Siano X e Y due spazi metrici, $A\subseteq X$ $(A\neq\emptyset)$ e $\phi : A\to Y$: allora ϕ è "propria" se, per ogni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A tale che $(\phi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge in Y, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione convergente in X (ossia in $\bar{A}$); invece ϕ è "propria per compatti" se, per ogni K compatto di Y, $\phi^{-1}(K)$ è un compatto di X (ossia di A). (Ricordiamo che, in uno spazio metrico, la compattezza equivale alla compattezza per successioni, e che un compatto è sempre un chiuso.)

$\boxed{\text{OSS.}}$ Nel caso particolare $X\cong\mathbb{R}^N$ e $Y\cong\mathbb{R}^M$, ogni successione limitata in X o in Y ammette sempre una sottosuccessione convergente (in X o in Y risp.), per cui se A è limitato allora ogni ϕ è propria, mentre se A è illimitato allora ϕ è propria $\Longleftrightarrow \lim_{x\in A,\ |x|_X\to\infty} |\phi(x)|_Y=\infty$ (ossia ϕ illimitata) ($\Rightarrow\phi$ non costante).

Proposizione: (1) ϕ propria per compatti $\Rightarrow$ ϕ propria;

(2) ϕ propria e continua $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{(i) } F\subseteq A,\ F \text{ chiuso di } X \Rightarrow \phi(F) \text{ chiuso di } Y; \\ \text{(ii) } A \text{ chiuso di } X \Rightarrow \phi \text{ propria per compatti.} \end{cases}$

[(1) Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A ha $(\phi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergente in Y, allora $\{\phi(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è compatto in Y $\overset{(ip.)}{\Rightarrow}$ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è in un compatto di A.

(2) Anzitutto $\overline{\phi(F)}\subseteq\phi(F)$, ossia se $y\in Y$ è tale che esiste $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in F tale per cui $\phi(x_n)\xrightarrow{Y} y$ allora $y\in\phi(F)$: infatti ϕ propria implica che $\exists\, x_{n_k}\xrightarrow{X} x\in\bar{F}=F$, ed ora ϕ continua implica che $\phi(x_{n_k})\xrightarrow{Y}\phi(x)=y$ necessariamente. Siano infine K compatto di Y e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\phi^{-1}(K)$: allora $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione convergente in $\phi^{-1}(K)$; infatti ϕ continua implica che $\phi^{-1}(K)$ è chiuso in A e quindi $\underset{(ip.)}{\text{in}}$ X, inoltre il fatto che $(\phi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ abbia una sottosuccessione convergente (in K) e che ϕ sia propria implicano che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abbia una sottosuccessione convergente in $\overline{\phi^{-1}(K)}=\phi^{-1}(K)$. □]

Siano $\underset{(M)}{N}\in\mathbb{N}$, $\underset{(M)}{N}\geq 1$, e $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ aperto $\neq\emptyset$ dove è definita $\phi:\Omega\to\mathbb{R}^M$ di classe C^1 su tutto Ω : un punto $x\in\Omega$ è un "punto critico" per ϕ se $d\phi(x):\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^M$ non è suriettivo, ossia se $\mathrm{ran}(D_\phi(x))<M$ $\left(\text{dove } (D_\phi(x))_{i,j}=\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}(x) \ \ {\scriptstyle (i=1,\dots,M,\ j=1,\dots,N)}\right)$; quindi

sia "Z_ϕ" il sottoinsieme di Ω costituito dai punti critici per ϕ : se $N<M$, allora $Z_\phi = \Omega$, mentre se $M \le N$ allora Z_ϕ è un chiuso di Ω. I punti di $\phi(Z_\phi)$ sono i "valori critici" di ϕ, mentre quelli di $\mathbb{R}^M \setminus \phi(Z_\phi)$ sono i "valori regolari" per ϕ (che stiano in $\phi(\Omega)$ o meno).

Volendoci interessare dapprima ai valori regolari per ϕ, restringiamoci alla situazione $M=N$ e $\phi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ di classe C^1 su Ω e continua su tutto $\overline{\Omega}$, in modo che certamente siano vere le seguenti condizioni:

(a) Z_ϕ è un chiuso di $\mathbb{R}^N$ (così come $\partial\Omega$);

(TEOREMA DI INVERSIONE LOCALE)

(b) $x \in Z_\phi$ se, e solo se, $\partial\phi(x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ non è un isomorfismo, $\Rightarrow$ per ogni $y \in \phi(\Omega) \setminus \phi(Z_\phi)$ in quanto $y = \phi(x)$ con $x \in \Omega \setminus Z_\phi$, esistono un intorno aperto $U_x \subseteq \Omega$ di x ed un intorno aperto $V_x \subseteq \phi(\Omega)$ di $y = \phi(x)$ tali che $\phi_x = \phi|_{U_x}$ sia un diffeomorfismo tra U_x e V_x (e, in particolare, ogni $y \in \phi(\Omega) \setminus \phi(Z_\phi)$ è interno a $\phi(\Omega)$);

(c) se ϕ fosse anche propria, allora $\phi(Z_\phi)$ e $\phi(\partial\Omega)$ sarebbero chiusi di $\mathbb{R}^N$ ed inoltre ϕ sarebbe propria per compatti.

$\boxed{\text{OSS.}}$ (da (b)) Per ogni $y \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(Z_\phi \cup \partial\Omega)$, $\phi^{-1}(y)$ è costituito da punti isolati.

<u>Teorema</u> (numero delle controimmagini): $N \in \mathbb{N}$, $N \ge 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto $\ne \emptyset$, $\phi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ di classe C^1 su Ω e continua e propria su tutto $\overline{\Omega}$ $\Rightarrow$

(1) $\forall y \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(Z_\phi \cup \partial\Omega)$, $\phi^{-1}(y)$ è finito;

(2) $\forall y \in \phi(\Omega) \setminus \phi(Z_\phi \cup \partial\Omega)$, posto $\phi^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_K\}$ con $K \in \mathbb{N}$, $K \ge 1$, esistono intorni aperti $U_i \subseteq \Omega$ di x_i e $V \subseteq \phi(\Omega)$ di y, $i = 1, \dots, K$, tali che

- (•) gli U_i siano tra loro disgiunti,
- (•) $\phi_i = \phi|_{U_i}$ sia un diffeomorfismo tra U_i e V,
- (•) $\phi^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{K} U_i$;

(3) il numero $\#\phi^{-1}(y)$ è costante per ogni y di una medesima componente connessa (aperta!) dell'aperto $\mathbb{R}^N \setminus \phi(Z_\phi \cup \partial\Omega)$, cioè l'applicazione "$\#\phi^{-1}$" : $\mathbb{R}^N \setminus \phi(Z_\phi \cup \partial\Omega) \to \mathbb{N}$, $y \mapsto \#\phi^{-1}(y)$ è continua.

(1) Per ogni $y \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(Z_\phi \cup \partial\Omega)$, sappiamo già che $\phi^{-1}(y)$ è costituito da punti isolati; ma ora ϕ è propria per costrutto. ✓

(2) Per ogni $y \in \phi(\Omega) \setminus \phi(Z_\phi \cup \partial\Omega)$, se $\phi^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$) con tutti gli $x_i \in \Omega \setminus Z_\phi$, $i = 1, \dots, k$, allora esistono intorni aperti $U_{x_i} \subseteq \Omega$ di x_i e $V_{x_i} \subseteq \phi(\Omega)$ di y tali che $\phi_{x_i} := \phi|_{U_{x_i}}$ sia un diffeomorfismo tra U_{x_i} e V_{x_i}. Potendo ovviamente supporre gli U_{x_i} tra loro disgiunti, per avere la tesi basta dimostrare che esiste un intorno aperto $V (\subseteq \phi(\Omega))$ di y tale che $V \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}$ e tale che $\phi^{-1}(V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}$, per porre quindi $U_i := U_{x_i} \cap \phi^{-1}(V)$, $i = 1, \dots, k$.
In altri termini, basta dimostrare che per ogni $y' \in \mathbb{R}^N$ "abbastanza vicino" a y è $\phi^{-1}(y') \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}$, e ciò discende ovvio perché altrimenti $\exists\, (y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $\bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}$ tale che $y_m \xrightarrow{\mathbb{R}^N} y$ e $y_m = \phi(x'_m)$ con $(x'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $\overline{\Omega} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}\right)$ (che è un chiuso), $\overset{(\phi \text{ propria})}{\Rightarrow} \exists\, x'_{m_h} \xrightarrow{\mathbb{R}^N} x \in \overline{\Omega} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}\right) \overset{(\phi \text{ continua})}{\Rightarrow} \phi(x) = y$ che è assurdo.

(3) Visto anche che $\phi(\overline{\Omega})$ è chiuso in $\mathbb{R}^N$, è ormai chiaro che per ogni $y \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(Z_\phi \cup \partial\Omega)$ esiste un intorno aperto V ($\subseteq \mathbb{R}^N \setminus \phi(Z_\phi \cup \partial\Omega)$) di y sul quale $\#\phi^{-1}$ sia costante, $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$, $(\#\phi^{-1})^{-1}(k)$ è un aperto di $\mathbb{R}^N \setminus \phi(Z_\phi \cup \partial\Omega)$ ovvero è pure chiuso. $\square$

(COROLLARIO) (un primo risultato di analisi globale!) Siano $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, e $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ di classe C^1 su $\mathbb{R}^N$ avente solo un numero finito di punti critici: allora ϕ propria $\Rightarrow$ ϕ suriettiva (cioè $\phi(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^N$).

Visto che ϕ è propria, grazie al teorema precedente l'applicazione $\#\phi^{-1} : \mathbb{R}^N \setminus \phi(Z_\phi) \to \mathbb{N}$, $y \mapsto \#\phi^{-1}(y)$ è costante sulle componenti connesse di $\mathbb{R}^N \setminus \phi(Z_\phi)$; ma $\#\phi(Z_\phi) \leq \#Z_\phi < \infty$ e $N \geq 2$, per cui $\mathbb{R}^N \setminus \phi(Z_\phi)$ è connesso e dunque $\#\phi^{-1}(y)$ è costante per ogni $y \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(Z_\phi)$: adesso tale $\#\phi^{-1}(y)$ è $\neq 0$, in quanto altrimenti sarebbe $\underbrace{\phi(\mathbb{R}^N)}_{(\text{connesso} \neq \emptyset \text{ di } \mathbb{R}^N)} = \phi(Z_\phi) \Rightarrow \#\phi(Z_\phi) = 1$, cioè $\#\phi(\mathbb{R}^N) = 1$ e ϕ sarebbe costante. $\square$

Volendoci ora interessare ai valori critici di ϕ, studiamo un risultato fondamentale dovuto a Sard che dimostriamo in un caso particolare.

Lemma di Sard: $N,M\in\mathbb{N}$, $N,M\geq 1$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ aperto $\neq\emptyset$, $\phi:\Omega\to\mathbb{R}^M$ di classe C^k su Ω (dove $k\geq 1\vee(N-M+1)$) $\Rightarrow$ $\phi(Z_\phi)$ ha misura di Lebesgue nulla in $\mathbb{R}^M$ ($\Rightarrow$ i valori regolari per ϕ costituiscono un denso di $\mathbb{R}^M$).
(es.: $k=\infty$)

Dimostrazione del lemma nel caso $N\leq M$, e quindi per ϕ di classe C^1 su Ω.
Dato che Ω è un aperto $\neq\emptyset$ di $\mathbb{R}^N$, esiste $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ con $Q_m\subseteq\Omega$ "cubo" chiuso di $\mathbb{R}^N$ e tale che $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} Q_m=\Omega$, per cui $\operatorname{mis}(\phi(Z_\phi)) =$
$= \operatorname{mis}(\phi(Z_\phi\cap\bigcup_{m\in\mathbb{N}} Q_m)) = \operatorname{mis}(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \phi(Z_\phi\cap Q_m)) \overset{(\text{numm.})}{\leq} \sum_{m\in\mathbb{N}} \operatorname{mis}(\phi(Z_\phi\cap Q_m))$: per ottenere la tesi basta dunque provare che $\phi(Z_\phi\cap Q)$ ha misura di Lebesgue nulla quale che sia $Q\subseteq\Omega$ cubo chiuso (tale che $Z_\phi\cap Q\neq\emptyset$). Sia dunque $Q\subseteq\Omega$ un cubo chiuso di spigolo $l>0$, e quindi di diametro $l\sqrt{N}$, tale che esiste almeno un $x\in Z_\phi\cap Q$; siano dunque $X<\mathbb{R}^M$ avente $\dim X=M-1$ tale che $\partial\phi(x)(\mathbb{R}^N)\leq X$ e P_X, $P_{X^\perp}$ le proiezioni ortogonali di $\mathbb{R}^M$ in X, $X^\perp$ rispettivamente, per cui $P_X\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^M,X)$, $P_{X^\perp}\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^M,X^\perp)$ e hanno norma unitaria (e $P_{X^\perp}\circ\partial\phi(x)=0$). Ora Q è convesso, dunque $\forall x'\in Q$ e $\forall t\in[0,1]$ è $(1-t)x+tx'=x+t(x'-x)\in Q$, e inoltre $\phi\in C^1$ infatti $\frac{d}{dt}\phi(x+t(x'-x))=\partial\phi(x+t(x'-x))(x'-x)$, ovvero
$\phi(x')-\phi(x)=\int_0^1\partial\phi(x+t(x'-x))(x'-x)\,dt$: otteniamo di conseguenza che da una parte $|P_X(\phi(x')-\phi(x))| = \left|\int_0^1 P_X(\partial\phi(x+t(x'-x))(x'-x))\,dt\right| \leq \int_0^1\|\partial\phi(x+t(x'-x))\|\,|x'-x|\,dt \leq$
$\leq H_Q\, l\sqrt{N}$ se $H_Q:=\sup_{z\in Q}\|\partial\phi(z)\|$, mentre d'altra parte $|P_{X^\perp}(\phi(x')-\phi(x))| =$
$= \left|\int_0^1 P_{X^\perp}[(\partial\phi(x+t(x'-x))-\partial\phi(x))(x'-x)]\,dt\right| \leq \sigma_{Q,x}\, l\sqrt{N}$ se $\sigma_{Q,x}:=\sup_{z\in Q}\|\partial\phi(z)-\partial\phi(x)\|$

$\Rightarrow$ $\phi(Q)-\phi(x)\subseteq B^X_{H_Q l\sqrt{N}}\cdot I^{X^\perp}_{\sigma_{Q,x} l\sqrt{N}}$, $\Rightarrow$ $\operatorname{mis}(\phi(Q)) \overset{(\text{inv. trasl.})}{=} \operatorname{mis}(\phi(Q)-\phi(x)) \leq$

$$\leq \underbrace{\operatorname{mis}(B^X_{H_Q l\sqrt{N}})}_{=(H_Q l\sqrt{N})^{M-1}\cdot \underbrace{\operatorname{mis}(B^X_1)}_{=:\omega_{M-1}}}\cdot \underbrace{\operatorname{mis}(I^{X^\perp}_{\sigma_{Q,x} l\sqrt{N}})}_{=2\sigma_{Q,x} l\sqrt{N}} = \underbrace{2N^{\frac{M}{2}}\omega_{M-1}H_Q^{M-1}}_{=:C_Q}\sigma_{Q,x}\, l^M =: C_Q\,\sigma_{Q,x}\, l^M.$$

$\rightsquigarrow$ se $Q'\subseteq Q$, allora $C_{Q'}\leq C_Q$

Adesso, per ogni $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 1$, consideriamo la "reticolazione standard" di Q in cubetti chiusi di spigolo $\frac{l}{m}$ (e diametro $\frac{l}{m}\sqrt{N}$), per un totale di m^N, e indichiamo con "Q_i" il generico cubetto fra questi tale che esiste almeno un $x_i\in Z_\phi\cap Q_i$: allora per quanto appena calcolato, $\operatorname{mis}(\phi(Z_\phi \cap Q)) \leq \sum_i \operatorname{mis} \phi(Q_i) \leq \sum_i C_{Q_i} \sigma_{Q_i, x_i} \left(\frac{\ell}{m}\right)^M \leq$

$\leq C_Q \left(\frac{\ell}{m}\right)^M \sum_i^! \sigma_{Q_i, x_i}$; ove $\sigma_{Q_i, x_i} \doteq \sup_{z \in Q_i} \| \partial\phi(z) - \partial\phi(x_i) \|$ dipende solo da $|z - x_i|$

per (uniforme) continuità di $\partial\phi$ nel chiuso (quindi compatto) Q, per cui certamente $\sigma_{Q_i, x_i} \leq \sigma_m \doteq$

$\doteq \sup_{\substack{z, z' \in Q, \\ |z - z'| \leq \frac{\ell}{m}\sqrt{N}}} \| \partial\phi(z) - \partial\phi(z') \|$ per ogni i : segue $\operatorname{mis}(\phi(Z_\phi \cap Q)) \leq C_Q \left(\frac{\ell}{m}\right)^M \cdot m^N \sigma_m =$

$= C_Q \ell^M \sigma_m \frac{1}{m^{M-N}} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$ anche se $N = M$ in quanto $\sigma_m \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$. $\square$

Prima di affrontare un* ulteriore risultato di base, conviene ricordare un'estensione del teorema di inversione locale: se $N, M \in \mathbb{N}$ con $N, M \geq 1$ e se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ è un aperto $\neq \emptyset$ dove è definita $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^M$ di classe C^K su Ω, $K \in \overline{\mathbb{N}}$ con $K \geq 1$, e se $x_0 \in \Omega \setminus Z_\phi$ (per cui $M \leq N$), allora posto $y \doteq \phi(x_0)$ esiste un intorno aperto $U_x \subseteq \Omega$ di x tale che $\phi^{-1}(y) \cap U_x$ sia una "sottovarietà" C^K di $\mathbb{R}^N$ senza bordo la quale ammette in x_0 piano tangente $T_x \doteq \operatorname{Ker}(\partial\phi(x_0)) + x_0$, per cui $\phi^{-1}(y) \cap U_x$ ha dimensione $N - M$ in $\mathbb{R}^N$.

