(\cdot)), (\bar{y}(\cdot), \bar{z}(\cdot)) \in M^\beta_W[0,T].$$

[in particolare, non avremmo potuto lavorare con $\|\cdot\|_{M_W[0,T]}$, cioè con $\beta = 0$]

Siano per ciò $\beta \in (0,+\infty)$ e $(y(\cdot), z(\cdot)), (\bar{y}(\cdot), \bar{z}(\cdot)) \in M^\beta_W[0,T]$ arbitrari, in corrispondenza dei quali poniamo $(Y(\cdot), Z(\cdot)) \equiv \mathcal{T}(y(\cdot), z(\cdot))$ e $(\bar{Y}(\cdot), \bar{Z}(\cdot)) \equiv \mathcal{T}(\bar{y}(\cdot), \bar{z}(\cdot))$, e denotiamo

$$\begin{cases} \hat{Y}(\cdot) \equiv Y(\cdot) - \bar{Y}(\cdot), & \hat{Z}(\cdot) \equiv Z(\cdot) - \bar{Z}(\cdot), \\ \hat{y}(\cdot) \equiv y(\cdot) - \bar{y}(\cdot), & \hat{z}(\cdot) \equiv z(\cdot) - \bar{z}(\cdot), \\ \hat{h}(\cdot) \equiv h(\cdot, y(\cdot), z(\cdot)) - h(\cdot, \bar{y}(\cdot), \bar{z}(\cdot)) & [\in \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}^W}(0,T;\mathbb{R}^k)], \\ \lambda \triangleq \dfrac{2L^2}{\beta} \ (\equiv \lambda_\beta) & [\in (0,+\infty)][\lambda \downarrow 0 \text{ per } \beta \uparrow +\infty]. \end{cases}$$

[Dunque $(\hat{Y}(\cdot), \hat{Z}(\cdot)), (\hat{y}(\cdot), \hat{z}(\cdot)) \in M^\beta_W[0,T]$, e vale che
$$\begin{cases} d\hat{Y}(t) = \hat{h}(t)\,dt + \hat{Z}(t)\cdot dW(t), & t \in [0,T], \\ \hat{Y}(T) = 0, \end{cases}$$
ossia che, $\forall t \in [0,T]$, $\hat{Y}(t) = -\int_t^T \hat{h}(s)\,ds - \int_t^T \hat{Z}(s)\cdot dW(s)$.]

[Notiamo che, $\forall t \in [0,T]$, $|\hat{h}(t)| \leq L\{|\hat{y}(t)| + |\hat{z}(t)|\}$.]

L'idea di base ora per far comparire le giuste norme e le giuste maggiorazioni è quella di lavorare su un opportuno sviluppo di Itô e di scrivere ed usare fra l'altro le disuguaglianze di Burkholder – Davis – Gundy.

Ciò che è veramente fondamentale è il fatto che $\boxed{d[\hat{Y}(\cdot)](t) = |\hat{Z}(t)|^2 dt}$ (dove la norma $|\cdot|$ è quella "della traccia" (come definita in $\boxed{I}$)), da cui deduciamo in particolare che

$$d|\hat Y(t)|^2 \overset{(\text{Itô})}{=} 2\langle \hat Y(t); d\hat Y(t)\rangle + d[\hat Y(\cdot)](t) = 2\langle \hat Y(t); \hat h(t)\rangle dt + 2\underbrace{\langle \hat Y(t); \hat Z(t)\cdot dW(t)\rangle}_{(=\langle \hat Z(t)^T \hat Y(t); dW(t)\rangle)} + |\hat Z(t)|^2 dt.$$

Ebbene il primo passo è quello di applicare la formula di Itô al processo reale $(|\hat Y(t)|^2 e^{2\beta t})_{0\le t\le T}$ per arrivare a scoprire che $|\hat Y(t)|^2 e^{2\beta t} + \int_t^T |\hat Z(s)|^2 e^{2\beta s} ds \le$

$$\le \lambda(T+1)\Big\{\sup_{t\in[0,T]}(|\hat g(t)|^2 e^{2\beta t}) + \int_0^T |\hat Z(t)|^2 e^{2\beta t}dt\Big\} - \int_t^T 2e^{2\beta s}\langle \hat Y(s);\hat Z(s)\cdot dW(s)\rangle, \quad t\in[0,T],$$

dove è facile controllare che $(e^{2\beta t}\hat Z(t)^T\hat Y(t))_{0\le t\le T} \in \mathcal{L}^2_{F^W}(0,T;\mathbb{R}^m)$ [...], per cui subito

$$\mathbb{E}\Big[|\hat Y(t)|^2 e^{2\beta t} + \int_t^T |\hat Z(s)|^2 e^{2\beta s}ds\Big] \le \lambda(T+1)\|(\hat g(\cdot),\hat Z(\cdot))\|^2_{M^\beta_W(0,T)}.$$

[È $d(|\hat Y(t)|^2 e^{2\beta t}) \overset{(\text{Itô})}{=} 2\beta|\hat Y(t)|^2 e^{2\beta t}dt + e^{2\beta t}\{2\langle\hat Y(t);\hat h(t)\rangle dt + 2\langle \hat Y(t);\hat Z(t)\cdot dW(t)\rangle + |\hat Z(t)|^2dt\}$, ossia

$$|\hat Y(t)|^2 e^{2\beta t} + \int_t^T |\hat Z(s)|^2 e^{2\beta s}ds \overset{(\hat Y(T)=0)}{=} -\int_t^T [2\beta|\hat Y(s)|^2 + 2\langle \hat Y(s);\hat h(s)\rangle]e^{2\beta s}ds - \int_t^T 2e^{2\beta s}\langle\hat Y(s);\hat Z(s)\cdot dW(s)\rangle, \quad t\in[0,T].$$

A questo punto, $|\langle \hat Y(s);\hat h(s)\rangle| \overset{[C.-S.]}{\le} |\hat Y(s)||\hat h(s)| \le L|\hat Y(s)|\{|\hat g(s)|+|\hat Z(s)|\}$ permette di stimare ($\forall t\in[0,T]$)

$$-\int_t^T[2\beta|\hat Y(s)|^2 + 2\langle\hat Y(s);\hat h(s)\rangle]e^{2\beta s}ds \le \int_t^T[-2\beta|\hat Y(s)|^2 + 2L|\hat Y(s)|(|\hat g(s)|+|\hat Z(s)|)]e^{2\beta s}ds \le \quad \Big[\lambda = \frac{2L^2}{\beta}\Big]$$

$$\le \int_t^T \Big[\underbrace{\Big(-2\beta + \frac{2L^2}{\lambda}\Big)}_{[=-\beta](<0)}|\hat Y(s)|^2 + \lambda(|\hat g(s)|^2 + |\hat Z(s)|^2)\Big]e^{2\beta s}ds$$

(semplicemente perché $\frac{2L^2}{\lambda}|\hat Y(s)|^2 - 2L|\hat Y(s)|(|\hat g(s)| + |\hat Z(s)|) + \lambda(|\hat g(s)|^2+|\hat Z(s)|^2) = \Big(\frac{L}{\sqrt\lambda}|\hat Y(s)| - \sqrt\lambda|\hat g(s)|\Big)^2 + \Big(\frac{L}{\sqrt\lambda}|\hat Y(s)|-\sqrt\lambda|\hat Z(s)|\Big)^2 \ge 0$) che a sua volta è

$$\le \lambda\int_0^T(|\hat g(s)|^2+|\hat Z(s)|^2)e^{2\beta s}ds \overset{(\text{ovvio})}{\le} \lambda T\sup_{t\in[0,T]}(|\hat g(t)|^2e^{2\beta t}) + \lambda\int_0^T|\hat Z(t)|^2e^{2\beta t}dt.$$ Infine $T+1\ge T\vee 1$.]

Il secondo passo consiste ora nell'invocare Burkholder – Davis – Gundy per trovare che esiste una costante $K\in(0,+\infty)$ (che non dipende dai processi in gioco) tale per cui [grazie anche al passo precedente]

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_t^T e^{2\beta s}\langle\hat Y(s);\hat Z(s)\cdot dW(s)\rangle\Big|\Big] \le \frac14\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}(|\hat Y(t)|^2e^{2\beta t})\Big] + K^2\lambda(T+1)\|(\hat g(\cdot),\hat Z(\cdot))\|^2_{M^\beta_W(0,T)}.$$

[Notato che, $\forall t\in[0,T]$, $|\int_t^T(\dots)| \le |\int_0^T(\dots)| + |\int_0^t(\dots)|$, abbiamo anzitutto che $\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]}|\int_t^T e^{2\beta s}\langle\hat Y(s);\hat Z(s)\cdot dW(s)\rangle|] \le$

$$\le \mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^T e^{2\beta s}\langle\hat Y(s);\hat Z(s)\cdot dW(s)\rangle\Big|\Big] + \mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t e^{2\beta s}\langle\hat Y(s);\hat Z(s)\cdot dW(s)\rangle\Big|\Big] \overset{(\text{ovvio})}{\le} 2\,\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t e^{2\beta s}\underbrace{\langle\hat Y(s);\hat Z(s)\cdot dW(s)\rangle}_{[=\langle\hat Z(s)^T\hat Y(s);dW(s)\rangle]}\Big|\Big]$$

$\le K\,\mathbb{E}\Big[\Big\{\int_0^T e^{4\beta t}|\hat Y(t)|^2|\hat Z(t)|^2dt\Big\}^{1/2}\Big]$ (per Burkholder – Davis – Gundy con $r=\frac12$), il quale a sua volta è

$$\overset{(\text{ovvio})}{\le} K\,\mathbb{E}\Big[\Big\{\sup_{t\in[0,T]}(|\hat Y(t)|^2e^{2\beta t})\Big\}^{1/2}\cdot\Big\{\int_0^T|\hat Z(t)|^2e^{2\beta t}dt\Big\}^{1/2}\Big] \le \frac14\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}(|\hat Y(t)|^2e^{2\beta t})\Big] + K^2\,\mathbb{E}\Big[\int_0^T|\hat Z(t)|^2e^{2\beta t}dt\Big]$$

("completamento quadrati" dentro $\mathbb{E}[\dots]$). Infine $\mathbb{E}[\int_0^T|\hat Z(t)|^2e^{2\beta t}dt]\le\lambda(T+1)\|(\hat g(\cdot),\hat Z(\cdot))\|^2_{M^\beta_W(0,T)}$ per quanto dimostrato poc'anzi.]