Poniamoci nel seguente contesto: siano dati $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto tale che $[0,1] \subseteq I$, $F : I \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ di classe C^K su $I \times \overline{\Omega}$, e $\phi_0, \phi_1 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ di classe C^K su $\overline{\Omega}$ date da $\phi_0(\cdot) \doteq F(0, \cdot)$, $\phi_1(\cdot) \doteq F(1, \cdot)$ (ossia ϕ_0 e ϕ_1 sono omotope grazie all'omotopia $F_{|[0,1] \times \overline{\Omega}}$); ricordiamo che una mappa è di classe C^K con $K \geq 1$ su un sottoinsieme non aperto di $\mathbb{R}^N$ se ammette un'estensione C^K ad un aperto di $\mathbb{R}^N$ il quale contenga il suddetto sottoinsieme non aperto.
Sia inoltre Ω limitato.

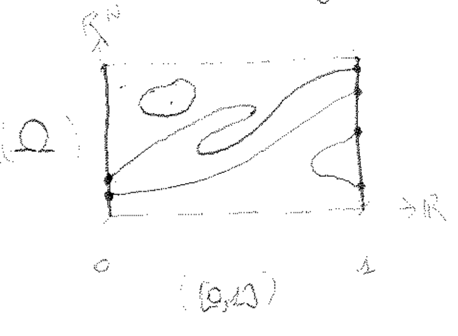
<u>Lemma</u>: per ogni $y \in F([0,1] \times \Omega) \setminus F(Z_F \cup (I \times \partial\Omega))$ tale che sia pure $y \notin (\phi_0(Z_{\phi_0}) \cup \phi_1(Z_{\phi_1}))$, è vero che

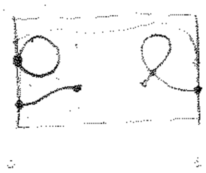
(a) $F^{-1}(y) \cap ([0,1] \times \Omega)$ è una sottovarietà C^K di $\mathbb{R}^{N+1}$ unidimensionale e compatta, e quindi costituita da un numero finito di componenti connesse (a cpt), il cui bordo

coincide con la sua intersezione con $[0,1]\times\Omega$, cioè con $F^{-1}(\eta)\cap([0,1]\times\Omega)$,
e questa inoltre non è "tangente" a $\{0\}\times\Omega$ stesso ;

b) per ogni componente connessa Γ di $F^{-1}(\eta)\cap([0,1]\times\Omega)$ che interseca $\{0\}\times\Omega$, esiste una curva di classe C^k e regolare $\alpha:[a,b]\to[0,1]\times\Omega$ ($a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$) tale che $\alpha([a,b])=\Gamma$, $\{\alpha(a),\alpha(b)\}=\Gamma\cap([0,1]\times\partial\Omega)$ e $\alpha'(a),\alpha'(b)\notin\{0\}\times\mathbb{R}^N$.

[Dato che $\eta\in F([0,1]\times\Omega)\setminus F(Z_F\cup([0,1]\times\partial\Omega))$, sappiamo già che $F^{-1}(\eta)$ è una sottovarietà C^k di $\mathbb{R}^{N+1}$ (senza bordo) unidimensionale e tale che, se $(t_0,x_0)\in([0,1]\times\Omega)\setminus Z_F$ ha $F(t_0,x_0)=\eta$, allora $F^{-1}(\eta)$ ammette in (t_0,x_0) piano tangente $\mathrm{Ker}(\partial F(t_0,x_0))$ (a meno di traslare per (t_0,x_0)) ; inoltre $F^{-1}(\eta)\cap([0,1]\times\Omega)$ è compatto perché è chiuso in $[0,1]\times\overline{\Omega}$ (e in effetti $F|_{[0,1]\times\overline{\Omega}}$ è continua e propria), quindi ricordando che una sottovarietà C^k di $\mathbb{R}^{N+1}$ unidimensionale connessa e compatta è diffeomorfa (con diffeo C^k) alla circonferenza se senza bordo, o all'intervallo compatto altrimenti, deduciamo che tutte le componenti connesse di $F^{-1}(\eta)$ sono "circonferenze" e che di conseguenza il bordo di $F^{-1}(\eta)\cap([0,1)\times\Omega)$, se c'è, deve essere $F^{-1}(\eta)\cap(\{0\}\times\Omega)$.
Per lo stesso motivo, avremo automaticamente (b) se dimostriamo che $F^{-1}(\eta)\cap(\{0\}\times\Omega)$ non è tangente a $\{0\}\times\Omega$ (prendendo un diffeomorfismo C^k α con l'intervallo compatto), ottenendo in definitiva un "aspetto" di $F^{-1}(\eta)\cap([0,1]\times\Omega)$ come il seguente :



(e NON come  !) .

Ebbene, se ad esempio $x_0\in\Omega$ tale che $\eta=F(0,x_0)=\phi_0(x_0)$, per cui $(0,x_0)\notin Z_F$ e $x_0\notin Z_{\phi_0}$: allora il piano tangente a $F^{-1}(\eta)$ in $(0,x_0)$ è $\mathrm{Ker}(\partial F(0,x_0))$ (a meno di un "$+(0,x_0)$"), e vogliamo dimostrare che $\mathrm{Ker}(\partial F(0,x_0))\cap(\{0\}\times\mathbb{R}^N)=0$.
Ora infatti, scrivendo $\mathrm{Ker}(\partial F(0,x_0))=\{(\tau,h)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \mid \partial F(0,x_0)(\tau,h)=0_{\mathbb{R}^N}\}=$
$=\{(\tau,h)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \mid \frac{\partial F}{\partial t}(0,x_0)\,\tau+\partial_x F(0,x_0)(h)=0\}$, se $(\tau,h)\in\mathrm{Ker}(\partial F(0,x_0))$ ha $\tau=0$, allora pure $h=0_{\mathbb{R}^N}$ in quanto $\tau=0\Rightarrow 0=\partial_x F(0,x_0)(h)=\partial\phi_0(x_0)(h)\Rightarrow h=0$. □]

Se dunque $N\in\mathbb{N}$, $N\geq 1$, e $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ aperto $\neq\emptyset$ e limitato dove è definita $\phi:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^N$ di classe C^k su $\overline{\Omega}$, $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 1$, allora ϕ è automaticamente propria e quindi risulta ben definita e continua l'applicazione

$$\#\phi^{-1}:\mathbb{R}^N\setminus\phi(Z_\phi\cup\partial\Omega)\to\mathbb{N} : \quad y\mapsto\#\phi^{-1}(y)$$

a maggior ragione è ben definita e continua l'applicazione "<u>grado modulo 2</u> (rispetto a ϕ su Ω)"

$$\deg_2(y,\phi,\Omega):\mathbb{R}^N\setminus\phi(Z_\phi\cup\partial\Omega)\to\{0,1\} \quad y\mapsto[\#\phi^{-1}(y)]_2$$

(nella prima variabile y).

Notiamo che $\deg_2(y,\phi,\Omega)\neq 0 \underset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow} y\in\phi(\Omega)$, e anzi y è interno a $\phi(\Omega)$.

[Infatti: $\mathbb{R}^N\setminus\phi(Z_\phi\cup\partial\Omega)$ è un aperto, per cui se $\rho>0$ è tale che $B_\rho^{\mathbb{R}^N}(y)\subseteq\mathbb{R}^N\setminus\phi(Z_\phi\cup\partial\Omega)$ allora $\deg_2(\cdot,\phi,\Omega)|_{B_\rho^{\mathbb{R}^N}(y)}\neq 0$, $\Rightarrow B_\rho^{\mathbb{R}^N}(y)\subseteq\phi(\Omega)$.]

La teoria del grado modulo 2 nasce proprio grazie al precedente lemma, dal quale ora riprendiamo le notazioni per ottenere il nostro primo risultato della teoria.

<u>Lemma fondamentale</u>: per ogni $y\in\mathbb{R}^N\setminus(F(Z_F\cup([0,1]\times\partial\Omega))\cup\phi_0(Z_{\phi_0})\cup\phi_1(Z_{\phi_1}))$,

$$\deg_2(y,\phi_0,\Omega)=\deg_2(y,\phi_1,\Omega).$$

[La tesi è $[\#\phi_0^{-1}(y)]_2=[\#\phi_1^{-1}(y)]_2$, per cui posso supporre $y\in F([0,1]\times\Omega)$ ed usare il precedente lemma in modo pressoché immediato una volta osservato che, se $V=F^{-1}(y)\cap([0,1]\times\Omega)$, allora $\phi_0^{-1}(y)=V\cap(\{0\}\times\Omega)$ e $\phi_1^{-1}(y)=V\cap(\{1\}\times\Omega)$: detto ciò, infatti, le parità o disparità di $\#\phi_0^{-1}(y)$ e $\#\phi_1^{-1}(y)$ dipende <u>solo</u> da quelle componenti connesse di V che intersecano $\{0,1\}\times\Omega$ in un punto di $\{0\}\times\Omega$ e in uno di $\{1\}\times\Omega$.] □

Teorema: se ϕ è di classe C^2 su $\overline{\Omega}$, allora per ogni $y_0,y_1\in\mathbb{R}^N\setminus\phi(Z_\phi\cup\partial\Omega)$ che appartengono alla medesima componente connessa dell'aperto $\mathbb{R}^N\setminus\phi(\partial\Omega)$, è

$$\deg_2(y_0,\phi,\Omega)=\deg_2(y_1,\phi,\Omega).$$

[Se è C la componente connessa di $\mathbb{R}^N\setminus\phi(\partial\Omega)$ tale che $y_0,y_1\in C$, allora C è aperto ed esiste una "poligonale" Π di estremi y_0 e y_1 tutta contenuta in C; gli altri vertici di Π sono comunque in numero finito, quindi grazie al lemma di Sard sono supposti anch'essi valori regolari per ϕ (che è C^1) e sono ovviamente supposti direttamente che π sia un segmento: precisamente sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto tale che $[0,1] \subseteq I$, e sia $\gamma : I \to C$ data da $\gamma(t) = (1-t)y_0 + t y_1$. In questo modo possiamo considerare $F : I \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ data da $F(t,x) = \phi(x) - \gamma(t)$ per cui F è di classe C^2 su $I \times \overline{\Omega}$ ed è omotopia fra $\phi_0(x) = \phi(x) - y_0$ e $\phi_1(x) = \phi(x) - y_1$; osserviamo subito che $\partial\phi_0 = \partial\phi_1 = \partial\phi$ e che $\phi_j^{-1}(0) = \phi^{-1}(y_j)$ (per $j = 0,1$), quindi $0 \notin \phi_j(Z_{\phi_j} \cup \partial\Omega)$ (per ipotesi su y_j) e $\deg_2(0, \phi_j, \Omega) = \deg_2(y_j, \phi, \Omega)$: per avere la tesi basterebbe così dimostrare che $0 \notin F(Z_F \cup ([0,1] \times \partial\Omega))$ ed usare il precedente lemma (fondamentale). Tuttavia, mentre $0 \notin F([0,1] \times \partial\Omega)$ (chiaro!) in quanto γ è a valori in $C \subseteq \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$, non è evidentemente detto che $0 \notin F(Z_F)$... Sia comunque $\rho > 0$ piccolo abbastanza affinché sia $B_\rho^{\mathbb{R}^N}(0) \subseteq \mathbb{R}^N \setminus (\phi_0(Z_{\phi_0}) \cup \phi_1(Z_{\phi_1}) \cup F([0,1] \times \partial\Omega))$, e sia per Sard $z \in B_\rho^{\mathbb{R}^N} \cap (\mathbb{R}^N \setminus F(Z_F))$ (F è C^2): allora $\deg_2(z, \phi_0, \Omega) = \deg_2(z, \phi_1, \Omega)$ (per il lemma fondamentale), mentre $\deg_2(z, \phi_j, \Omega) = \deg_2(0, \phi_j, \Omega)$ è per costanza. $\square$

$\Rightarrow$ Se in particolare ϕ è di classe C^∞ su $\overline{\Omega}$, allora possiamo estendere con costanza $\deg_2(\cdot, \phi, \Omega)$ a $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$ come segue: per ogni $y \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$, poniamo $\deg_2(y, \phi, \Omega) := \deg_2(y', \phi, \Omega)$ quale che sia $y' \in \mathbb{R}^N \setminus \underset{(\text{Sard})}{\phi(Z_\phi \cup \partial\Omega)}$ nella medesima componente connessa di y in $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$.

$\boxed{\text{OSS.}}$ Per ogni $y \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$, $\deg_2(y, \phi, \Omega) \neq 0 \Rightarrow y$ è interno a $\phi(\Omega)$.

Visto che $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$ è aperto, è sufficiente vedere che $y \in \phi(\Omega)$ (per costanza di $\deg_2$ in y); ma infatti, se per assurdo fosse $y \notin \phi(\overline{\Omega})$, ossia $y \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\overline{\Omega})$ che è aperto, allora esisterebbe $\rho > 0$ tale che $B_\rho^{\mathbb{R}^N}(y) \subseteq \mathbb{R}^N \setminus \phi(\overline{\Omega})$ ($\subseteq \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$): comunque preso un valore regolare y' per ϕ in $B_\rho^{\mathbb{R}^N}(y)$, sarebbe dunque $\deg_2(y, \phi, \Omega) = \deg_2(y', \phi, \Omega) \neq 0$, cioè $= 0$, che è contraddittorio. $\square$

Se $\phi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ è solo continua (o di classe C^1 su $\overline{\Omega}$) e se $y \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$, allora comunque è possibile definire "coerentemente" il "$\deg_2(y, \phi, \Omega)$" e lo vedremo subito cominciando con una semplice constatazione.

OSS.) Consideriamo lo spazio $C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ come munito della norma $\|\cdot\|_\infty$ della convergenza uniforme (nel compatto $\overline{\Omega}$ (è la com.)), fissiamo un $y \in \mathbb{R}^N$ e poniamo quindi

$\mathcal{U}_y \doteq \{\phi \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \mid y \notin \phi(\partial\Omega)\}$, considerando dunque una $\phi \in \mathcal{U}_y$: se $\rho > 0$ è tale che $B_\rho^{\mathbb{R}^N}(y) \subseteq \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$, allora $B_\rho^{C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)}(\phi) \subseteq \mathcal{U}_y$ (ed in particolare $\mathcal{U}_y$ è aperto in $C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$).

[Sapendo che, per ogni $y' \in \mathbb{R}^N$, $|y' - y| < \rho \Rightarrow y' \notin \phi(\partial\Omega)$, vogliamo dedurre che per ogni $\psi \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $\|\psi - \phi\|_\infty < \rho \Rightarrow \psi \in \mathcal{U}_y$ e cioè $y \notin \psi(\partial\Omega)$: ma infatti basta osservare che $\max_{x \in \partial\Omega} |\psi(x) - \phi(x)| \le \max_{x \in \overline{\Omega}} |\psi(x) - \phi(x)| \doteq \|\psi - \phi\|_\infty < \rho$. □]

Ricordando quindi che $C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \underset{\neq}{\le} C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, è ivi aperto e denso, possiamo dire che $\mathcal{U}_y^\infty \doteq \mathcal{U}_y \cap C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ è aperto e denso in $\mathcal{U}_y$.

Proposizione: per ogni $y \in \mathbb{R}^N$, e per ogni $\phi_0, \phi_1 \in \mathcal{U}_y^\infty$ che appartengono alla medesima componente connessa di $\mathcal{U}_y$, è $\deg_2(y, \phi_0, \Omega) = \deg_2(y, \phi_1, \Omega)$.