Il terzo ed ultimo passo è dedurre dai due passi precedenti che

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}(|\hat Y(t)|^2e^{2\beta t})\Big] \le 2\lambda(1+2K^2)(T+1)\|(\hat g(\cdot),\hat Z(\cdot))\|^2_{M^\beta_W(0,T)},$$ da cui finalmente [insieme al primo passo]

$$\|(\hat Y(\cdot),\hat Z(\cdot))\|^2_{M^\beta_W(0,T)} \le \underbrace{\lambda(3+4K^2)(T+1)}_{(\text{che}\downarrow 0 \text{ per } \beta\uparrow+\infty)}\|(\hat g(\cdot),\hat Z(\cdot))\|^2_{M^\beta_W(0,T)}$$ e quindi la tesi.

[Grazie a quanto verificato nel primo passo, sappiamo che $|\hat{Y}(t)|^2 e^{2\beta t} \le \lambda(T+1)\Big\{\sup_{t\in[0,T]}(|\hat{\delta}(t)|^2 e^{2\beta t}) + \int_0^T |\hat{Z}(t)|^2 e^{2\beta t}\,dt\Big\} - \int_t^T 2e^{2\beta s}\langle \hat{Y}(s);\hat{Z}(s)\cdot dW(s)\rangle$, $t\in[0,T]$, e da ciò deduciamo immediatamente che $\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]}(|\hat{Y}(t)|^2 e^{2\beta t})] \le \lambda(T+1)\|(\hat{\delta}(\cdot),\hat{Z}(\cdot))\|^2_{M^\beta_W[0,T]} + 2\,\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_t^T e^{2\beta s}\langle \hat{Y}(s);\hat{Z}(s)\cdot dW(s)\rangle\Big|\Big]$. Adesso basta usare la disuguaglianza dimostrata al passo due per il secondo addendo del RHS.] □

2.3 UN PAIO DI PROPRIETÀ DELLE BSDEs

Enunciamo (e dimostriamo) direttamente i due teoremi.

Teorema (Dipendenza continua delle soluzioni dai dati iniziali). [ξ e h] Siano assegnati: $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\xi,\bar{\xi}\in L^2_{\mathcal{F}_W}(\Omega;\mathbb{R}^k)$, e $h(\cdot),\bar{h}(\cdot):[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times m}(\times\Omega)\to\mathbb{R}^k$ che soddisfano alle tre condizioni (i), (ii) e (iii) presentate nella precedente sezione. Siano quindi $(Y(\cdot),Z(\cdot))\equiv((Y(\cdot),Z(\cdot));(h(\cdot),\xi))$, $(\bar{Y}(\cdot),\bar{Z}(\cdot))\equiv((\bar{Y}(\cdot),\bar{Z}(\cdot));(\bar{h}(\cdot),\bar{\xi}))\in M_W[0,T]$ le due coppie soluzioni adattate rispettivamente delle due seguenti BSDEs (non-lineari):

$$\begin{cases} dY(t) = h(t,Y(t),Z(t))\,dt + Z(t)\cdot dW(t), & t\in[0,T],\\ Y(T)=\xi, \end{cases}\quad\text{e}$$

$$\begin{cases} d\bar{Y}(t) = \bar{h}(t,\bar{Y}(t),\bar{Z}(t))\,dt + \bar{Z}(t)\cdot dW(t), & t\in[0,T],\\ \bar{Y}(T)=\bar{\xi}. \end{cases}$$

[Qui è essenziale il Teorema di buona posizione.]

Allora esiste una costante $K\in(0,+\infty)$ indipendente da tutti questi processi tale per cui

$$\|(Y(\cdot)-\bar{Y}(\cdot),Z(\cdot)-\bar{Z}(\cdot))\|^2_{M_W[0,T]} \le K\Big\{\mathbb{E}[|\xi-\bar{\xi}|^2] + \mathbb{E}\Big[\int_0^T |h(s,Y(s),Z(s))-\bar{h}(s,Y(s),Z(s))|^2 ds\Big]\Big\}.$$

[$\boxed{\text{Dim.}}$ Innanzitutto denotiamo
$$\begin{cases} \hat{Y}(\cdot)\equiv Y(\cdot)-\bar{Y}(\cdot), & \hat{Z}(\cdot)\equiv Z(\cdot)-\bar{Z}(\cdot),\\ \hat{\xi}\equiv\xi-\bar{\xi}, & \hat{h}(\cdot)\equiv h(\cdot,Y(\cdot),Z(\cdot))-\bar{h}(\cdot,Y(\cdot),Z(\cdot)), \end{cases}$$
per cui la tesi è che $\|(\hat{Y}(\cdot),\hat{Z}(\cdot))\|^2_{M_W[0,T]}\le K\Big\{\mathbb{E}[|\hat{\xi}|^2]+\mathbb{E}\Big[\int_0^T|\hat{h}(s)|^2ds\Big]\Big\}$. [con $K>0$ opportuno]

[Osserviamo che $(\hat{Y}(\cdot),\hat{Z}(\cdot))\in M_W[0,T]$ soddisfa $\begin{cases} d\hat{Y}(t)=[h(t,Y(t),Z(t))-\bar{h}(t,\bar{Y}(t),\bar{Z}(t))]dt+\hat{Z}(t)\cdot dW(t), & t\in[0,T],\\ \hat{Y}(T)=\hat{\xi}. \end{cases}$]

Con l'obiettivo di arrivare a tale disuguaglianza, applichiamo la formula di Itô al processo reale $|\hat{Y}(\cdot)|^2$ per ottenere (in modo del tutto simile al primo passo della dimostrazione precedente)

$$|\hat{Y}(t)|^2+\int_t^T|\hat{Z}(s)|^2ds \le |\hat{\xi}|^2+\int_t^T\Big[(1+2L+2L^2)|\hat{Y}(s)|^2+\tfrac{1}{2}|\hat{Z}(s)|^2+|\hat{h}(s)|^2\Big]ds - \int_t^T 2\langle\hat{Y}(s);\hat{Z}(s)\cdot dW(s)\rangle,\quad t\in[0,T],$$

da cui pure ($\forall t\in[0,T]$)

$$\mathbb{E}[|\hat{Y}(t)|^2]+\tfrac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\int_t^T|\hat{Z}(s)|^2ds\Big]\le\mathbb{E}[|\hat{\xi}|^2]+\mathbb{E}\Big[\int_0^T|\hat{h}(s)|^2ds\Big]+(1+2L+2L^2)\int_t^T\mathbb{E}[|\hat{Y}(s)|^2]ds.$$

[È $d|\hat{Y}(t)|^2\overset{(\text{Itô})}{=}2\langle\hat{Y}(t);d\hat{Y}(t)\rangle+d[\hat{Y}(\cdot)](t)=2\langle\hat{Y}(t);h(t,Y(t),Z(t))-\bar{h}(t,\bar{Y}(t),\bar{Z}(t))\rangle+2\langle\hat{Y}(t);\hat{Z}(t)\cdot dW(t)\rangle+|\hat{Z}(t)|^2dt$, ovvero $|\hat{Y}(t)|^2+\int_t^T|\hat{Z}(s)|^2ds=|\hat{\xi}|^2-2\int_t^T\langle\hat{Y}(s);h(s,Y(s),Z(s))-\bar{h}(s,\bar{Y}(s),\bar{Z}(s))\rangle ds-\int_t^T2\langle\hat{Y}(s);\hat{Z}(s)\cdot dW(s)\rangle$, $t\in[0,T]$. Adesso $h(s,Y(s),Z(s))-\bar{h}(s,\bar{Y}(s),\bar{Z}(s))=\hat{h}(s)+[\bar{h}(s,Y(s),Z(s))-\bar{h}(s,\bar{Y}(s),\bar{Z}(s))]$ ($\forall s\in[0,T]$) permette di maggiorare come segue:

$|h(s,Y(s),Z(s)) - \bar h(s,\bar Y(s),\bar Z(s))| \le |\hat h(s)| + L\{|\hat Y(s)| + |\hat Z(s)|\}$ ($\forall s \in [0,T]$) e quindi, grazie a Cauchy–Schwarz, $-2\int_t^T \langle \hat Y(s); h(s,Y(s),Z(s)) - \bar h(s,\bar Y(s),\bar Z(s))\rangle ds \le$ ($\forall t \in [0,T]$)

$\le 2\int_t^T [|\hat Y(s)||\hat h(s)| + L|\hat Y(s)|(|\hat Y(s)| + |\hat Z(s)|)]ds \le \int_t^T [(1+2L+2L^2)|\hat Y(s)|^2 + \frac{1}{2}|\hat Z(s)|^2 + |\hat h(s)|^2]ds$

(semplicemente perché, $\forall s \in [0,T]$, $(1+2L+2L^2)|\hat Y(s)|^2 + \frac{1}{2}|\hat Z(s)|^2 + |\hat h(s)|^2 - 2|\hat Y(s)||\hat h(s)| - 2L|\hat Y(s)|(|\hat Y(s)| + |\hat Z(s)|) = (|\hat Y(s)| - |\hat h(s)|)^2 + (\sqrt{2}L|\hat Y(s)| - \frac{1}{\sqrt{2}}|\hat Z(s)|)^2 \ge 0$).]

Dunque $\mathbb{E}[|\hat Y(t)|^2] \le \underbrace{\{\mathbb{E}[|\hat\xi|^2] + \mathbb{E}[\int_0^T |\hat h(s)|^2 ds] - \frac{1}{2}\mathbb{E}[\int_t^T |\hat Z(s)|^2 ds]\}}_{\text{(non-decrescente)}} +$

$+ \underbrace{(1+2L+2L^2)}_{\substack{\text{(costante)}\\ (\ge 0)}} \int_t^T \mathbb{E}[|\hat Y(s)|^2] ds$, $t \in [0,T]$, e quindi grazie alla classica diseguaglianza di Gronwall — in forma integrale — deduciamo subito che esiste una costante $c \in (0,+\infty)$ (dipendente solo da L e da T) tale per cui

$$\mathbb{E}[|\hat Y(t)|^2] + \mathbb{E}[\int_t^T |\hat Z(s)|^2 ds] \le c\{\mathbb{E}[|\hat\xi|^2] + \mathbb{E}[\int_0^T |\hat h(s)|^2 ds]\}, \quad t \in [0,T].$$

[Scriveremmo infatti $\mathbb{E}[|\hat Y(t)|^2] \le c \cdot (\mathbb{E}[|\hat\xi|^2] + \mathbb{E}[\int_0^T |\hat h(s)|^2 ds] - \frac{1}{2}\mathbb{E}[\int_t^T |\hat Z(s)|^2 ds])$, ed ora basta aumentare c in un modo tale che $c \cdot (-\frac{1}{2}) \le -1$, ovvero $c \ge 2$.]