[Se C è la componente connessa di $\mathcal{U}_y$ tale che $\phi_0, \phi_1 \in C\ (\cap C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N))$, allora C è aperta ed esiste una poligonale di estremi ϕ_0 e ϕ_1 tutta contenuta in C; gli altri vertici di questa "spezzata" sono comunque in numero finito, quindi per densità di $\mathcal{U}_y^\infty$ in $\mathcal{U}_y$ li posso supporre anch'essi in $\mathcal{U}_y^\infty$ e posso ora supporre direttamente che la poligonale in questione sia un segmento: precisamente sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto tale che $[0,1] \subseteq I$, e sia $F : \overline{I} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ data da $F(t,x) = (1-t)\phi_0(x) + t\phi_1(x)$ tale che appunto $y \notin F(I \times \partial\Omega)$ (inoltre osserviamo che F è C^∞). Se ora $\rho > 0$ è tale che $B_\rho^{\mathbb{R}^N}(y) \subseteq \mathbb{R}^N \setminus (\cancel{\phi_0(Z_{\phi_0}) \cup \phi_1(Z_{\phi_1})}\ F(I \times \partial\Omega))$, e se $y' \in B_\rho^{\mathbb{R}^N}(y) \setminus (\phi_0(Z_{\phi_0}) \cup \phi_1(Z_{\phi_1}) \cup F(Z_F))$ (per Sard e Baire), allora per il lemma fondamentale $\deg_2(y', \phi_0, \Omega) = \deg_2(y', \phi_1, \Omega)$. □]

→ Per ogni $\phi \in C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$ e per ogni $y \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$, possiamo porre "$\deg_2(y,\phi,\Omega) := \deg_2(y,\psi,\Omega)$" quale che sia $\psi \in \mathcal{U}_y^\infty$ nella medesima componente connessa di ϕ in $\mathcal{U}_y$. Notiamo che dunque $\deg_2(y,\phi,\Omega)$ è continua nella seconda variabile $\phi \in \mathcal{U}_y$, e che in realtà resta continua pure in $y \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$. [Se $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$ e giacciono nella stessa componente connessa, allora $\phi \in \underbrace{\mathcal{U}_{y_0} \cap \mathcal{U}_{y_1}}_{\text{(aperto)}}$ e so scegliere $\psi \in \mathcal{U}^\infty_{y_0} \cap \mathcal{U}^\infty_{y_1}$ che appartiene pure alla medesima componente connessa di ϕ in $\mathcal{U}_{y_0} \cap \mathcal{U}_{y_1}$ (e che è abbastanza vicina a ϕ affinché [illegible] $\mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial\Omega)$...)*; infine $\deg_2(y_0,\psi,\Omega) = \deg_2(y_1,\psi,\Omega)$ per continuità. □]

OSS. Per ogni $\phi \in C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$ e $y \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$, $\deg_2(y,\phi,\Omega) \neq 0 \Rightarrow y \in \overset{\circ}{\phi}(\Omega)$.

[Basta vedere che $y \in \phi(\overline{\Omega})$, e se infatti fosse che $\exists \rho > 0$ con $B_\rho^{\mathbb{R}^N}(y) \subseteq \mathbb{R}^N \setminus \phi(\overline{\Omega})$ $(\subseteq \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega))$ allora avremmo $B_\rho^{C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)}(\phi) \subseteq \mathcal{U}_y$ (come già visto): presa quindi una $\psi \in B_\rho^{C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)}(\phi) \cap C^\infty(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$, avremmo per definizione $\deg_2(y,\phi,\Omega) = \deg_2(y,\psi,\Omega)$ e contemporaneamente che $y \notin \psi(\overline{\Omega})$. □]

Esploriamo altre proprietà fondamentali di $\deg_2$.

I $\phi \in C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$, $y \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$ $\left(\text{ossia } 0_{\mathbb{R}^N} \notin \underbrace{(\phi(\partial\Omega) - y)}_{= (\phi - y)(\partial\Omega)}\right)$ $\Rightarrow \deg_2(y,\phi,\Omega) = \deg_2(0,\phi - y,\Omega)$.

[Sia $\rho > 0$ tale che $(B_\rho^{\mathbb{R}^N}(y) \subseteq)\ B_{2\rho}^{\mathbb{R}^N}(y) \subseteq \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$, e quindi tale che $(B_\rho^{C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)}(\phi) \subseteq)\ B_{2\rho}^{C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)}(\phi) \subseteq \mathcal{U}_y$, e sia $\psi \in B_\rho^{C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)}(\phi) \cap C^\infty(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$: in particolare $\psi \in B_{2\rho}^{C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)}(\phi)$ e quindi $B_\rho^{\mathbb{R}^N}(y) \subseteq \mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial\Omega)$ $(\forall x \in \partial\Omega,\ |y - \psi(x)| \geq |y - \phi(x)| - |\phi(x) - \psi(x)| > 2\rho - \rho = \rho)$; preso allora (per Sard) un valore regolare y' per ψ in $B_\rho^{\mathbb{R}^N}(y)$, abbiamo $\deg_2(y,\phi,\Omega) = \deg_2(y',\psi,\Omega) = \deg_2(0,\psi - y',\Omega)$ in modo evidente: non resta che dimostrare $\deg_2(0,\psi - y',\Omega) = \deg_2(0,\phi - y,\Omega)$. Ma infatti semplicemente $B_{2\rho}^{\mathbb{R}^N} \subseteq \mathbb{R}^N \setminus (\phi(\partial\Omega) - y)$, per cui ed allora $B_{2\rho}^{C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)}(\phi - y) \subseteq \mathcal{U}_0$, e in effetti $\|(\psi - y') - (\phi - y)\|_\infty^{(\partial\Omega \dots)} < 2\rho$. □]

II ("invarianza per omotopie") $\phi_0, \phi_1 \in C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$ omotope grazie a $F : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ continua, $y \in \mathbb{R}^N \setminus F([0,1] \times \partial\Omega)$ $\Rightarrow \deg_2(y,\phi_0,\Omega) = \deg_2(y,\phi_1,\Omega)$.

(*) (1) $B_\rho(y) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial\Omega) \Rightarrow B_\rho(\phi) \subseteq \mathcal{U}_y$.

[$\forall \psi \in C^0(\bar\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\|\psi - \phi\|_\infty < \rho \Rightarrow y \notin \psi(\partial\Omega)$: infatti, $\forall \bar{x} \in \partial\Omega$,

$|\psi(\bar x) - \phi(\bar x)| \le \max_{x \in \partial\Omega} |\psi(x) - \phi(x)| \le \|\psi - \phi\|_\infty < \rho$, dunque non può

essere $\psi(\bar x) = y$. □]

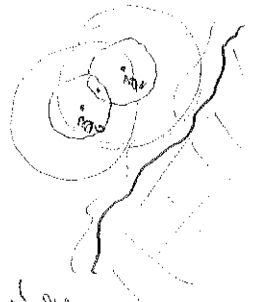
(2) $B_{2\rho}(y) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial\Omega) \Rightarrow \forall \psi \in \underset{(C^0\bar\Omega)}{B_\rho(\phi)}$, $\overline{B_\rho(y)} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \underset{(C^0\bar\Omega)}{\psi(\partial\Omega)}$.

[~~...~~ $\forall x \in \partial\Omega$, è $|y^* - \psi(x)| \ge$

$\ge \underbrace{|y^* - \phi(x)|}_{\ge 2\rho} - \underbrace{|\phi(x) - \psi(x)|}_{> -\rho} > \rho$. □]

(3) $\forall y_0, y_1 \in$ stessa c.c. C di $\mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial\Omega)$, $\deg(y_0, \phi, \Omega) = \deg(y_1, \phi, \Omega)$.

[Esiste una poligonale di estremi y_0 e y_1 insieme ad un intorno aperto tutto contenuto in C ; posso supporre che tale poligonale sia un segmento, e che anzi y_0 e y_1 siano vicini abbastanza affinché esistano $\rho_0, \rho_1 > 0$ tali che
$$\begin{cases} B_{\rho_0}(y_0) \cap B_{\rho_1}(y_1) \neq \emptyset \\ B_{2\rho_0}(y_0) \cup B_{2\rho_1}(y_1) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial\Omega) \end{cases}$$



$\Rightarrow$ preso $\psi \in C^\infty(\bar\Omega, \mathbb{R}^n) \cap B_{\rho_0}(\phi) \cap B_{\rho_1}(\phi)$ (per cui ψ è in $\mathcal{U}^\infty_{y_0} \cap \mathcal{U}^\infty_{y_1}$ e nella stessa c.c. di ϕ in $\mathcal{U}_{y_0} \cap \mathcal{U}_{y_1}$) , poiché per def. $\deg(y_i, \phi, \Omega) \doteq \deg(y_i, \psi, \Omega)$, ho osservato che infine $B_{\rho_0}(y_0) \cap B_{\rho_1}(y_1) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \psi(\partial\Omega)$, concludo per costanza.]
($\exists$ ∦ ! ?)

Oss: $\omega \in \Omega$ e $\omega \notin \overline{\Omega} \Rightarrow \omega \notin \partial\Omega$!!

[Per ipotesi $[0,1] \to \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $t \mapsto F(t,\cdot)$ è un cammino continuo in $\mathcal{Y}_y$ di estremi ϕ_0 e ϕ_1, che pertanto appartengono alla medesima componente connessa di $\mathcal{Y}_y$. □]

$\boxed{\text{III}}$ Il grado modulo 2 dipende solo dai valori al bordo: $\phi_0, \phi_1 \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ aventi $\phi_0|_{\partial\Omega} = \phi_1|_{\partial\Omega}$, $y \in \mathbb{R}^N \setminus \phi_i(\partial\Omega) \Rightarrow \deg_2(y, \phi_0, \Omega) = \deg_2(y, \phi_1, \Omega)$.

[$F : [0,1]\times\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$, $F(t,x) := (1-t)\phi_0(x) + t\phi_1(x)$, è un'omotopia tra ϕ_0 e ϕ_1 tale che $y \notin F([0,1]\times\partial\Omega)$. □]

IV $F : [0,1]\times\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ omotopia tra ϕ_0, ϕ_1, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^N \setminus F([0,1]\times\partial\Omega)$ $\mathcal{C}^0$ $\Rightarrow$ $\deg_2(\gamma(0), \phi_0, \Omega) = \deg_2(\gamma(1), \phi_1, \Omega)$.

[$H : [0,1]\times\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$, $H(t,x) := F(t,x) - \gamma(t)$, è un'omotopia tra $\phi_0 - \gamma(0)$ e $\phi_1 - \gamma(1)$ tale che $0 \notin H([0,1]\times\partial\Omega)$, $\overset{(\text{II})}{\Rightarrow} \deg_2(0, \phi_0-\gamma(0), \Omega) = \deg_2(0, \phi_1 - \gamma(1), \Omega)$, ed infine $\deg_2(0, \phi_i - \gamma(i), \Omega) = \deg_2(\gamma(i), \phi_i, \Omega)$ per (I). □]

(sempre Ω limitato)

Primo teorema "globale" (importante): $\phi \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tale che $\phi|_{\partial\Omega} = I_{\partial\Omega}$ che $\phi(\Omega) \supseteq \Omega$. ($\Rightarrow$ $\partial\Omega$ non è retratto di $\overline{\Omega}$ [ossia $\nexists\, r : \overline{\Omega} \to \partial\Omega$ continua tale che $r|_{\partial\Omega} = I_{\partial\Omega}$, e infatti altrimenti $\partial\Omega \supseteq \Omega$.])

[ϕ ed $I_{\overline{\Omega}}$ hanno per ipotesi $\phi|_{\partial\Omega} = (I_{\overline{\Omega}})|_{\partial\Omega}$, e inoltre ogni $y \in \Omega$ è tale che $y \notin \partial\Omega = \phi(\partial\Omega)$, $\overset{(\text{III})}{\Rightarrow} \deg_2(y, \phi, \Omega) = \deg_2(y, I_{\overline{\Omega}}, \Omega)$, $= 1$ $(\neq 0)$. □]

(COROLLARIO) Teorema (del punto fisso di Brouwer): se $K \subseteq \mathbb{R}^N$ è un compatto omeomorfo alla palla chiusa in $\mathbb{R}^N$, allora ogni $\phi \in \mathcal{C}^0(K,K)$ ammette un punto fisso.

[Introduciamo anzitutto le notazioni $D^N := \overline{B_1^{\mathbb{R}^N}}$ (e $S^{N-1} := \partial B_1^{\mathbb{R}^N}$ $(= \partial D^N)$): possiamo allora supporre che $K = D^N$, perché comunque se esistono omeomorfismi $D^N \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} K$ allora

$f^{-1}\circ\Phi\circ f \in \mathcal{C}^0(D^N,D^N)$ ammetterebbe $x\in D^N$ tale che $(f^{-1}\circ\Phi\circ f)(x)=x$, cioè tale che $\Phi(f(x))=f(x)$. Sia per ciò $\phi\in\mathcal{C}^0(D^N,D^N)$, e supponiamo per assurdo che $\phi(x)\neq x$ per ogni $x\in D^N$: allora potremmo definire $\tilde\Phi: D^N\to\partial D^N$ ponendo $\tilde\Phi(x)\doteq\dfrac{x-\phi(x)}{|x-\phi(x)|}$ $(\forall x\in D^N)$, ottenendo anche che $\tilde\Phi$ è continua; dico ora che esiste pure $t: D^N\to[0,\infty)$ continua tale che $\psi: D^N\to\mathbb{R}^N$, $\psi(x)\doteq x+t(x)\tilde\Phi(x)$ (continua) abbia $\psi(D^N)\subseteq S^{N-1}$ e $\psi|_{S^{N-1}}=I_{S^{N-1}}$ {il che è assurdo perché ψ sarebbe una retrazione di D^N su ∂D^N!}: infatti $t(x)\in\mathbb{R}_+$ è tale che, per cominciare, $|x+t(x)\tilde\Phi(x)|=1 \iff t^2(x)\overbrace{|\tilde\Phi(x)|^2}^{1}+2t(x)x\cdot\tilde\Phi(x)+|x|^2=1 \overset{(t(x)\geq 0)}{\iff}$ $t(x)\doteq -x\cdot\tilde\Phi(x)+\sqrt{(x\cdot\tilde\Phi(x))^2+1-|x|^2}$, e inoltre in effetti $|x|=1\Rightarrow t(x)=0$. □

Dimostrazione alternativa ($K=D^N$): $F:[0,1]\times D^N\to\mathbb{R}^N$, $F(t,x)\doteq x-t\phi(x)$, è una omotopia fra I_{D^N} e $I_{D^N}-\phi$, ed ha $|F(t,x)|=|x-t\phi(x)|\geq|x|-t|\phi(x)|$ $\Rightarrow\forall x\in\partial D^N(=S^{N-1})$, $|F(t,x)|\geq 1-t$, $\Rightarrow\forall x\in\partial D^N$ e $\forall t\in[0,1)$, $F(t,x)\neq 0$, cioè $0\notin F([0,1)\times\partial D^N)$. Se fosse anche $0\notin F(\{1\}\times\partial D^N)$, allora (per invar. om.) $\deg_2(0,I_{D^N}-\phi,\mathring{D}^N)=\deg_2(0,I_{D^N},\mathring{D}^N)=1\ (\neq 0)$ e avrei la tesi (e che anzi il punto fisso è in $\mathring{D}^N$); se invece $\exists x\in\partial D^N$ tale che $0=F(1,x)=x-\phi(x)$, allora avrei direttamente $x=\phi(x)$. □

(Cor.) $\Rightarrow$ Teorema: se $K\subseteq\mathbb{R}^N$ è un compatto che sia un retratto di $\mathbb{R}^N$ (ad esempio K convesso), allora ogni $\phi\in\mathcal{C}^0(K,K)$ ammette un punto fisso.

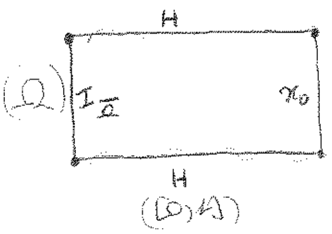
[Sia $R>0$ tale che $K\subsetneq B_R^{\mathbb{R}^N}$, e sia $r:\mathbb{R}^N\to K$ continua con $r|_K=I_K$: allora $\psi:=\phi(r)|_{\overline{B_R^{\mathbb{R}^N}}}\in\mathcal{C}^0(\overline{B_R^{\mathbb{R}^N}},K)$ $(\subseteq\mathcal{C}^0(\overline{B_R^{\mathbb{R}^N}},\overline{B_R^{\mathbb{R}^N}}))$, $\overset{(\text{Brouwer})}{\Rightarrow}$ esiste $x\in\overline{B_R^{\mathbb{R}^N}}$ tale che $x=\psi(x)=\phi(r(x))$; ma ϕ è a valori in K, dunque in realtà $x\in K$ e quindi $r(x)=x$, $\Rightarrow x=\phi(x)$. □]

Teorema (estensione teorema di Brouwer): se $K\subseteq\mathbb{R}^N$ è un compatto contrattile che sia retratto di un suo intorno aperto, allora ogni $\phi\in\mathcal{C}^0(K,K)$ ammette un punto fisso.

[Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato tale che $K \subsetneq U$, e sia $r : \overline{U} \to K$ continua con $r|_K = I_K$, e consideriamo $x_0 \in K$ tale che ci sia $F : [0,1] \times K \to K$ continua avente $F(0,x) = x$ e $F(1,x) = x_0$ $(\forall x \in K)$, ovvero tale che F sia un'omotopia fra I_K e l'applicazione costante $K \to K$, $x \mapsto x_0$. Possiamo così considerare $H : [0,1] \times \overline{U} \to \mathbb{R}^n$, $H(t,x) := F(t, \phi(r(x))) - x$, omotopia fra $\phi(r(x)) - x$ e $x_0 - x$ tale che $0 \notin H([0,1] \times \partial U)$ (in quanto F è a valori in $K \subset U$), $\overset{\text{(inv. om.)}}{\Rightarrow}$ $\deg_2(0, \phi(r) - I_{\overline{U}}, U) = \deg_2(0, x_0 - I_{\overline{U}}, U) = 1$, $\Rightarrow \exists x \in U$ tale che $0 = \phi(r(x)) - x$, ossia tale che $x = \phi(r(x))$; ma ϕ è a valori in K, quindi necessariamente $x \in K$ e quindi inoltre $r(x) = x$. □]

Teorema: per ogni $p \in \Omega$, $\partial\Omega$ non è contrattile in $\mathbb{R}^N \setminus \{p\}$ (e in particolare non è contrattile in sé).