Così, intanto, $\mathbb{E}[\int_0^T |\hat Z(s)|^2 ds] \le c\{\mathbb{E}[|\hat\xi|^2] + \mathbb{E}[\int_0^T |\hat h(s)|^2 ds]\}$. Concludiamo la dimostrazione verificando che pure $\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} |\hat Y(t)|^2] \le c\{\mathbb{E}[|\hat\xi|^2] + \mathbb{E}[\int_0^T |\hat h(s)|^2 ds]\}$ (a meno d'incrementare c). Allo infatti, esattamente come al secondo passo della "dimostrazione precedente" [con $p=0$], è facile constatare che, grazie alla diseguaglianza di Burkholder–Davis–Gundy "con $r = \frac{1}{2}$", vale

$\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} |\int_t^T \langle \hat Y(s); \hat Z(s) \cdot dW(s)\rangle|] \le \frac{1}{4}\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} |\hat Y(t)|^2] + K^2 \mathbb{E}[\int_0^T |\hat Z(t)|^2 dt]$ (per un'opportuna costante $K \in (0,+\infty)$). Ciò permette di concludere tenendo presente che, $\forall t \in [0,T]$,

$$\begin{cases} |\hat Y(t)|^2 \le |\hat\xi|^2 + \int_0^T [(1+2L+2L^2)|\hat Y(s)|^2 + |\hat h(s)|^2] ds - 2\int_t^T \langle \hat Y(s); \hat Z(s) \cdot dW(s)\rangle, \\ \mathbb{E}[|\hat Y(t)|^2] \le c\{\mathbb{E}[|\hat\xi|^2] + \mathbb{E}[\int_0^T |\hat h(s)|^2 ds]\}. \end{cases}$$

[Perché allora $\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} |\hat Y(t)|^2] \le \mathbb{E}[|\hat\xi|^2] + \mathbb{E}[\int_0^T [(1+2L+2L^2)|\hat Y(s)|^2 + |\hat h(s)|^2] ds] +$

$+ \frac{1}{2}\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} |\hat Y(t)|^2] + 2K^2 \mathbb{E}[\int_0^T |\hat Z(t)|^2 dt]$ [sono tutti degli $O(\mathbb{E}[|\hat\xi|^2] + \mathbb{E}[\int_0^T |\hat h(s)|^2 ds])$].] □

Teorema (Convergenza iterazioni di Picard). Torniamo a considerare la BSDE (NL) e la sua coppia soluzione adattata $(Y(\cdot), Z(\cdot)) \in M_W[0,T]$. Consideriamo quindi la successione $((Y^i(\cdot), Z^i(\cdot)))_{i\ge0}$ in $M_W[0,T]$, associata ai coefficienti $h(\cdot)$ e ξ della BSDE (NL), definita ricorsivamente come segue: $(Y^0(t), Z^0(\cdot)) \equiv 0$ mentre, per ogni $i \ge 0$, $(Y^{i+1}(\cdot), Z^{i+1}(\cdot))$ è la coppia soluzione adattata della BSDE lineare (tipo (L))

$$\begin{cases} dY^{i+1}(t) = h(t, Y^i(t), Z^i(t))dt + Z^{i+1}(t) \cdot dW(t), \quad t \in [0,T], \quad [h(\cdot, Y^i(\cdot), Z^i(\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^n)] \\ Y^{i+1}(T) = \xi. \end{cases}$$

Allora vale che $(Y^i(\cdot), Z^i(\cdot)) \xrightarrow[i\to+\infty]{M_W[0,T]} (Y(\cdot), Z(\cdot))$ esponenzialmente, nel senso che esiste una costante $K \in (0,+\infty)$ tale per cui, $\forall i \geq 1$,
$$\|(Y^i(\cdot), Z^i(\cdot)) - (Y(\cdot), Z(\cdot))\|_{M_W[0,T]} \leq K \cdot e^{-i} .$$

[$\boxed{\text{Dim.}}$ Facciamo un ritorno alla dimostrazione del Teorema di buona posizione delle BSDE (NL): è $(Y^{i+1}(\cdot), Z^{i+1}(\cdot)) = T(Y^i(\cdot), Z^i(\cdot))$ per ogni $i \geq 0$, chiaramente, dove $T: M^\beta_W[0,T] \to M^\beta_W[0,T]$ può essere considerato per $\beta \in (0,+\infty)$, e quindi, se denotiamo con $\hat{Y}^{i+1}(\cdot) \equiv Y^{i+1}(\cdot) - Y^i(\cdot)$ e $\hat{Z}^{i+1}(\cdot) \equiv Z^{i+1}(\cdot) - Z^i(\cdot)$, $i \geq 0$, allora abbiamo che [ricordando le disuguaglianze ottenute alla fine]
$\|(\hat{Y}^{i+1}(\cdot), \hat{Z}^{i+1}(\cdot))\|_{M^\beta_W[0,T]} \leq \Theta(\sqrt{\lambda}) \cdot \|(\hat{Y}^i(\cdot), \hat{Z}^i(\cdot))\|_{M^\beta_W[0,T]}$, $i \geq 1$ [dove $\lambda = \frac{2L^2}{\beta}$], quindi
$\|(\hat{Y}^{i+1}(\cdot), \hat{Z}^{i+1}(\cdot))\|_{M^\beta_W[0,T]} \leq e^{-1} \|(\hat{Y}^i(\cdot), \hat{Z}^i(\cdot))\|_{M^\beta_W[0,T]}$ per β sufficientemente grande ($\forall i \geq 1$).

[Basta infatti osservare che, nelle notazioni della dimostrazione, è come se, per ogni $i \geq 1$, ponessimo $Y(\cdot) \equiv Y^{i+1}(\cdot)$, $Z(\cdot) \equiv Z^{i+1}(\cdot)$, $\overline{Y}(\cdot) \equiv Y^i(\cdot)$, $\overline{Z}(\cdot) \equiv Z^i(\cdot)$ (per cui $\hat{Y}(\cdot) \equiv \hat{Y}^{i+1}$ e $\hat{Z}(\cdot) \equiv \hat{Z}^{i+1}(\cdot)$), mentre naturalmente $(y(\cdot), z(\cdot)) \equiv (Y^i(\cdot), Z^i(\cdot))$ e $(\overline{y}(\cdot), \overline{z}(\cdot)) \equiv (Y^{i-1}(\cdot), Z^{i-1}(\cdot))$ (per cui $\hat{y}(\cdot) \equiv \hat{Y}^i(\cdot)$ e $\hat{z}(\cdot) \equiv \hat{Z}^i(\cdot)$).]

Di conseguenza esiste una costante $c \in (0,+\infty)$ (che dipende solo da T, $h(\cdot)$, ξ e β) tale per cui
$\boxed{\|(\hat{Y}^{i+1}(\cdot), \hat{Z}^{i+1}(\cdot))\|_{M_W[0,T]} \leq c\, e^{-i}}$, $i \geq 1$.

[Semplicemente $\|(\hat{Y}^{i+1}(\cdot), \hat{Z}^{i+1}(\cdot))\|_{M_W[0,T]} \leq \|(\hat{Y}^{i+1}(\cdot), \hat{Z}^{i+1}(\cdot))\|_{M^\beta_W[0,T]}$ (in quanto $\beta > 0$), e d'altra parte, per $\beta \uparrow +\infty$, è $\|(\hat{Y}^{i+1}(\cdot), \hat{Z}^{i+1}(\cdot))\|_{M^\beta_W[0,T]} \leq e^{-i} \|(\hat{Y}^1(\cdot), \hat{Z}^1(\cdot))\|_{M^\beta_W[0,T]}$ grazie a ciò che abbiamo appena verificato. Notiamo infine che $d\hat{Y}^1(t) = h(t,0,0)dt + \hat{Z}^1(t) \cdot dW(t)$, $t \in [0,T]$, con $\hat{Y}^1(T) = \xi$, essendo $(\hat{Y}^1(\cdot), \hat{Z}^1(\cdot)) \equiv$
$\equiv (Y^1(\cdot), Z^1(\cdot))$.]

A questo punto la conclusione è standard, anche perché $(Y^i(\cdot), Z^i(\cdot)) \xrightarrow[i\to+\infty]{M_W[0,T]} (Y(\cdot), Z(\cdot))$ in virtù del Teorema delle contrazioni. [Visto che $(Y^{i+1}(\cdot), Z^{i+1}(\cdot)) = T(Y^i(\cdot), Z^i(\cdot))$ per ogni $i \geq 0$.]

[Per ogni $i \geq 1$, $\|(Y^i(\cdot), Z^i(\cdot)) - (Y(\cdot), Z(\cdot))\|_{M_W[0,T]} \overset{(ok)}{=} \left\| \sum_{l=i}^{+\infty} (\hat{Y}^{l+1}(\cdot), \hat{Z}^{l+1}(\cdot)) \right\|_{M_W[0,T]} \overset{(ok)}{\leq} \sum_{l=i}^{+\infty} \|(\hat{Y}^{l+1}(\cdot), \hat{Z}^{l+1}(\cdot))\|_{M_W[0,T]} \leq$
$\leq c \sum_{l=i}^{+\infty} e^{-l}$ (per quanto visto poc'anzi) $\overset{(imm.)}{=} \Big(c \cdot \underbrace{\sum_{l=0}^{+\infty} e^{-l}}_{(= e/(e-1))}\Big) \cdot e^{-i}$.] □]

$\boxed{\text{3. FORMULE TIPO FEYNMAN-KAC}}$ Fissiamo uno scalare $T \in (0,+\infty)$, due interi $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, uno spazio di probabilità completo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, e due mappe $b(t,x): [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma(t,x): [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ continue su tutto $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ ed uniformemente ~~continue~~ lipschitziane nella variabile $x \in \mathbb{R}^n$. [Dunque esiste una costante $L \in (0,+\infty)$ tale che, per ogni $t \in [0,T]$ e $x, \overline{x} \in \mathbb{R}^n$, sia $|b(t,x) - b(t,\overline{x})| \leq L|x - \overline{x}|$ e $|\sigma(t,x) - \sigma(t,\overline{x})| \leq L|x - \overline{x}|$ (dove $|\cdot| \equiv \|\cdot\|_2$).]