[Se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e se $H : [0,1] \times \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ è un'omotopia fra $I_{\partial\Omega}$ e la costante x_0 (su $\partial\Omega$), allora $\Omega \subseteq H([0,1] \times \partial\Omega)$ sarebbe la tesi. Allora infatti, se per assurdo esistesse $p_0 \in \Omega$ tale che $p_0 \notin H([0,1] \times \partial\Omega)$, per cui fra l'altro $p_0 \neq x_0$, allora, considerata la mappa continua $([0,1] \times \partial\Omega) \cup (\{0\} \times \overline{\Omega}) \cup (\{1\} \times \overline{\Omega}) \to \mathbb{R}^n$ (definita dunque su un chiuso di $\mathbb{R}^n$) come in figura

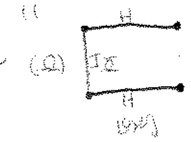


potremmo costruire (per Tietze) $F : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ continua tale che estenda la precedente, ossia tale che sia un'omotopia fra $I_{\overline{\Omega}}$ e x_0 con $F|_{[0,1] \times \partial\Omega} = H$: seguirebbe $p_0 \notin F([0,1] \times \partial\Omega)$ e quindi (inv. om.) l'assurdo $\underbrace{\deg_2(p_0, I_{\overline{\Omega}}, \Omega)}_{(1=)} = \underbrace{\deg_2(p_0, x_0, \Omega)}_{(=0)}$. □]

Teorema: se $H:[0,1]\times\partial\Omega\to\partial\Omega$ continua con $H(0,\cdot)=I_{\partial\Omega}(\cdot)$, e se $\partial\Omega \subseteq \partial\overline{\Omega}$ $(=\partial(\mathbb{R}^N\setminus\overline{\Omega}))$, allora $\partial\Omega\subseteq H(\{1\}\times\partial\Omega)$.
(ossia $H(1,\cdot)$ è surgettiva)

($\Rightarrow$ Ogni $\phi\in C^0(\partial\overline{\Omega},\partial\overline{\Omega})$ che sia omotopa e $I_{\partial\overline{\Omega}}$ è suriettiva.)

[Anzitutto, $\partial A := \overline{A}\setminus\mathring{A}$ implica $\partial\overline{\Omega} = \overline{\Omega}\setminus(\mathring{\overline{\Omega}}) \subseteq \overline{\Omega}\setminus\Omega = \partial\Omega$ $(\Omega\subseteq\mathring{\overline{\Omega}})$, mentre il viceversa è effettivamente falso in generale; ove segue (ove che $\partial\Omega\underset{(=)}{\subseteq}\partial\overline{\Omega}$ $\iff \mathring{\overline{\Omega}}\subseteq\Omega$, cioè $\Omega = \mathring{\overline{\Omega}}$, $\Rightarrow \underbrace{\partial\overline{\Omega}}_{(=\partial\Omega)} = \partial(\mathring{\overline{\Omega}})$ $(=\partial(\overline{\mathring{\overline{\Omega}}}))$.

Se per assurdo $\exists\, x_0\in\partial\Omega\setminus \underset{(\partial\Omega)}{H(\{1\}\times\partial\Omega)}$, allora sia $\rho>0$ tale che $B^{\mathbb{R}^N}_\rho(x_0)\subseteq \mathbb{R}^N\setminus H(\{1\}\times\partial\Omega)$, e siano $y\in\Omega\cap B_\rho^{\mathbb{R}^N}(x_0)$ e $y'\in(\mathbb{R}^N\setminus\overline{\Omega})\cap B_\rho^{\mathbb{R}^N}(x_0)$; considerato quindi "", esiste (per Tietze) $F:[0,1]\times\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^N$ continua tale che $F(0,\cdot)=I_{\overline{\Omega}}(\cdot)$ e $F|_{[0,1]\times\partial\Omega}=H$, per cui $y,y'\notin\partial\Omega$ sono tali che $y,y'\notin H([0,1]\times\partial\Omega) = \underset{(\subseteq\partial\Omega)}{F([0,1]\times\partial\Omega)}$ $\overset{(\text{inv. omot.})}{\underset{(1:)}{\Rightarrow}}$ $\deg_2(y, I_{\overline{\Omega}},\Omega) = \deg_2(y, F(1,\cdot),\Omega)$, ~~$\overset{(\mp)}{=}\deg_2(y',H(1,\cdot),\Omega)$~~ $=\deg_2(y',F(1,\cdot),\Omega) = \underset{(=0)}{\deg_2(y', I_{\overline{\Omega}},\Omega)}$ in quanto y,y' stanno nella medesima componente connessa di $\mathbb{R}^N\setminus F(1,\cdot)(\partial\Omega) = \mathbb{R}^N\setminus H(\{1\}\times\partial\Omega)$, e ciò dà l'assurdo. □]

EX. (il caso delle sfere): sono equivalenti (e vere) le condizioni seguenti

(a) S^{N-1} non è retratto di D^N,

(b) ogni $\phi\in C^0(D^N,D^N)$ ammette un punto fisso, e

(c) S^{N-1} non è contrattile in sé.

[Vediamo precisamente che (b) $\iff$ (a) $\iff$ (c). (a)$\Rightarrow$(b): già dimostrato. ((b)$\Rightarrow$(a): se per assurdo $\exists\,\pi:D^N\to S^{N-1}$ continua tale che $\pi|_{S^{N-1}}=I_{S^{N-1}}$, allora $-\pi\in C^0(D^N,D^N)$ non avrebbe alcun punto fisso. ((a)$\Rightarrow$(c): se per assurdo $\exists\, x_0\in S^{N-1}$ ed $\exists\, H:[0,1]\times S^{N-1}\to S^{N-1}$ omotopia che $I_{S^{N-1}}$ e la costante x_0 (su S^{N-1}), allora potremmo definire $\pi:D^N\to S^{N-1}$ ponendo $\begin{cases}\pi(x)=H(1-|x|,\frac{x}{|x|}) & \text{se } x\in D^N\setminus\{0\}\\ \pi(0)=x_0\end{cases}$, ottenendo (pure che

r è continua con, per ogni $x \in S^{n-1}$, $r(x) = H(0,x) = x$. ((c)⇒(a)) : se per assurdo $\nexists\, r : D^n \to S^{n-1}$ continua tale che $r|_{S^{n-1}} = I_{S^{n-1}}$, allora potremmo definire $H : [0,1] \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ ponendo $H(t,x) = r((1-t)x)$, ottenendo così una omotopia tra $r|_{S^{n-1}} = I_{S^{n-1}}$ e la costante $r(0) \in S^{n-1}$. □]

In vista di un ultimo risultato (non banale) di analisi globale prima di rafforzare la nostra teoria del grado, si ricorda brevemente il seguente preambolo.

$\boxed{\text{OSS.}}$ Se $(X, |\cdot|)$ è uno spazio vettoriale reale normato e se $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X) = \{A : X \to X \mid A \text{ è lineare e continua}\}$, allora $(\mathcal{L}(X), \|\cdot\|)$ è sp. vett. reale normato con $\|A\| = \sup_{|x|=1} |A(x)| \left(= \sup_{x \neq 0} \frac{|A(x)|}{|x|} \right)$, ed è completo quando X è completo. Sia ora $Gl(X) = Gl(X,X) = \{A \in \mathcal{L}(X) \mid A \text{ è omeomorfismo}\} \subsetneq \mathcal{L}(X)$; ovviamente notato che, per $A \in Gl(X)$, $\|A^{-1}\| = \sup_{|x'|=1} |A^{-1}(x')| = \sup_{x' \neq 0} \frac{|A^{-1}(x')|}{|x'|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|x|}{|A(x)|}$. Inoltre, se X è completo allora

▷ $Gl(X)$ è aperto in $\mathcal{L}(X)$, in quanto più precisamente, per ogni $A \in Gl(X)$ e $B \in \mathcal{L}(X)$, se $\|B - A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ allora pure $B \in Gl(X)$.

[Posso supporre $A = I_X$, essendo $\|I_X\| = 1$, poiché così da $\|B(A^{-1}) - I_X\| = \|(B-A)(A^{-1})\| \leq \|B - A\| \|A^{-1}\| < 1$ dedurrei effettivamente che $B(A^{-1}) \in Gl(X)$, ed in particolare starebbe in $Gl(X)$ la sua composizione con A, $B(A^{-1}) \circ A = B$. (Nell'ipotesi dunque che sia $\|B - I_X\| < 1$, per cui $\sum_{k \in \mathbb{N}} \|B - I_X\|^k < \infty$, la successione $\left(\sum_{k=0}^{m} (-B + I_X)^k \right)_{m \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathcal{L}(X)$ e cioè così convergente $\left(\left\| \sum_{k=m}^{M} (B - I_X)^k \right\| \leq \sum_{k=m}^{M} \|(B - I_X)^k\| \leq \sum_{k=m}^{M} \|B - I_X\|^k \right.$ per ogni $m < M \Big)$, diciamo a $C \in \mathcal{L}(X)$: allora $-C(B) + C \overset{(*)}{=} C(-B + I_X) \overset{(*)}{=} C - I_X$, $= -B(C) + C$ per simmetria, da cui $B(C) = C(B) = I_X$. □]

<u>Teorema</u> : siano $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $A \in Gl(\mathbb{R}^n)$, e consideriamo le condizioni

(a) $\limsup_{|x| \to \infty} \frac{|\phi(x) - A(x)|}{|x|} < \|A^{-1}\|^{-1}$,

(b) $\limsup_{|x| \to \infty} \frac{|\phi(x) - A(x)|}{|A(x)|} < 1$,

(c) $\liminf_{|x| \to \infty} \frac{\phi(x) \cdot A(x)}{|A(x)|^2} > 0$,

(d) $\liminf_{|x| \to \infty} \phi(x) \cdot A(x) > -\infty$ e ϕ illimitata (cioè propria); allora è

(a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ ϕ suriettiva .

(a)$\Rightarrow$(b) : $\forall x\neq 0$, (cioè $A(x)\neq 0$) $\dfrac{|\phi(x)-A(x)|}{|A(x)|} = \dfrac{|\phi(x)-A(x)|}{|x|}\,\dfrac{|x|}{|A(x)|} \leq \dfrac{|\phi(x)-A(x)|}{|x|}\,\|A^{-1}\|$. ✓

(b)$\Rightarrow$(c) : $\phi(x)\cdot A(x) = [A(x)+(\phi(x)-A(x))]\cdot A(x) = |A(x)|^2 + (\phi(x)-A(x))\cdot A(x) \overset{(C.S.)}{\geq}$

$\geq |A(x)|^2 - |\phi(x)-A(x)|\,|A(x)|$, $\Rightarrow \forall x\neq 0$, $\dfrac{\phi(x)\cdot A(x)}{|A(x)|^2} \geq 1 - \dfrac{|\phi(x)-A(x)|}{|A(x)|}$. ✓

(c)$\Rightarrow$(d) : assumendo $\liminf_{|x|\to\infty} \dfrac{\phi(x)\cdot A(x)}{|A(x)|^2} > 0$ $(>-\infty)$, dunque se fosse $|\phi|\leq M$ per una $M>0$ allora $(x\neq 0)$ $\left|\dfrac{\phi(x)\cdot A(x)}{|A(x)|^2}\right| \leq \dfrac{M}{|A(x)|} \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$ e sarebbe $\liminf_{|x|\to\infty} \dfrac{\phi(x)\cdot A(x)}{|A(x)|^2} \leq 0$. ✓

(d)$\Rightarrow$ $\phi(\mathbb{R}^N)=\mathbb{R}^N$: $H:[0,1]\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$, $H(t,x) = (1-t)A(x)+t\phi(x)$, è un'omotopia tra A e ϕ tale che $|H(t,x)|^2 = (1-t)^2|A(x)|^2 + t^2|\phi(x)|^2 + 2t(1-t)A(x)\cdot\phi(x) \geq$

$\geq \min\{|A(x)|^2,|\phi(x)|^2\}\cdot[(1-t)^2+t^2] - 2t(1-t)(A(x)\cdot\phi(x))^-$; inoltre $(1-t)^2+t^2 =$

$= 2t^2-2t+1 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow t^2-t+\frac{1}{4} = (t-\frac{1}{2})^2 \geq 0$, ossia sempre , e ciò equivale pure a $-2t(1-t) \geq -\frac{1}{2}$, pertanto $|H(t,x)|^2 \geq \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\min\{|A(x)|^2,|\phi(x)|^2\}}_{\xrightarrow{|x|\to\infty}\ \infty} - \underbrace{(A(x)\cdot\phi(x))^-}_{\text{parte limitata}}\Big)$

$\Rightarrow$ H è illimitata (unif. t): per ogni punto $y\in\mathbb{R}^N$, esiste $R>0$ tale che per ogni $x\in\mathbb{R}^N$ con $|x|\geq R$ sia $|H(t,x)|>|y|$ $\forall t\in[0,1]$ e $\deg_2(y,A,B_R^{\mathbb{R}^N})=1$.

In conclusione $F:=H|_{[0,1]\times\overline{B_R^{\mathbb{R}^N}}} : [0,1]\times\overline{B_R^{\mathbb{R}^N}}\to\mathbb{R}^N$ è un'omotopia tra $A|_{\overline{B_R^{\mathbb{R}^N}}}$ e $\phi|_{\overline{B_R^{\mathbb{R}^N}}}$ tale che $y\notin F([0,1]\times\partial B_R^{\mathbb{R}^N})$, $\overset{\text{inv. om.}}{\Rightarrow}$ $\deg_2(y,\phi,B_R^{\mathbb{R}^N}) = \deg_2(y,A,B_R^{\mathbb{R}^N}) \neq 0$. □

Il rafforzamento dello strumento matematico "grado" sarà sensibile a quella che possiamo chiamare "l'orientazione dello spazio" e che iniziamo subito a studiare.

Siano per questo $N\in\mathbb{N}$ con $N\geq 1$ e X un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di $\dim X = N$ (eventualmente normato, ossia $X\cong\mathbb{R}^N$) : "una base ordinata di X" è una N-pla ordinata $\beta:=(b_1,\dots,b_N)\in X^N$ di vettori di X tale che $\{b_1,\dots,b_N\}$ sia una base di X , ed allora "la rappresentazione di X in $\mathbb{R}^N$ rispetto a β"

è l'isomorfismo $\pi\,(:=\pi_\beta) : X_\beta \to \mathbb{R}^N$ dato da $\pi(\sum_{i=1}^N x_i b_i) := (x_1,\dots,x_N)$ per ogni $(x_1,\dots,x_N)\in\mathbb{R}^N$, ossia quello determinato da $\pi(b_i) = e_i$ (cioè $b_i = \pi^{-1}(e_i)$) per ogni $i=1,\dots,N$ (se come sempre $(e_1,\dots,e_N)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^N$: $(e_i)_j = \delta_{ij}$ per ogni $i,j=1,\dots,N$).

Sia adesso $\beta' \equiv (b'_1,\dots,b'_N)$ una seconda base ordinata di X, e sia allora $\pi' := \pi_{\beta'}$ la rappresentazione di X in $\mathbb{R}^N$ rispetto a β' : per ogni $A : (X,\beta)\to(X,\beta')$ lineare, la matrice $N\times N$ "$\mathcal{A}\,(:=\mathcal{A}_A)$ associata a $\pi'\circ A\circ\pi^{-1} : \mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ rispetto alla base canonica" "rappresenta A rispetto alla coppia (β,β')" (oppure "rappresenta A rispetto a β" se $\beta'=\beta$); in altre parole, $\mathcal{A}$ è quella matrice $N\times N$ che reca sulla j-esima colonna le coordinate scalari, rispetto alla "base di arrivo" (canonica), dell'immagine tramite $\pi'\circ A\circ\pi^{-1}$ del j-esimo vettore della "base di partenza" (canonica), per $j=1,\dots,N$: precisamente, se $A = \sum_{i=1}^N A_i b'_i$ con $A_i : (X,\beta)\to\mathbb{R}$ lineari, allora

$$\mathcal{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} \pi'(A(b_1)) & \cdots & \pi'(A(b_N)) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} A_1(b_1) & & A_1(b_N) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ A_N(b_1) & & A_N(b_N) \end{array}\right].$$

$$\begin{tikzcd} (X,\beta) \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (X,\beta') \arrow[dl, "\pi'"] \\ & \mathbb{R}^N & \end{tikzcd}$$

Nel caso particolare che A sia un isomorfismo, cioè $A\in Gl(X)$, ha senso considerare la matrice $\mathcal{A}'$ che rappresenta A^{-1} rispetto alla coppia (β',β) : visto precisamente che $\mathcal{A}\leftrightarrow\pi'\circ A\circ\pi^{-1}$ e che $\mathcal{A}'\leftrightarrow\pi\circ A^{-1}\circ(\pi')^{-1}$, deduciamo che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ sono invertibili, l'una è l'inversa dell'altra, in particolare $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^{-1}$.

$\boxed{\text{OSS.}}$ Se $\mathcal{A}$ rappresenta A rispetto a β mentre $\mathcal{A}'$ rappresenta A rispetto a β', allora
$\det\mathcal{A} = \det\mathcal{A}'$.

[Dato che $\mathcal{A}\leftrightarrow\pi\circ A\circ\pi^{-1}$ mentre $\mathcal{A}'\leftrightarrow\pi'\circ A\circ(\pi')^{-1} = \pi'\circ(\pi^{-1}\circ\pi)\circ A\circ(\pi^{-1}\circ\pi)\circ(\pi')^{-1} = (\pi'\circ\pi^{-1})\circ(\pi\circ A\circ\pi^{-1})\circ(\pi'\circ\pi^{-1})^{-1}$, abbiamo la tesi (per Binet). ∎]

(COROLLARIO) Per $A : X\to X$ lineare, poniamo "$\det A$" $:\equiv \det\mathcal{A}$ quali che siano la base ordinata β di X fissata e la matrice $\mathcal{A}$ che rappresenta A rispetto a β.

Nel caso particolare che $\underset{(A^{-1})}{A\in Gl(X)}$, cioè che $\underset{(A^{-1})}{\det A\neq 0}$, è $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$, ed in tale caso diciamo che A "mantiene, risp. cambia, l'orientamento di X" se

$\det A > 0$, risp. $\det A < 0$ (cioè se così fa A^{-1}); diciamo allora che due basi ordinate β, β' di X hanno lo "stesso, risp. diverso, orientamento" se l'isomorfismo $B : (X,\beta) \to (X,\beta')$ determinato da $B(b_i) = b'_i$ (per ogni $i=1,\dots,N$) mantiene, risp. cambia, l'orientamento di X. In $\mathbb{R}^N$, inoltre, una base ordinata ha "orientamento positivo" se ha lo stesso orientamento della base canonica, altrimenti lo ha "negativo".

(OSS.) Gli elementi di $GL(X)$ che mantengono l'orientamento di X formano un sottogruppo di $(GL(X), \circ)$ stesso, con precisamente $\det I_X = \det I_N = 1$, e cioè la relazione tra basi ordinate di X di avere lo stesso orientamento è una relazione d'equivalenza.

Scopriamo alcune fondamentali proposizioni sull'argomento:

$\boxed{1}$ $\pi \circ B \circ \pi^{-1} = \pi \circ (\pi')^{-1} = \pi' \circ B \circ (\pi')^{-1}$, per cui $\det B = \det(\pi \circ (\pi')^{-1})$ e quindi β, β' hanno lo stesso orientamento se, e solo se, $\pi \circ (\pi')^{-1}$ mantiene l'orientamento di $\mathbb{R}^N$.

[Per ogni $(x_1,\dots,x_N) \in \mathbb{R}^N$, $B\left(\sum_{i=1}^{N} x_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{N} x_i b'_i$ e cioè $\pi = \pi' \circ B$, da cui

$$\pi \circ B \circ \pi^{-1} = \begin{cases} = \pi \circ B \circ (\pi' \circ B)^{-1} = \pi \circ (\pi')^{-1} \\ = (\pi' \circ B) \circ B \circ (\pi' \circ B)^{-1} = \pi' \circ B \circ (\pi')^{-1} \end{cases} \quad \square \;]$$

$\boxed{2}$ Se $A \in GL(X)$ e se β'' è un'ulteriore base ordinata di X, considerate la matrice $\mathcal{A}$ che rappresenta A rispetto alla coppia (β, β') e la matrice $\mathcal{A}'$ che rappresenta A rispetto alla coppia (β'', β'), allora $\det \mathcal{A}$ e $\det \mathcal{A}'$ hanno lo stesso segno se, e solo se, β e β'' hanno lo stesso orientamento. (Detto altrimenti(*), se $\mathcal{A}''$ è la matrice che rappresenta A rispetto alla coppia (β, β''), allora $\det \mathcal{A}$ e $\det \mathcal{A}''$ hanno lo stesso segno se, e solo se, β' e β'' hanno lo stesso orientamento.)

$$\begin{tikzcd} (X,\beta) \arrow[r, "A"] & (X,\beta') \\ (X,\beta'') \arrow[ur, "A"'] & \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} (X,\beta) \arrow[r, "A"] \arrow[d, "A"'] & (X,\beta') \\ (X,\beta'') & \end{tikzcd}$$

[(*) Da $\begin{tikzcd} (X,\beta') \arrow[r, "A^{-1}"] & (X,\beta) \\ (X,\beta'') \arrow[ur, "A^{-1}"'] & \end{tikzcd}$ otteniamo infatti che β', β'' hanno lo stesso orientamento se, e solo se, $\det(\mathcal{A}^{-1})$, $\det((\mathcal{A}'')^{-1})$ hanno lo stesso segno.]

[Se π'' è la rappresentazione di X in $\mathbb{R}^N$ rispetto a β'', allora basta osservare che $\pi'\circ A\circ\pi^{-1}$ e $\pi'\circ A\circ(\pi'')^{-1}$ sono tali che $\pi'\circ A\circ(\pi'')^{-1} = (\pi'\circ A\circ\pi^{-1})\circ(\pi\circ(\pi'')^{-1})$ ed usare il punto precedente. □]

$\boxed{3}$ $\det A$ e $\det\mathcal{A}$ hanno lo stesso segno se, e solo se, β e β' hanno lo stesso orientamento.

[Usiamo la prima (seconda) parte del punto precedente con $\beta'' = \beta'$ (β). □]

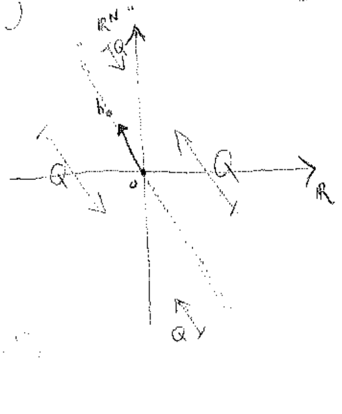
$\boxed{4}$ Se $\beta : [a,b] \to X^N$ è continua e tale che, per ogni $t\in[a,b]$, $\beta(t) \doteq (\beta_1(t),\dots,\beta_N(t))$ sia una base ordinata di X ($a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$), allora $\beta(a)$ e $\beta(b)$ hanno lo stesso orientamento.

[Per ogni $t\in[a,b]$, sia $B_t : X\to X$ l'isomorfismo determinato da $B_t(\beta_i(a)) = \beta_i(t)$ (per ogni $i=1,\dots,N$) (quindi in particolare $B_a = I_X$, mentre B_b "manda" $\beta(a)$ in $\beta(b)$), e sia inoltre π la rappresentazione di X in $\mathbb{R}^N$ rispetto a $\beta(a)$: allora la matrice $\mathcal{A}_t$ che rappresenta B_t rispetto a $\beta(a)$ è

$$\mathcal{A}_t = \left[\pi(B_t(\beta_1(a))) \,\Big|\, \dots \,\Big|\, \pi(B_t(\beta_N(a)))\right] = \left[\pi(\beta_1(t)) \,\Big|\, \dots \,\Big|\, \pi(\beta_N(t))\right],$$

per cui ovviamente la funzione $[a,b]\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $t\mapsto \det B_t \doteq \det\mathcal{A}_t$ è continua; segue che quindi $\det B_b > 0$ visto pure che $\det(B_a) = 1 > 0$. □]

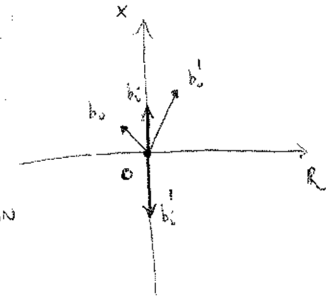
$\boxed{5}$ Se $(b_0,b_1,\dots,b_N)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ con $b_0\notin\{0\}\times\mathbb{R}^N$, e se $Q : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \{0\}\times\mathbb{R}^N$ è la proiezione avente $\operatorname{Ker} Q = \langle b_0\rangle$, allora $(b_0,b_1,\dots,b_N)$ e $(b_0,Q(b_1),\dots,Q(b_N))$ hanno lo stesso orientamento.



[Grazie al punto precedente, se $\beta : [0,1]\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)^N$ è data da $\beta(t) \doteq (b_0, (1-t)b_1 + tQ(b_1), \dots, (1-t)b_N + tQ(b_N))$, allora basta scoprire che $\beta(t)$ sia una base ordinata di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ (per ogni $t\in[0,1]$); ciò viene infatti molto facile, per ogni

$(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_N)\in\mathbb{R}^{N+1}$, dalle identità $Q\left(\lambda_0 b_0+\sum_{i=1}^{N}[(1-t)b_i+tQ(b_i)]\lambda_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i Q(b_i)$ deduciamo che $\lambda_0 b_0+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i[(1-t)b_i+tQ(b_i)]=0 \Rightarrow Q\left(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i b_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i Q(b_i)=0$, cioè che $\sum_{i=1}^{N}\lambda_i b_i\in\langle b_0\rangle$ e cioè $\lambda_1=\dots=\lambda_N=0$: allora pure $\lambda_0=0$. □]

$\boxed{6}$ Se $(b_0,b_1,\dots,b_N)$ e $(b_0',b_1',\dots,b_N')$ sono basi ordinate di $\mathbb{R}\times X$ aventi lo stesso orientamento e tali che $(b_1,\dots,b_N)$ e $(b_1',\dots,b_N')$ siano basi ordinate di $\{0\}\times X$, e se $P:\mathbb{R}\times X\to\mathbb{R}$ è la proiezione sul primo fattore, allora $(b_1,\dots,b_N)$ e $(b_1',\dots,b_N')$ hanno lo stesso orientamento se, e solo se, $P(b_0)$ e $P(b_0')$ hanno lo stesso segno.



[Consideriamo l'isomorfismo $A:\mathbb{R}\times X\to\mathbb{R}\times X$ determinato da $A(b_i)=b_i'$ per ogni $i=0,1,\dots,N$, e siano precisamente $(a_{i,j})_{i,j=0,1,\dots,N}$ tali che $A(b_i)=b_i'=\sum_{j=0}^{N}a_{i,j}b_j$; in particolare è $b_0'=\sum_{j=0}^{N}a_{0,j}b_j$, per cui $P(b_0')=a_{0,0}P(b_0)$ in quanto $P(b_k)=0$ per ogni $k=1,\dots,N$.
La matrice che rappresenta A rispetto a $(b_0,b_1,\dots,b_N)$ è dunque

$$\begin{bmatrix} a_{0,0} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{0,1} & a_{1,1} & \cdots & a_{N,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{0,N} & a_{1,N} & \cdots & a_{N,N} \end{bmatrix}$$

, dove chiaramente la matrice minore $N\times N$ in basso a destra è la matrice che rappresenta l'isomorfismo $B:\{0\}\times X\to\{0\}\times X$, $B(b_k)=b_k'$ per ogni $k=1,\dots,N$, rispetto a $(b_1,\dots,b_N)$: allora possiamo scrivere che

$$0 \overset{(ip.)}{<} \det A \overset{(6.)}{=} a_{0,0}\cdot\det B$$

, da cui la tesi è facile. □]

NOTA: se $T:\{0\}\times X\to X$ è la proiezione (o isomorfismo), allora $(b_1,\dots,b_N)$ e $(b_1',\dots,b_N')$ hanno lo stesso orientamento (di $\{0\}\times X$) se, e solo se, $(T(b_1),\dots,T(b_N))$ e $(T(b_1'),\dots,T(b_N'))$ hanno lo stesso orientamento (di X) semplicemente perché hanno lo stesso isomorfismo di trasformazione!

L'ultimo risultato che c'interessa dell'argomento è meno elementare dei precedenti e necessita un'altra nomenclatura.

Lemma ("la base al guinzaglio"): se $\sigma:[a,b]\to\mathbb{R}^{N+1}\setminus\{0\}$ è una curva di classe $\mathcal{C}^k$, $k\in\mathbb{N}$ con $k\geq 1$ (e $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$), e se $z_1,\dots,z_N\in\mathbb{R}^{N+1}(\setminus\{0\})$ sono tali che $(\sigma(a),z_1,\dots,z_N)$ sia una base ordinata di $\mathbb{R}^{N+1}$, allora esistono N curve di classe $\mathcal{C}^k$ $\beta_i:[a,b]\to\mathbb{R}^{N+1}\setminus\{0\}$, $i=1,\dots,N$, tali che

(a) $\beta_i(a)=z_i$ per ogni $i=1,\dots,N$, e

(b) $(\sigma(t),\beta_1(t),\dots,\beta_N(t))$ sia una base ordinata di $\mathbb{R}^{N+1}$ per ogni $t\in[a,b]$ (avente lo stesso orientamento di $(\sigma(a),\beta_1(a),\dots,\beta_N(a))$)$_{[\boxtimes]}$.

[Grazie alle ipotesi su σ, l'applicazione $A:[a,b]\times\mathbb{R}^{N+1}\to\mathbb{R}^{N+1}$, $A(t,x):=\left(x\cdot\frac{\sigma(t)}{|\sigma(t)|^2}\right)\sigma'(t)$, è (globalmente) continua ed anzi di classe $\mathcal{C}^{k-1}$, essendo fra l'altro lineare in x, per cui, per ogni $z_0\in\mathbb{R}^{N+1}$, il problema di Cauchy "$U'=A(t,U)$, $U(a)=z_0$" ammette una ed una sola soluzione $S(t,z_0)$ definita per ogni $t\in[a,b]$ e di classe $\mathcal{C}^k$ su $[a,b]$; in particolare $S(a,z_0)=z_0$, e, per definizione di A è $S(t,\sigma(a))=\sigma(t)$. Allora, per ogni $t\in[a,b]$, $S(t,\cdot):\mathbb{R}^{N+1}\to\mathbb{R}^{N+1}$ è lineare e pure iniettiva, ovvero è un isomorfismo (e cioè manda basi in basi): concludiamo quindi ponendo semplicemente $\beta_i(t):=S(t,z_i)$ per ogni $i=1,\dots,N$ e per ogni $t\in[a,b]$. $\square$]

Se $N\in\mathbb{N}$, $N\geq 1$, e $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ aperto $\neq\emptyset$ limitato dove è definita $\phi\in\mathcal{C}^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$, allora risulta ben definita e costante l'applicazione $\#\phi^{-1}:\mathbb{R}^N\setminus\phi(Z_\phi\cup\partial\Omega)\to\mathbb{N}$, $y\mapsto\#\phi^{-1}(y)$, quindi è ben definita pure l'applicazione "grado (di Brouwer) rispetto a ϕ su Ω"
$$\deg(y,\phi,\Omega):\mathbb{R}^N\setminus\phi(Z_\phi\cup\partial\Omega)\to\mathbb{Z},\quad \deg(y,\phi,\Omega):=\begin{cases}0 & \text{se } y\notin\phi(\Omega)\\ \sum_{\substack{x\in\Omega,\\ x\in\phi^{-1}(y)}}\operatorname{sign}(J_\phi(x)) & \text{altrimenti}\end{cases}$$
(dove $J_\phi(x):=\det\mathcal{D}_\phi(x)$), ed in realtà è pure costante (nella prima variabile y).

[Se $y\notin\phi(\Omega)$, allora $y\in\mathbb{R}^N\setminus\phi(Z_\phi\cup\overline{\Omega})$ ed $\exists\,\rho>0$ tale che $B_\rho^{\mathbb{R}^N}(y)\subseteq\mathbb{R}^N\setminus\phi(Z_\phi\cup\overline{\Omega})$, dove per definizione $\deg(\cdot,\phi,\Omega)|_{B_\rho^{\mathbb{R}^N}(y)}=0$: in altri termini, se $y\notin\phi(\Omega)$ "vicino di poco" allora il suo grado (assoluto) non cambia. Alle pure se $y\in\phi(\Omega)\setminus\phi(Z_\phi\cup\partial\Omega)$

sono di fase allora il suo grado non cambia, perché come sappiamo sono di fase anche $\phi^{-1}(n)$. $\square$]

Torniamo finalmente al contesto del lemma dell'omotopia $F \in C^k(I\times\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tra ϕ_0 e ϕ_1, ponendo $F \doteq (F_1,\dots,F_N)$, e sia direttamente $k=\infty$.

Lemma: se $\alpha:[a,b]\to (I\times\Omega)\setminus Z_F$ è una curva di classe C^∞ e regolare ($a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$) tale che $F\circ\alpha$ sia costante su $[a,b]$, e se $z_1,\dots,z_N \in (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$ sono tali che $(\alpha'(a), z_1,\dots,z_N)$ sia una base ordinata di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$, allora

(a) esistono $z_1',\dots,z_N' \in (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$ tali che $(\alpha'(b), z_1',\dots,z_N')$ sia una base ordinata di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ avente lo stesso orientamento di $(\alpha'(a), z_1,\dots,z_N)$, e tali che le due matrici $N\times N$ $[F_i'(\alpha(a))(z_j)]_{i,j=1,\dots,N}$ e $[F_i'(\alpha(b))(z_j')]_{i,j=1,\dots,N}$ abbiano determinante non nullo e dello stesso segno;

(b) nel caso fosse $\alpha'(b)\notin\{0\}\times\mathbb{R}^N$, tali z_j' potrebbero essere presi in $\{0\}\times\mathbb{R}^N$.

[Cominciamo osservando che la matrice $[F_i'(\alpha(a))(z_j)]_{i,j=1,\dots,N}$ è quella che rappresenta $\partial F(\alpha(a))\big|_{\langle z_1,\dots,z_N\rangle}$ rispetto a $\{z_1,\dots,z_N\}$ in partenza (di $\langle z_1,\dots,z_N\rangle$) e alla base canonica (di $\mathbb{R}^N$) in arrivo, così come la matrice $[F_i'(\alpha(b))(z_j')]_{i,j=1,\dots,N}$ sarebbe quella che rappresenta $\partial F(\alpha(b))\big|_{\langle z_1',\dots,z_N'\rangle}$ rispetto a $\{z_1',\dots,z_N'\}$ in partenza e alla base canonica in arrivo.