Per ogni $t \in [0,T)$, sia quindi $W(\cdot) \equiv W(\cdot\,; t) \equiv (W(s))_{t \leq s \leq T}$ un processo di Wiener m-dimensionale su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con $W(t) \equiv 0$, e denotiamo con $\mathbb{F}^W \equiv (\mathcal{F}^W_s)_{t \leq s \leq T}$ la filtrazione (su Ω) generata da $W(\cdot) \equiv W(\cdot\,;t)$. Così, per ogni $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$, sia poi $X(\cdot) \equiv X(\cdot\,;(t,x)) \equiv (X(s))_{t \le s \le T} \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}^W}(\Omega; \mathcal{C}([t,T]); \mathbb{R}^n)$ la soluzione (in senso forte) della seguente FSDE non-lineare:

$$
\begin{cases}
dX(s) = b(s, X(s))\,ds + \sigma(s, X(s)) \cdot dW(s), & s \in [t,T], \\
X(t) \equiv x & .
\end{cases}
$$

Fissiamo anche due mappe $g(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua e $h(t,x,y,z) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ continua delle quali $h(\cdot)$ sia uniformemente lipschitziana nella coppia $(y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$. [Cioè $\exists L \in (0,+\infty)$ tale che, $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ e $\forall y, \bar{y} \in \mathbb{R}$ e $z, \bar{z} \in \mathbb{R}^m$, $|h(t,x,y,z) - h(t,x,\bar{y},\bar{z})| \le L\{|y-\bar{y}| + |z-\bar{z}|\}$.]

Per ogni $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$, se $X(\cdot) \equiv X(\cdot\,;(t,x))$ come prima, allora sia $(Y(\cdot), Z(\cdot)) \equiv (Y(\cdot\,;(t,x)), Z(\cdot\,;(t,x))) \equiv (Y(\cdot\,;(t,x)), Z(\cdot\,;(t,x)); X(\cdot\,;(t,x))) \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}^W}(\Omega; \mathcal{C}([t,T]); \mathbb{R}) \times \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}^W}(t,T;\mathbb{R}^m)$ la [...] coppia soluzione adattata della seguente BSDE non-lineare:

$$
\begin{cases}
dY(s) = -h(s, X(s), Y(s), Z(s))\,ds + Z(s) \cdot dW(s), & s \in [t,T], \\
Y(T) = g(X(T)) & .
\end{cases}
$$

Fissiamo infine altre due mappe $c(t,x), d(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uniformemente continue ed uniformemente lipschitziane nella variabile $x \in \mathbb{R}^n$ delle quali $c(\cdot)$ è limitata su tutto $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ mentre $d(\cdot)$ è limitata su $[0,T] \times \{0\}$. [Quindi $\exists L \in (0,+\infty)$ t.c., $\forall t \in [0,T]$ e $\forall x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $|c(t,x) - c(t,\bar{x})| \le L|x-\bar{x}|$, $|d(t,x) - d(t,\bar{x})| \le L|x-\bar{x}|$, $|c(t,x)| \le L$ e $|d(t,0)| \le L$.]

Consideriamo finalmente due differenti problemi di Cauchy, possibilmente degeneri, relativi a tutti i precedenti dati assegnati: il primo, per una PDE parabolica lineare

$$
(\ell)\begin{cases}
u_t(t,x) + \frac{1}{2} \operatorname{tr}\{\sigma(t,x)\sigma(t,x)^T \cdot u_{xx}(t,x)\} + \langle b(t,x); u_x(t,x)\rangle + c(t,x)u(t,x) + d(t,x) = 0, \\
(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n, \\
u(T,x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n;
\end{cases}
$$

[dove $u_x(\cdot)$ è il gradiente di $u(\cdot)$ e $u_{xx}(\cdot)$ è la matrice hessiana di $u(\cdot)$]
[nella incognita $u(t,x) \in \mathcal{C}([0,T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$]

il secondo, per una PDE parabolica non-lineare

$$
(n\ell)\begin{cases}
v_t(t,x) + \frac{1}{2} \operatorname{tr}\{\sigma(t,x)\sigma(t,x)^T v_{xx}(t,x)\} + \langle b(t,x); v_x(t,x)\rangle + h(t,x,v(t,x),\sigma(t,x)^T v_x(t,x)) = \\
= 0, \quad (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n, \\
v(T,x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.
\end{cases}
$$

[nella incognita $v(t,x) \in \mathcal{C}([0,T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$]

Enunciamo, ma non dimostriamo, un interessante risultato a riguardo.