(a) Dato che $\alpha':[a,b]\to\mathbb{R}^{N+1}\setminus\{0\}$ è una curva di classe C^∞ tale che $(\alpha'(a),z_1,\dots,z_N)$ sia una base ordinata di $\mathbb{R}^{N+1}$, grazie alle "basi al guinzaglio" sappiamo esistere N curve $\beta_i\in C^\infty([a,b],\mathbb{R}^{N+1}\setminus\{0\})$, $i=1,\dots,N$, tali che $\beta_i(a)=z_i$ per ogni $i=1,\dots,N$ e tali che $(\alpha'(t),\beta_1(t),\dots,\beta_N(t))$ sia una base ordinata di $\mathbb{R}^{N+1}$ per ogni $t\in[a,b]$ (avente lo stesso orientamento di $(\alpha'(a),\beta_1(a),\dots,\beta_N(a))$): poniamo $z_i'=\beta_i(b)$ per ogni $i=1,\dots,N$, e dimostriamo le tesi riguardanti le due matrici delle derivate. Allo infatti, dato pure che la curva $F(\alpha)$ è costante e che $\alpha(t)\notin Z_F$ per ogni $t\in[a,b]$, delle matrici $N\times(N+1)$ dipendenti da $t\in[a,b]$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_1'(\alpha(t))(\alpha'(t)) \\ \vdots \\ F_N'(\alpha(t))(\alpha'(t)) \end{bmatrix}}_{\left(\frac{\partial}{\partial t}F(\alpha(t)) = 0\right)} \begin{bmatrix} F_1'(\alpha(t))(\beta_1(t)) & \dots & F_1'(\alpha(t))(\beta_N(t)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_N'(\alpha(t))(\beta_1(t)) & \dots & F_N'(\alpha(t))(\beta_N(t)) \end{bmatrix}$$

sappiamo certamente che hanno rango massimo N (avendo supposto $\alpha(t) \notin Z_F$), cioè che $\det\left[F_i'(\alpha(t))(\beta_j(t))\right]_{i,j=1,\dots,N} \neq 0$ per ogni $t \in [a,b]$, per cui tali numeri sono tutti dello stesso segno per continuità. ✓

b) Se la base ordinata $(\alpha'(b), z_1', \dots, z_N')$ di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ avesse $\alpha'(b) \notin \{0\}\times\mathbb{R}^N$, allora (per (5)) avrebbe lo stesso orientamento di $(\alpha'(b), Q(z_1'), \dots, Q(z_N'))$, se $Q: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \{0\}\times\mathbb{R}^N$ è la proiezione avente $\operatorname{Ker} Q = \langle \alpha'(b) \rangle$: otteniamo dunque la tesi se dimostriamo che la matrice $\left[F_i'(\alpha(b))(Q(z_j'))\right]_{i,j=1,\dots,N}$ ha determinante non nullo e dello stesso segno di quello della matrice $\left[F_i'(\alpha(b))(z_j')\right]_{i,j=1,\dots,N}$. Ma infatti, di nuovo,

$$\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} F_1'(\alpha(b))\alpha'(b) \\ \vdots \\ F_N'(\alpha(b))\alpha'(b) \end{matrix}}_{=0} & \Bigg| \dots F_i'(\alpha(b))((1-t)z_j' + tQ(z_j')) \dots \end{bmatrix}$$

ha rango N, e cioè (per ogni $t \in [0,1]$)

$\det\left[F_i'(\alpha(b))((1-t)z_j' + tQ(z_j'))\right]_{i,j=1,\dots,N} \neq 0$ e sono tutti dello stesso segno. $\square$]

Teorema fondamentale: per ogni $y \in \mathbb{R}^N \setminus \left(F(Z_F \cup ([0,1]\times\partial\Omega)) \cup \Phi_0(Z_{\Phi_0}) \cup \Phi_1(Z_{\Phi_1})\right)$, $\deg(y, \Phi_0, \Omega) = \deg(y, \Phi_1, \Omega)$.

[Possiamo ovviamente supporre che $y \in F([0,1]\times\Omega)$, così la tesi diventa l'identità

$$\sum_{\substack{x \in \Omega, \\ x \in \Phi_0^{-1}(y)}} \operatorname{sign}(J_{\Phi_0}(x)) = \sum_{\substack{x' \in \Omega, \\ x' \in \Phi_1^{-1}(y)}} \operatorname{sign}(J_{\Phi_1}(x'))$$

; inoltre così siamo nelle ipotesi del lemma dell'omotopia F : sia allora $V := F^{-1}(y) \cap ([0,1]\times\Omega)$, per cui $\Phi_0^{-1}(y) = V \cap (\{0\}\times\Omega)$ e $\Phi_1^{-1}(y) = V \cap (\{1\}\times\Omega)$, e dimostriamo che ancora (per il valore del punto di y) contano solo quelle componenti connesse di V che intersecano $\{0,1\}\times\Omega$ in un punto di $\{0\}\times\Omega$ e in uno di $\{1\}\times\Omega$. Per cominciare, sia Γ una componente

cammino di V che interseca $\{0\}\times\Omega$ solo in $\{0\}\times\Omega$, per cui sia $\alpha\in C^\infty([a,b],[0,1]\times\Omega)$ regolare tale che $\alpha([a,b])=\Gamma$ (per cui $\alpha\notin Z_F$, e $F\circ\alpha\equiv\eta$), $\{\alpha(a),\alpha(b)\}\subseteq\{0\}\times\Omega$ con $\alpha(a)\neq\alpha(b)$, diciamo $\alpha(a)=(0,x_a)$ e $\alpha(b)=(0,x_b)$ con $x_a\neq x_b$ in $\Omega(\setminus Z_{\phi_0})$, e $\alpha'(a),\alpha'(b)\notin\{0\}\times\mathbb{R}^N$: dimostriamo allora che $\mathrm{sign}(J_{\phi_0}(x_a))+\mathrm{sign}(J_{\phi_0}(x_b))=0$.
Se infatti $z_i:=(0,e_i)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ per ogni $i=1,\dots,N$, dove $(e_1,\dots,e_N)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^N$, allora sicuramente $(\alpha'(a),z_1,\dots,z_N)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ ($\alpha'(a)\notin\{0\}\times\mathbb{R}^N$)

(come prima) $\Rightarrow$ esistono $z_i'=(0,e_i')\in\{0\}\times\mathbb{R}^N$ per ogni $i=1,\dots,N$ tali che $(\alpha'(b),z_1',\dots,z_N')$ sia una base ordinata di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ avente lo stesso orientamento di $(\alpha'(a),z_1,\dots,z_N)$ e tali che le due matrici $[F_i'(\alpha(a))(z_j)]_{i,j=1,\dots,N}$ e $[F_i'(\alpha(b))(z_j')]_{i,j=1,\dots,N}$ abbiano determinante non nullo e dello stesso segno; ma essendo la prima matrice è esattamente $D_{\phi_0}(x_a)$, dunque di determinante $J_{\phi_0}(x_a)$, mentre la seconda matrice è quella che rappresenta $D\phi_0(x_b)$ rispetto alla base $(e_1',\dots,e_N')$ in partenza e alla base canonica in arrivo): basta quindi ricavare che questa matrice ha determinante di segno opposto a $J_{\phi_0}(x_b)$, e cioè ((6)) che $(e_1',\dots,e_N')$ ha orientamento negativo. Ma ciò è vero (per (6)), in quanto se $P:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ è la proiezione sul primo fattore allora $P(\alpha'(a))$ e $P(\alpha'(b))$ hanno segni opposti per com'è fatto Γ. Resta inoltre chiaro che sarebbe tutto analogo nel caso Γ intersechi $\{0\}\times\Omega$ solo in $\{1\}\times\Omega$, per cui possiamo infine supporre che Γ sia una componente cammino di V tale che $\Gamma=\alpha([a,b])$ essendo $\alpha:[a,b]\to[0,1]\times\Omega$ di classe C^∞ e regolare avente $\alpha(a)=(0,x_a)\in\{0\}\times\Omega(\setminus Z_{\phi_0})$ e $\alpha(b)=(1,x_b)\in\{1\}\times\Omega(\setminus Z_{\phi_1})$, ad esempio, e $\alpha'(a),\alpha'(b)\notin\{0\}\times\mathbb{R}^N$, per dimostrare che $\mathrm{sign}(J_{\phi_0}(x_a))=\mathrm{sign}(J_{\phi_1}(x_b))$.
Se infatti z_i e z_i' sono come prima, $i=1,\dots,N$, allora $[F_i'(\alpha(b))(z_j')]_{i,j=1,\dots,N}$ è la matrice che rappresenta $D\phi_1(x_b)$ rispetto alla base $(e_1',\dots,e_N')$ in partenza e quella canonica in arrivo, quindi ha determinante di segno identico a quello di $D_{\phi_1}(x_b)$ in quanto $(e_1',\dots,e_N')$ ha ora orientamento positivo, essendo ora $P(\alpha'(a))$ e $P(\alpha'(b))$ dello stesso segno. $\square$]

Ricordando a questo punto che la teoria del grado modulo 2 che avevo costruito fondamentalmente la costruzione e potevo analogamente da un "lemma fondamentale" analogo al precedente, ricorrendo al più a teoremi generali come quello di Sard, più che dalle sue definizioni di per sé, possiamo esser sicuri nell'affermare quanto segue:

− $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(Z_\phi \cup \partial\Omega)$ appartenenti alla medesima componente connessa di $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \deg(y_0, \phi, \Omega) = \deg(y_1, \phi, \Omega)$.

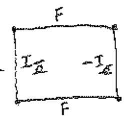
$\xrightarrow{\text{(Sard)}}$ Per ogni $y \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$, poniamo $\deg(y, \phi, \Omega) := \deg(y', \phi, \Omega)$ quale che sia $y' \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(Z_\phi \cup \partial\Omega)$ nella medesima componente connessa di y in $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$ (estendendo così con continuità $\deg(\cdot, \phi, \Omega)$ a $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$).

− $y \in \mathbb{R}^N$, $\phi_0, \phi_1 \in \mathcal{Y}_y^\infty$ appartenenti alla medesima componente connessa di $\mathcal{Y}_y$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \deg(y, \phi_0, \Omega) = \deg(y, \phi_1, \Omega)$.

$\Rightarrow$ Per ogni $\phi \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $y \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$, poniamo $\deg(y, \phi, \Omega) := \deg(y, \psi, \Omega)$ quale che sia $\psi \in \mathcal{Y}_y^\infty$ nella medesima componente connessa di ϕ in $\mathcal{Y}_y$ (ottenendo che $\deg(y, \phi, \Omega)$ è costante nella seconda variabile $\phi \in \mathcal{Y}_y$, e che resta costante in $y \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$).

Per "deg" valgono così pure le cinque proprietà basilari trovate in precedenza, molto prima dei primi teoremi globali dimostrati (che a maggior ragione potevano esser ottenuti col nuovo deg, in quanto tra l'altro, ad esempio, $\deg(y, I_{\overline{\Omega}}, \Omega) = 1 \neq 0$ per ogni $y \in \Omega$).

$\boxed{\text{EX}}$ $F : [0,1] \times \partial\Omega \to \mathbb{R}^N$ omotopia tra $I_{\partial\Omega}$ e $-I_{\partial\Omega}$, N dispari $\Rightarrow F([0,1] \times \partial\Omega) \supseteq$
$\supseteq \overline{\Omega} \cup (-\overline{\Omega})$.

[Basta ricavare che $F([0,1] \times \partial\Omega) \supseteq \Omega \cup (-\Omega)$; considerata per questo $\overline{\Omega}$ 

, sia (per Tietze) $\overline{F} : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ omotopia tra $I_{\overline{\Omega}}$ e $-I_{\overline{\Omega}}$ tale che $\overline{F}|_{[0,1] \times \partial\Omega} = F$: se per assurdo esistesse $p_0 \in (\Omega \cup (-\Omega)) \setminus F([0,1] \times \partial\Omega) = (\Omega \cup (-\Omega)) \setminus \overline{F}([0,1] \times \partial\Omega)$, allora (per inv. omotopica) otterremmo che

$$\underbrace{\deg(p_0, I_{\overline{\Omega}}, \Omega)}_{\begin{cases} 1 & \text{se } p_0 \in \Omega \\ 0 & \text{se } p_0 \in (-\Omega) \setminus \Omega \end{cases}} = \underbrace{\deg(p_0, -I_{\overline{\Omega}}, \Omega)}_{\begin{cases} 0 & \text{se } p_0 \in \Omega \setminus (-\Omega) \\ -1 & \text{se } p_0 \in -\Omega \end{cases}}$$

□]

Teorema: se Ω è "di classe C^1" esiste $\nu \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ un campo esteso a tutto $\overline{\Omega}$ di quello delle normali esterne a Ω in $\partial\Omega$, tale che $\deg(0,\nu,\Omega) \neq 0$, e se N è dispari, allora per ogni $\phi \in C^0(\partial\Omega, \mathbb{R}^N)$ esistono $x \in \partial\Omega$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\phi(x) = \lambda \nu(x)$.

[$F : [0,\pi] \times \partial\Omega \to \mathbb{R}^N$, $F(t,x) = \nu(x)\cos(t) + \phi(x)\sin(t)$, è un'omotopia fra ν e $-\nu$ su $\partial\Omega$, che possiamo estendere (per Tietze) ad un'omotopia $\overline{F} : [0,\pi] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ fra ν e $-\nu$ su $\overline{\Omega}$ tale che $\overline{F}|_{[0,\pi]\times\partial\Omega} = F$; ora, dato che N è dispari (e che $0 \notin \pm\nu(\partial\Omega)$), è $\deg(0,\nu,\Omega) = -\deg(0,-\nu,\Omega)$, ed è inoltre $\neq 0$ per ipotesi: dovremmo avere $\deg(0,\nu,\Omega) \neq \deg(0,-\nu,\Omega)$, e quindi necessariamente $0 \in \overline{F}([0,\pi]\times\partial\Omega) = F([0,\pi]\times\partial\Omega)$, cioè esistono $x \in \partial\Omega$ e $t \in [0,\pi]$ tale che $0 = F(t,x) = \nu(x)\cos(t) + \phi(x)\sin(t)$, ossia $\phi(x)\sin(t) = \nu(x)(-\cos(t))$. Potendo supporre $0 \notin \phi(\partial\Omega)$ (altrimenti prenderemmo $\lambda = 0$), e ricordando ancora che $0 \notin \nu(\partial\Omega)$ (oltre al fatto che cos e sin non si annullano mai contemporaneamente), segue subito che $\cos(t)$ e $\sin(t)$ sono $\neq 0$, da cui $\phi(x) = \left(\frac{-\cos(t)}{\sin(t)}\right)\nu(x)$. □]

(Cor.) ("autovalori non banali") $\phi \in C^0(S^{N-1}, \mathbb{R}^N)$, N dispari $\Rightarrow \exists\, x \in S^{N-1}$ ed $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\phi(x) = \lambda x$.
(Se in particolare $\phi \in C^0(S^{N-1}, S^{N-1})$, allora o $\phi(x) = x$ o $\phi(x) = -x$.)

[$B_1^{\mathbb{R}^N}$ ammette come campo esterno $I_{\overline{B_1^{\mathbb{R}^N}}}$, tale che $\deg(0, I_{\overline{B_1^{\mathbb{R}^N}}}, B_1^{\mathbb{R}^N}) = 1 \neq 0$. □]

(Cor.) ("non pettinabilità della sfera di peluche") Se N è dispari, allora non esiste $\phi \in C^0(S^{N-1}, \mathbb{R}^N)$ sempre $\neq 0$ e tale che $\phi(x) \cdot x = 0$ per ogni $x \in S^{N-1}$.

[Se esistesse, allora esisterebbe anche $x \in S^{N-1}$ (e $\lambda \in \mathbb{R}$) tale che $\phi(x) = \lambda x$, dunque tale che $\lambda |x|^2 = 0$, da cui però $\lambda = 0$. □]

Per ottenere degli ulteriori teoremi globali che c'interessano, dobbiamo sviluppare ulteriormente la teoria del grado.

<u>Teorema</u> (località e additività del grado): $\phi \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $\Omega_1, \dots, \Omega_k \subseteq \Omega$ aperti $\neq \emptyset$ disgiunti fra loro ($k \in \mathbb{N}, k \geq 1$), $y \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\overline{\Omega} \setminus (\bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i))$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \deg(y, \phi, \Omega) = \sum_{i=1}^{k} \deg(y, \phi, \Omega_i).$$

$\rightsquigarrow$ ("escisione"): $\phi \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $\Omega' \subseteq \Omega$ aperto $\neq \emptyset$, $y \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\overline{\Omega} \setminus \Omega')$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \deg(y, \phi, \Omega) = \deg(y, \phi, \Omega').$$

[Per convincercene, osserviamo che in effetti $y \notin (\phi(\partial\Omega) \cup \phi(\partial\Omega_1) \cup \dots \cup \phi(\partial\Omega_k))$, e che possiamo supporre $y \in \phi(\bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i)$, ossia che $\phi^{-1}(y) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i$. Possiamo anche supporre che ϕ sia di classe C^∞ su $\overline{\Omega}$, perché nel caso generale prendiamo $\rho > 0$ tale che $B_{2\rho}^{\mathbb{R}^N}(y) \subseteq \mathbb{R}^N \setminus \phi(\overline{\Omega} \setminus (\bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i))$ (dunque tale che $B_{2\rho}^{C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)}(\phi) \subseteq \mathcal{Y}_y$), e quindi pure $\psi \in B_\rho^{C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)}(\phi) \cap C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, tale che al solito $B_\rho^{\mathbb{R}^N}(y) \subseteq \mathbb{R}^N \setminus \psi(\overline{\Omega} \setminus (\bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i))$, ottenendo per definizione che $\deg(y, \phi, \Omega) = \deg(y, \psi, \Omega)$ e $\deg(y, \phi, \Omega_i) = \deg(y, \psi, \Omega_i)$ per ogni $i = 1, \dots, k$. Siano pertanto $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e (per Sard) y valore regolare per ϕ (in $\phi(\bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i)$), cosicché per definizione si ha $\deg(y, \phi, \Omega) \doteq \sum_{x \in \Omega, x \in \phi^{-1}(y)} \mathrm{sign}(J_\phi(x)) =$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in \Omega_i, x \in \phi^{-1}(y)} \mathrm{sign}(J_\phi(x)) =: \sum_{i=1}^{k} \deg(y, \phi, \Omega_i). \quad \circ \,]$$

OSS. Anche nel caso Ω fosse non limitato, ad ogni $\phi \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ potremmo associare il seguente concetto: per ogni $y_0 \in \phi(\Omega)$ tale che esiste $x_0 \in \Omega$ "<u>soluzione isolata</u> di $\phi(x) = y_0$, $x \in \Omega$" (cioè tale che $\phi(x_0) = y_0$, ed $\exists \rho_0 > 0$ tale che $B_{\rho_0}^{\mathbb{R}^N}(x_0) \subseteq \Omega$ e $\phi(x') \neq y_0$ per ogni $x' \in B_{\rho_0}^{\mathbb{R}^N}(x_0) \setminus \{x_0\}$), definiamo "<u>l'indice di ϕ in x_0</u>"

$$i(\phi, x_0) \doteq \lim_{\rho \downarrow 0} \deg(y_0, \phi, B_\rho^{\mathbb{R}^N}(x_0)) \quad (= \deg(y_0, \phi, B_{\rho_0}^{\mathbb{R}^N}(x_0)) \text{ per escisione}).$$

- $\odot$ ϕ di classe C^1 in x_0, $x_0 \notin Z_\phi$ $\overset{\text{(inv. loc.)}}{\Rightarrow}$ $i(\phi, x_0) = \mathrm{sign}(J_\phi(x_0))$.

- $\odot$ Se Ω è limitato, $\phi \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $y \in \phi(\Omega) \setminus \phi(\partial\Omega)$ tale che $\phi^{-1}(y)$ sia costituito da punti isolati (e cioè da un numero finito di punti), allora (per loc. e add.) è

$$\deg(y, \phi, \Omega) = \sum_{x \in \Omega, x \in \phi^{-1}(y)} i(\phi, x).$$

Il nostro prossimo obiettivo è il seguente risultato.

__Teorema di Borsuk "col grado"__: se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto $\neq \emptyset$ limitato è simmetrico rispetto all'origine e con $0 \in \Omega$, allora, per ogni $\phi \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ dispari su $\partial\Omega$ tale che $0 \notin \phi(\partial\Omega)$, $\deg(0, \phi, \Omega)$ è dispari (è $\neq 0$, e quindi $0 \in (\phi(\mathring{\Omega}))$).

(Osserviamo che sicuramente Ω 0-simmetrico $\Rightarrow$ $\overline{\Omega}$ 0-simmetrico $\Rightarrow$ $\partial\Omega$ 0-simmetrico!)

(Corollario) $\rightarrow$ Teorema di Borsuk-Ulam: se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto $\neq \emptyset$ limitato è simmetrico rispetto all'origine e con $0 \in \Omega$, e se $X \subsetneq \mathbb{R}^N$, allora, per ogni $\phi \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega, X)$, esiste $x \in \partial\Omega$ tale che $\phi(x) = \phi(-x)$.

[Per Tietze, sia $\Phi \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, X)$ un'estensione di ϕ, e sia $\psi(x) := \frac{1}{2}[\Phi(x) - \Phi(-x)]$ la "parte dispari" di Φ di modo che basti dimostrare $0 \in \psi(\partial\Omega)$; ma infatti ciò deve essere vero, altrimenti per Borsuk (applicato a ψ) sarebbe $0 \in (\psi(\mathring{\Omega})) \subseteq \mathring{X} = \emptyset$. $\square$]

Adesso, in verità, Borsuk risulta a sua volta corollario del seguente lemma.

__Lemma__: se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto $\neq \emptyset$ limitato è simmetrico rispetto all'origine e con $0 \notin \overline{\Omega}$, allora, per ogni $\phi \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ dispari su $\partial\Omega$ tale che $0 \notin \phi(\partial\Omega)$, $\deg(0, \phi, \Omega)$ è pari.

[(Borsuk) $\rightarrow$ Poniamoci nelle ipotesi di Borsuk, per cui esiste $\rho > 0$ tale che $B_\rho^{\mathbb{R}^N} \subseteq \Omega$ e possiamo così considerare (per Tietze) $\psi \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tale che $\begin{cases} \psi|_{\partial\Omega} = \phi|_{\partial\Omega} \\ \psi|_{\overline{B_\rho^{\mathbb{R}^N}}} = I_{\overline{B_\rho^{\mathbb{R}^N}}} \end{cases}$,

dunque tale che $0 \notin (\psi(\partial\Omega) \cup \psi(\partial B_\rho^{\mathbb{R}^N}))$: per loc. del grado applicato a ψ, agli aperti $B_\rho^{\mathbb{R}^N}$ e $\Omega \setminus \overline{B_\rho^{\mathbb{R}^N}}$ di Ω, e a 0, segue quindi che $\deg(0, \phi, \Omega) \overset{\text{(dati al bordo)}}{=}$
$= \deg(0, \psi, \Omega) = \underbrace{\deg(0, \psi, B_\rho^{\mathbb{R}^N})}_{(=1)} + \underbrace{\deg(0, \psi, \Omega \setminus \overline{B_\rho^{\mathbb{R}^N}})}_{\text{pari (per il lemma)}}$ è dispari. $\square$]

Il nostro obiettivo diventa così tale lemma, che andiamo subito a dimostrare in più passi.

__Lemma 1__: se $M, N \in \mathbb{N}$ con $1 \leq M < N$ e se $K \subseteq \mathbb{R}^M$ è compatto $(\neq \emptyset)$, allora, per ogni $\phi \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^N)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(K)$, esiste $\psi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$ tale che $\begin{cases} \psi|_K = \phi \\ x_0 \notin \psi(\mathbb{R}^M) \end{cases}$

[Sia $\Phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^M,\mathbb{R}^N)$ un'estensione di ϕ (per Tietze), per cui $x_0 \notin \Phi(K)$, e sia dunque $\rho>0$ tale che $B^{\mathbb{R}^N}_{3\rho}(x_0) \subseteq \mathbb{R}^N \setminus \Phi(K)$; così, se $\mathcal{F} \in B^{\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^M,\mathbb{R}^N)}_{\rho}(\Phi)\cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^M,\mathbb{R}^N)$, allora al solito $B^{\mathbb{R}^N}_{2\rho}(x_0) \subseteq \mathbb{R}^N\setminus \mathcal{F}(K)$. Ora $M<N$ implica che $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}} = \mathbb{R}^M$, quindi per Sard tutto $\mathcal{F}(\mathbb{R}^M)$ ha misura di Lebesgue nulla in $\mathbb{R}^N$: esiste per ciò $x_1 \in B^{\mathbb{R}^N}_{2\rho}(x_0)\setminus \mathcal{F}(\mathbb{R}^M)$ (x_1 è valore „più che regolare" per $\mathcal{F}$). Consideriamo allora una retrazione $r: \mathbb{R}^N\setminus\{x_1\} \to \mathbb{R}^N \setminus B^{\mathbb{R}^N}_{2\rho}(x_0)$ (r continua e tale che $r|_{\mathbb{R}^N\setminus B^{\mathbb{R}^N}_{2\rho}(x_0)} = I_{\mathbb{R}^N\setminus B^{\mathbb{R}^N}_{2\rho}(x_0)}$), è $r\circ\mathcal{F} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N\setminus B^{\mathbb{R}^N}_{2\rho}(x_0))$ e tale che $(r\circ\mathcal{F})|_K = \mathcal{F}|_K$ (in quanto $\mathcal{F}(K)\subseteq \mathbb{R}^N\setminus B^{\mathbb{R}^N}_{2\rho}(x_0)$): poniamo allora $\psi := r\circ\mathcal{F} - (\mathcal{F}-\Phi)$. Infatti così $\psi\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^M,\mathbb{R}^N)$ è tale che $\psi|_K = \Phi|_K = \phi$ e tale che $x_0\notin\psi(\mathbb{R}^M)$, in quanto per la precisione $B^{\mathbb{R}^N}_{\rho}(x_0)\subseteq \mathbb{R}^N\setminus\psi(\mathbb{R}^M)$ giacché, per ogni $x\in\mathbb{R}^M$, $|\psi(x)-x_0| = |(r\circ\mathcal{F})(x) - x_0 - (\mathcal{F}(x)-\Phi(x))| \ge |(r\circ\mathcal{F})(x)-x_0| - |\mathcal{F}(x)-\Phi(x)| > 2\rho-\rho=\rho$. □]

Lemma 2: se $M,N\in\mathbb{N}$ con $1\le M<N$ e se $K\subsetneq K_0\subseteq\mathbb{R}^M$ sono compatti ($\neq\emptyset$) e simmetrici rispetto all'origine e con $0\notin K_0$, allora, per ogni $\phi\in\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R}^N)$ dispari tale che $0\notin\phi(K)$, esiste $\psi\in\mathcal{C}^0(K_0,\mathbb{R}^N)$ dispari tale che $\begin{cases}\psi|_K=\phi\\ 0\notin\psi(K_0)\end{cases}$.

[Anzitutto, grazie al precedente lemma 1, esiste $\Phi\in\mathcal{C}^0(K_0,\mathbb{R}^N)$ tale che $\begin{cases}\Phi|_K=\phi\\ 0\notin\Phi(K_0)\end{cases}$. Se $M=1$, allora per ogni $x\in K_0$ poniamo $\psi(x):=\begin{cases}\Phi(x) & \text{se } x>0\\ -\Phi(-x) & \text{se } x<0\end{cases}$: $\psi\in\mathcal{C}^0(K_0,\mathbb{R}^N)$ (in quanto coincide con mappe continue definite su un numero finito di chiusi disgiunti) ed è chiaramente dispari, inoltre $\psi|_K=\phi$ (ϕ è dispari) e $0\notin\psi(K_0)$ (perché $0\notin\Phi(K_0)$). ✓ Pertanto possiamo procedere per induzione su M, supponendo ora $M\ge2$ e che la tesi valga per $M-1$; introduciamo quindi le notazioni $(\mathbb{R}^M)^{-/+} := \{x=(x_1,\dots,x_M)\in\mathbb{R}^M \mid x_M \le/\ge 0\}$ e $X := (\mathbb{R}^M)^-\cap(\mathbb{R}^M)^+ = \{x\in\mathbb{R}^M\mid x_M=0\}$: allora $(\mathbb{R}^M)^{-/+}$ sono chiusi in $\mathbb{R}^M$, e $X<\mathbb{R}^M$ ha $\dim X = M-1$, per cui possiamo applicare l'ipotesi induttiva a $\phi|_{(K\cap X)}$ ottenendo che esiste $\phi^*\in\mathcal{C}^0(K_0\cap X,\mathbb{R}^N)$ dispari con $\begin{cases}\phi^*|_{K\cap X}=\phi\\ 0\notin\phi^*(K_0\cap X)\end{cases}$. Dunque $\psi^*:(K_0\cap X)\cup K\to\mathbb{R}^N$, $\psi^*(x):=\begin{cases}\phi^*(x) & \text{se } x\in K_0\cap X\\ \phi(x) & \text{se } x\in K\end{cases}$, risulta ben definita e continua, che estende sia $\phi|_{K\cap X}$ sia $\phi^*|_{K_0\cap X}$, mantenendo la disparità ed il fatto di non annullarsi: grazie ancora al lemma 1 precedente, esiste $F \in \mathcal{C}^0(K_0, \mathbb{R}^N)$ tale che $\begin{cases} F|_{(K_0\cap X)\cup K} = f^* \\ 0 \notin F(K_0) \end{cases}$, per cui poniamo infine $f : K_0 \to \mathbb{R}^N$, $f(x) := \begin{cases} F(x) & \text{se } x \in (\mathbb{R}^N)^+ \\ -F(-x) & \text{se } x \in (\mathbb{R}^N)^- \end{cases}$ (per ogni $x \in K_0$), la quale risulta ben definita (per disparità di f^*) e dunque continua e dispari, inoltre tale per cui $f|_K = f^*|_K = \phi$ e con $0 \notin f(K_0)$. $\square$

(Lemma) Siano finalmente $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto $\neq \emptyset$ limitato e simmetrico rispetto all'origine con $0 \notin \overline{\Omega}$, e $\phi \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ dispari su $\partial\Omega$ tale che $0 \notin \phi(\partial\Omega)$, e consideriamo nuovamente $(\mathbb{R}^N)^{-/+}$ e $X := (\mathbb{R}^N)^- \cap (\mathbb{R}^N)^+ < \mathbb{R}^N$ (con $\dim X = N-1$) supponendo che $N \geq 2$: grazie al lemma 2 precedente (applicato ai compatti $\partial\Omega \cap X \subseteq \overline{\Omega} \cap X$ e a $\phi|_{(\partial\Omega\cap X)}$), esiste $\Phi \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}\cap X, \mathbb{R}^N)$ dispari tale che $\begin{cases} \Phi|_{(\partial\Omega\cap X)} = \phi|_{(\partial\Omega\cap X)} \\ 0 \notin \Phi(\overline{\Omega}\cap X) \end{cases}$. Dunque, analogamente a prima, $f^* : (\overline{\Omega}\cap X)\cup\partial\Omega \to \mathbb{R}^N$, $f^*(x) := \begin{cases} \Phi(x) & \text{se } x \in \overline{\Omega}\cap X \\ \phi(x) & \text{se } x \in \partial\Omega \end{cases}$, è continua e dispari tale che $0 \notin f^*((\overline{\Omega}\cap X)\cup\partial\Omega) \overset{\text{(Tietze)}}{\Rightarrow} \exists\, F \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tale che $F|_{(\overline{\Omega}\cap X)\cup\partial\Omega} = f^*$, quindi poniamo $f(x) := \begin{cases} F(x) & \text{se } x \in \overline{\Omega}\cap(\mathbb{R}^N)^+ \\ -F(-x) & \text{se } x \in \overline{\Omega}\cap(\mathbb{R}^N)^- \end{cases}$ ottenendo $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ dispari con $f|_{\partial\Omega} = \phi|_{\partial\Omega}$ e con $0 \notin f((\overline{\Omega}\cap X)\cup\partial\Omega)$. Posto ora $\Omega^{+/-} := \{x \in \Omega \mid x_N >/< 0\}$, Ω^+ e Ω^- sono due aperti $\neq \emptyset$ e disgiunti di Ω tali che appunto $0 \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega^+ \cup \Omega^-))$, per cui $\deg(0, \phi, \Omega) \overset{\text{(valori al bordo)}}{=} \deg(0, f, \Omega) \overset{\text{(additività)}}{=} \deg(0, f, \Omega^+) + \deg(0, f, \Omega^-)$: la tesi adesso è che tali gradi siano identici. Se infatti $\rho > 0$ è tale che $B_{2\rho}^{\mathbb{R}^N} \subseteq \mathbb{R}^N \setminus f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega^+ \cup \Omega^-))$ (quindi tale che $B_{2\rho}^{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)}(f) \subseteq \mathcal{F}_0$), allora ogni $f_0 \in B_\rho^{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)}(f) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ è tale che $B_\rho^{\mathbb{R}^N} \subseteq \mathbb{R}^N \setminus f_0(\overline{\Omega} \setminus (\Omega^+ \cup \Omega^-))$, e si può supporre f_0 dispari grazie alla disparità di f (per un ϵ-simm.) (nel senso che la parte dispari di f_0 sta sempre in $B_\rho^{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)}(f) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$): infatti $f(x) - \frac{1}{2}[f_0(x) - f_0(-x)] = \frac{f(x) - f_0(x)}{2} + \frac{f(x) + f_0(-x)}{2}$, e $\|f(x) + f_0(-x)\|_\infty = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |f(x) + f_0(-x)| = \sup_{x' \in \overline{\Omega}} |f_0(x') - f(x')| = \|f_0 - f\|_\infty < \rho$): allora

$\deg(0,\psi,\Omega^{+/-}) = \deg(0,\psi_0,\Omega^{+/-})$, e se $y \in B_j^{\mathbb{R}^N}$ è un valore regolare per $\psi_0|_{\overline{\Omega^+}}$ (grazie a Sard), cioè $-y\ (\in B_j^{\mathbb{R}^N})$ è un valore regolare per $\psi_0|_{\overline{\Omega^-}}$, allora in effetti $\deg(\underset{(0)}{y},\psi_0,\Omega^+) = \deg(\underset{(0)}{-y},\psi_0,\Omega^-)$ per disparità di ψ_0 (in questo, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $\mathcal{D}_{\psi_0}(x) = \mathcal{D}_{\psi_0}(-x)$, e cioè $\partial\psi_0(x) = \partial\psi_0(-x)$). $\square$

$\boxed{\text{NOTA}}$: nel caso $N=1$ non c'è bisogno del lemma 2, ma solo di lx. 3 add. effettuato direttamente a $\overline{\Phi}$, $\Omega^{+/-}$ e 0, con $\overline{\Phi}$ le parte dispari di ϕ ($\overline{\Phi}|_{\partial\Omega} = \phi|_{\partial\Omega}$), visto che per $N=1$ $\overline{\Omega} \setminus \underbrace{(\Omega^+ \cup \Omega^-)}_{(=\Omega\,!)} = \partial\Omega$:-)

Teorema: se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto $\neq \phi$ limitato è simmetrico rispetto all'origine con $0 \in \Omega$ e con $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$ $(= \partial(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}))$, e se entrambi Ω e $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ sono connessi, allora ogni $\phi \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega,\partial\Omega)$ dispari è suriettiva.