Teorema (Rappresentazione via SDEs). $\boxed{1}$ Sia assunto che le mappe $b(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$ siano [solo per questa proposizione $\boxed{1}$] uniformemente continue su tutto $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ e limitate su $[0,T] \times \{0\}$ [$\exists L \in (0,+\infty)$ t.c., $\forall t \in [0,T]$, $|b(t,0)| \leq L$ e $|\sigma(t,0)| \leq L$], e che la mappa $g(\cdot)$ sia uniformemente continua su tutto $\mathbb{R}^n$.
Allora il problema lineare (l) ammette una ed una sola "SOLUZIONE VISCOSA" [...] $u(t,x)$, e questa può essere rappresentata [esplicitamente] per mezzo di $X(\cdot)$ come segue:

$$u(t,x) = \mathbb{E}\Big[\int_t^T d(s, X(s;(t,x))) \cdot \exp\Big(-\int_t^s c(r, X(r;(t,x)))\,dr\Big) +$$

$$+ g(X(T;(t,x))) \cdot \exp\Big(-\int_t^T c(r, X(r;(t,x)))\,dr\Big) \Big] , \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n .$$

Nel caso che il problema ammette una soluzione classica, ovvero $u(t,x) \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, allora questa è unica ed è data proprio da tale formula.

$\boxed{2}$ Il problema non-lineare (nl) ammette una ed una sola SOLUZIONE VISCOSA [...] $\varpi(t,x)$, e questa può essere rappresentata [meno esplicitamente] per mezzo di $X(\cdot)$ e di $(Y(\cdot), Z(\cdot))$ come segue:

$$\varpi(t,x) = \mathbb{E}[\, Y(t;(t,x)) \,] = Y(t;(t,x)) , \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n .$$

[nel senso che $Y(t;(t,x))$ è non-aleatoria per ogni $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$]

Nel caso che il problema ammette una soluzione classica, ovvero $\varpi(t,x) \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, allora questa è unica ed è data proprio da tale formula.

Concludiamo questo nostro lavoro osservando che l'ultima affermazione del precedente teorema è una semplice conseguenza della formula di Itô applicata al processo (di Itô) ~~xxxx~~ reale $(\varpi(s, X(s)))_{t \leq s \leq T}$, per ogni $t \in [0,T)$.

[Supponiamo infatti che il problema (nl) ammette una soluzione $\varpi(t,x) \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$. Allora possiamo sviluppare secondo Itô ciascun processo $(\varpi(s, X(s)))_{t \leq s \leq T}$, per ogni $t \in [0,T)$: date le FSDE soddisfatte da $X(\cdot) \equiv X(\cdot\,;(t,x))$, otteniamo che $d(\varpi(r, X(r))) \overset{(\text{Itô})}{=} \varpi_t(r, X(r))\,dr + \langle \varpi_x(r, X(r)) ; dX(r) \rangle +$
$+ \frac{1}{2} \operatorname{tr}\{ \sigma(r, X(r)) \sigma(r, X(r))^T \varpi_{xx}(r, X(r)) \}\,dr \overset{[dX(r)]}{=} \Big[\varpi_t(r, X(r)) + \langle b(r, X(r)) ; \varpi_x(r, X(r)) \rangle +$
$+ \frac{1}{2} \operatorname{tr}\{ \sigma(r, X(r)) \sigma(r, X(r))^T \varpi_{xx}(r, X(r)) \} \Big]\,dr + \langle \varpi_x(r, X(r)) ; \sigma(r, X(r)) \cdot dW(r) \rangle$ su tutto $[t,T]$, o equivalentemente che, per ogni $s \in [t,T]$, sia $g(X(T)) - \varpi(s, X(s)) \overset{[\varpi(T,\cdot) \equiv g]}{=}$
$= \varpi(T, X(T)) - \varpi(s, X(s)) = \int_s^T \Big[\varpi_t(r, X(r)) + \frac{1}{2} \operatorname{tr}\{ \sigma(r, X(r)) \sigma(r, X(r))^T \varpi_{xx}(r, X(r)) \} +$
$+ \langle b(r, X(r)) ; \varpi_x(r, X(r)) \rangle \Big]\,dr + \int_s^T \sigma(r, X(r))^T \varpi_x(r, X(r)) \cdot dW(r) \overset{[\text{PDE soddisfatta da } \varpi(\cdot)]}{=}$
$= -\int_s^T h(r, X(r), \varpi(r, X(r)), \sigma(r, X(r))^T \varpi_x(r, X(r)))\,dr + \int_s^T \sigma(r, X(r))^T \varpi_x(r, X(r)) \cdot dW(r)$. Pertanto,

riassumendo, abbiamo che, per ogni $0 \le t \le s \le T$, è

$$\varpi(s,X(s)) = g(X(T)) - \int_s^T [-h(r,X(r),\varpi(r,X(r)),\sigma(r,X(r))^T\varpi_x(r,X(r)))]dr - \int_s^T \sigma(r,X(r))^T\varpi_x(r,X(r))\cdot dW(r) .$$

Ora, d'altra parte, è $(\varpi(\cdot,X(\cdot)),\ \sigma(\cdot,X(\cdot))^T\varpi_x(\cdot,X(\cdot))) \in L^2_{\mathbb{F}^W}(\Omega;C([t,T]);\mathbb{R}) \times L^2_{\mathbb{F}^W}(t,T;\mathbb{R}^m)$ [...],

e così, in definitiva, dovremo $\underline{\varpi(s,X(s)) = Y(s;(t,x))}$ per ogni $s \in [t,T]$ (e P-q.c.) e

$\sigma(s,X(s))^T\varpi_x(s,X(s)) = Z(s;(t,x))$ per q.o. $s \in [t,T]$ (e P-q.c.) : in particolare, abbiamo

$$\varpi(t,x) = \varpi(t,X(t)) = Y(t;(t,x)) .]$$

[NON-aleatoria]