$\boxed{\text{Se}}$ per assurdo $\exists\, x_0 \in \partial\Omega \setminus \phi(\partial\Omega)$, allora sia $j>0$ tale che $B_j^{\mathbb{R}^N}(x_0) \subseteq \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$, e siano $x_1 \in B_j^{\mathbb{R}^N}(x_0) \cap \Omega$ e $x_2 \in B_j^{\mathbb{R}^N}(x_0) \setminus \overline{\Omega}$. Per Tietze e per disparità di ϕ, esiste $\psi \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$ dispari tale che $\psi|_{\partial\Omega} = \underset{(\Rightarrow 0 \notin \psi(\partial\Omega))}{\phi}$, per cui in particolare $B_j^{\mathbb{R}^N}(x_0) \subseteq \mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial\Omega)$ e dovrebbe essere $\deg(x_1,\psi,\Omega) = \deg(x_2,\psi,\Omega)$, mentre è impossibile in questo: Ω connesso con $0 \in \Omega$ $\Rightarrow$ $\deg(x_1,\psi,\Omega) = \deg(0,\psi,\Omega)$ è dispari per Borsuk, invece $\deg(x_2,\psi,\Omega) = 0$ perché pure $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ è connesso e sicuramente esiste $z \in \mathbb{R}^N \setminus (\underbrace{\overline{\Omega} \cup \psi(\overline{\Omega})}_{(cpt)})$. $\square$

Per concludere il nostro studio non resta che discutere riguardo al grado di mappe composte: siano dunque $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto $\neq \phi$ limitato e $W \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto $\neq \phi$ ($N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$) dove consideriamo $\phi \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega},W)$ e $\psi \in \mathcal{C}^0(W,\mathbb{R}^N)$, cosicché $\psi \circ \phi \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$. Osservando che le componenti connesse di un aperto $\neq \phi$ di $\mathbb{R}^N$ $\underset{(\text{e aperte})}{}$ sono in quantità al più numerabile, siano $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ quelle di $\mathbb{R}^N\setminus\phi(\partial\Omega)$; essendo $\phi(\partial\Omega)$ un limitato, nel caso $N\geq 2$ $\mathbb{R}^N\setminus\phi(\partial\Omega)$ ha una e una sola componente connessa illimitata che supponiamo essere W_0 (se $N=1$, allora ne sarebbero esattamente due illimitate).

$\boxed{\text{OSS.}}$ (a) Per definizione, $W_i\subseteq\mathbb{R}^N\setminus\phi(\partial\Omega)$ e $\partial W_i\subseteq\phi(\partial\Omega)$ per ogni $i\in\mathbb{N}$.

(b) Per costruzione, $\forall\, i\in\mathbb{N}$ e $\forall\, z\in W_i$, è costante il numero $\deg(z,\phi,\Omega)=:$ $=:\deg(W_i,\phi,\Omega)$; in particolare $\deg(W_0,\phi,\Omega)=0$ ($\phi(\overline{\Omega})$ è limitato).

(c) Per ogni $i\in\mathbb{N}$, se $\deg(W_i,\phi,\Omega)\neq 0$ allora $i\geq 1$ e $W_i\subseteq\phi(\Omega)$, $\Rightarrow$ $\overline{W_i}\subseteq\overline{\phi(\Omega)}\overset{\text{cont.+lim.}}{=}\phi(\overline{\Omega})\subseteq W$, per cui ha senso considerare $\psi|_{\overline{W_i}}$.

(d) Per ogni $y\in\mathbb{R}^N\setminus(\psi\circ\phi)(\partial\Omega)$, quindi $y\notin\psi(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\partial W_i)$, è $\psi^{-1}(y)\cap\phi(\Omega)\cap W_i\neq\emptyset$ solo per un numero finito di indici $i\in\mathbb{N}$ (perché $\psi^{-1}(y)\cap\phi(\Omega)=\psi^{-1}(y)\cap\phi(\overline{\Omega})$ è un compatto $\subseteq\mathbb{R}^N\setminus\phi(\partial\Omega)=\dot{\bigcup_{i\in\mathbb{N}}}W_i$) $\Rightarrow$ $\deg(y,\psi,W_i)\deg(W_i,\phi,\Omega)\neq 0$ solo per un numero finito di indici $i\in\mathbb{N}$ tali che $\deg(W_i,\phi,\Omega)\neq 0$ (quindi tali che effettivamente $\psi^{-1}(y)\cap\phi(\Omega)\cap W_i\overset{(c)}{=}\psi^{-1}(y)\cap W_i$).

Teorema (proprietà moltiplicativa del grado): per ogni $y\in\mathbb{R}^N\setminus(\psi\circ\phi)(\partial\Omega)$,

$$\deg(y,\psi\circ\phi,\Omega)=\begin{cases}0 & \text{se } \deg(W_i,\phi,\Omega)=0 \text{ per ogni } i\geq 1\\ \displaystyle\sum_{\substack{i\geq 1 \text{ tali che}\\ \deg(W_i,\phi,\Omega)\neq 0}}\deg(y,\psi,W_i)\deg(W_i,\phi,\Omega) & \text{altrimenti}\end{cases}$$

(Notando che sarebbe senso estendere tutte le somme a $i\geq 1$ nel caso fosse $W=\mathbb{R}^N$, in questo sicuramente avrebbe senso considerare $\psi|_{\overline{W_i}}$.)

$\boxed{\text{Dimostrazione}}$ solo per $\phi\in C^\infty(\overline{\Omega},W)$ e $\psi\in C^\infty(W,\mathbb{R}^N)$. Basta dimostrare la formula per y valore regolare per $\psi\circ\phi$, in quanto nel caso generale ci sarebbe $\rho>0$ tale che $B_\rho^{\mathbb{R}^N}(y)\subseteq\mathbb{R}^N\setminus(\psi\circ\phi)(\partial\Omega)$ e ci sarebbe $y'\in B_\rho^{\mathbb{R}^N}(y)$ valore regolare per $\psi\circ\phi$: dunque $\deg(y,\psi\circ\phi,\Omega)=\deg(y',\psi\circ\phi,\Omega)\overset{(\text{se}\neq 0)}{=}\sum_{\substack{i\geq 1\text{ t.c.}\\ \deg(W_i,\phi,\Omega)\neq 0}}\deg(y',\psi,W_i)\deg(W_i,\phi,\Omega)$, dove a maggior ragione $\underset{(\mathbb{R}^N\setminus(\psi\circ\phi)(\partial\Omega)\subseteq\mathbb{R}^N\setminus\psi(\partial W_i))}{\deg(y',\psi,W_i)}=\deg(y,\psi,W_i)$. Sia allora y regolare per $\psi\circ\phi$, e supponiamo pure $y\in(\psi\circ\phi)(\Omega)$ (perché altrimenti $\deg(y,\psi\circ\phi,\Omega)=0$ e in effetti, anche se $i \geq 1$ ha $\deg(W_i, \phi, \Omega) \neq 0$, se $\phi = f^{-1}(y) \cap \phi(\Omega) \cap W_i = f^{-1}(y) \cap W_i$ ovvero $\deg(y, f, W_i) = 0$) : sia così $x \in \Omega \setminus Z_{f \circ \phi}$ con $f(\phi(x)) = y$ e con $d(f\circ\phi)(x) = df(\phi(x)) \circ d\phi(x)$ un isomorfismo, cioè con entrambi $d\phi(x)$ e $df(\phi(x))$ isomorfismi, per cui $x \notin Z_\phi$ e $\phi(x) \notin Z_f$. Allora sicuramente $f^{-1}(y) \cap \phi(\Omega)$ è costituito da un numero finito di punti (≥ 1), e se poniamo $I_y \doteq \{ i \in \mathbb{N} \mid f^{-1}(y) \cap \phi(\Omega) \cap W_i \neq \emptyset \}$ $(\Rightarrow \# I_y < \infty)$ e $f^{-1}(y) \cap \phi(\Omega) \cap W_i \doteq \{ z_{i,1}, \dots, z_{i,s_i} \}$ per ogni $i \in I_y$ $(s_i \geq 1)$, allora gli $z_{i,j}$ sono tali che $z_{i,j} \notin (\phi(Z_\phi) \cup Z_f)$ (in particolare $\# \phi^{-1}(z_{i,j}) < \infty$) e tali che $f^{-1}(y) \cap \phi(\Omega) = \bigcup_{i \in I_y} \{ z_{i,1}, \dots, z_{i,s_i} \}$: possiamo così scrivere $\deg(y, f\circ\phi, \Omega) \doteq$

$$\doteq \sum_{\substack{x \in (f\circ\phi)^{-1}(y) = \\ = \phi^{-1}(f^{-1}(y))}} \operatorname{sign}(J_{f\circ\phi}(x)) = \sum_{i \in I_y} \sum_{j=1}^{s_i} \sum_{x \in \phi^{-1}(z_{i,j})} \operatorname{sign}(J_{f\circ\phi}(x)) = \sum_{i \in I_y} \sum_{j=1}^{s_i} \operatorname{sign}(J_f(z_{i,j})) \underbrace{\sum_{x \in \phi^{-1}(z_{i,j})} \operatorname{sign}(J_\phi(x))}_{(= \deg(z_{i,j}, \phi, \Omega) \doteq \deg(W_i, \phi, \Omega))} =$$

$$\left(= \operatorname{sign}(J_f(\underset{z_{i,j}}{\phi(x)})) \cdot \operatorname{sign}(J_\phi(x)) \right)$$

$$= \sum_{i \in I_y} \deg(W_i, \phi, \Omega) \sum_{j=1}^{s_i} \operatorname{sign}(J_f(z_{i,j})) = \sum_{\substack{i \in I_y \text{ t.c.} \\ \deg(W_i,\phi,\Omega) \neq 0}} \deg(W_i, \phi, \Omega) \deg(y, f, W_i) \quad (\Rightarrow W_i \cap \phi(\Omega) = W_i) \quad , =$$

$$= \sum_{\substack{i \geq 1 \text{ t.c.} \\ \deg(W_i,\phi,\Omega) \neq 0}} \deg(W_i, \phi, \Omega) \deg(y, f, W_i) \quad \text{(in modo ovvio dalla def. di } I_y) \quad . \quad \square$$

Teorema di Jordan: se $K, L \subseteq \mathbb{R}^N$ sono compatti omeomorfi $(\neq \emptyset)$, allora il numero (finito o no) delle componenti connesse di $\mathbb{R}^N \setminus K$ coincide col numero delle componenti connesse di $\mathbb{R}^N \setminus L$.

[Possiamo supporre $N \geq 2$, quindi siano $(\Omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ le componenti connesse di $\mathbb{R}^N \setminus K$ delle quali Ω_0 quella illimitata, e siano $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ le componenti connesse di $\mathbb{R}^N \setminus L$ delle quali W_0 quella illimitata (in particolare $\partial \Omega_i \subseteq K$ e $\partial W_k \subseteq L$) : per simmetria basta dimostrare che il numero delle Ω_i sia $\leq$ al numero delle W_k, per cui possiamo

supponi che esiste un indice $i \geq 1$ ($\Rightarrow \Omega_i$ limitata) e che inoltre le W_K siano in quantità finite (≥ 2). In ogni caso, essendo omeomorfismo $K \underset{h^{-1}}{\overset{h}{\rightleftarrows}} L$ e, per Tietze,
(essendo K, L omeomorfi, ma poi si dovrà che $\mathbb{R}^n \setminus K$ abbia almeno una c.c. limitata mentre $\mathbb{R}^n \setminus L = W_0$)
le rispettive estensioni continue $\phi \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ di h e $\psi \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ di h^{-1}, per cui certamente $(\psi \circ \phi)|_K = I_K$. Adesso, posto $i \geq 1$ per considerare $\phi|_{\overline{\Omega_i}}$, siano $(W_{i,l})_{l \in \mathbb{N}}$ le componenti connesse di $\mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial \Omega_i)$ delle quali $W_{i,0}$ quella illimitata: grazie al fatto che $(\psi \circ \phi)|_{\partial \Omega_i} = I_{\partial \Omega_i}$ e alle proprietà moltiplicativa del grado, per ogni $z \in \Omega_j$ ($\Rightarrow z \notin \partial \Omega_i$) con $j \in \mathbb{N}$ abbiamo che $\delta_{i,j} = \deg(z, \psi \circ \phi, \Omega_i) =$

$$= \sum_{l \geq 1}' \deg(z, \psi, W_{i,l}) \deg(W_{i,l}, \phi, \Omega_i)$$

; in particolare, potendo prendere $j = i$, deduciamo che in effetti deve esistere $W_{i,l}$ con $l \geq 1$ (quindi limitata). Veniamo dunque a confrontare le $W_{i,l}$ con le W_K: essendo $\partial W_{i,l} \subseteq \phi(\partial \Omega_i) \subseteq \underset{(h)}{\phi(K)} \subseteq L$, di sicuro è
(avendo che $\mathbb{R}^n \setminus L \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial \Omega_i)$)

$W_K \cap \partial W_{i,l} = \emptyset \Rightarrow W_K \cap W_{i,l} = W_K \cap \overline{W_{i,l}}$ è sia aperto sia chiuso nel connesso W_K, cioè o è $\emptyset$ o è W_K: o $W_K \cap W_{i,l} = \emptyset$, o $W_K \subseteq W_{i,l}$. Posto $\forall l \geq 1$

$I_{i,l} := \{K \in \underset{(\geq 1)}{\mathbb{N}} \mid W_K \subseteq W_{i,l}\}$ (finito), abbiamo allora $W_{i,l} \setminus L = \dot{\bigcup}_{K \in I_{i,l}} W_K$: per ogni $z \in \Omega_j$ ($\Rightarrow z \notin K$ e quindi $\psi^{-1}(z) \cap L = \emptyset$), essendo $\psi^{-1}(z) \cap W_{i,l} \subseteq \dot{\bigcup}_{K \in I_{i,l}} W_K$, grazie alla formula precedente e a la add. applicata a $\psi|_{\overline{W_{i,l}}}$ abbiamo che
($W_{i,l} \subseteq \phi(\Omega) \Rightarrow \psi^{-1}(z) \cap W_{i,l} \subseteq \psi^{-1}(z) \cap \phi(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus L$)

$$\delta_{i,j} = \sum_{l \geq 1}' \underbrace{\Big[\sum_{K \in I_{i,l}}' \deg(z, \psi, W_K)\Big] \deg(W_{i,l}, \phi, \Omega_i)}_{(= \deg(W_K, \phi, \Omega_i))} = \sum_{l \geq 1}' \sum_{\substack{K \in I_{i,l} \\ (K \geq 1)}}' \deg(z, \psi, W_K) \deg(W_K, \phi, \Omega_i) =$$

$$= \sum_{K \geq 1}' \deg(z, \psi, W_K) \deg(W_K, \phi, \Omega_i)$$

(in quanto, per ogni $K \geq 1$, anche se $W_K \subseteq W_{i,0}$ allora $\deg(W_K, \phi, \Omega_i) = 0$), ossia che $\delta_{i,j} = \sum_{K \geq 1}' \deg(\Omega_j, \psi, W_K) \deg(W_K, \phi, \Omega_i)$.

Se le W_K sono in numero di $q \geq 2$ e si ipotizziamo che le Ω_i fossero anche in numero di almeno $p \geq 2$, allora siano $a_{K,i} := \deg(W_K, \phi, \Omega_i)$ e $b_{j,K} := \deg(\Omega_j, \psi, W_K)$ per ogni $K = 1, \dots, q-1$ e $i, j = 1, \dots, p-1$ cosicché $A : \mathbb{R}^{p-1} \to \mathbb{R}^{q-1}$ lineare rappresentata da $(a_{K,i})_{K,i}$ e $B : \mathbb{R}^{q-1} \to \mathbb{R}^{p-1}$ lineare rappresentata da $(b_{j,K})_{j,K}$ soddisfano per la formula che $B \circ A = I_{\mathbb{R}^{p-1}}$, da cui appunto $p-1 \leq q-1$ (A iniettiva, o B suriettiva). $\square$

Veniamo al nostro ultimo teorema notevole.

Teorema delle mappe aperte: per ogni $\phi \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ iniettiva, $\phi(\Omega)$ è un aperto di $\mathbb{R}^N$ (cioè ϕ è aperta).

↳ Se $\phi \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^M)$ è iniettiva, allora $M \geq N$.
[Perché, se fosse $M < N$, allora ϕ sarebbe e aperta in $\mathbb{R}^M \subsetneq \mathbb{R}^N$. □]

⇒ Se esistono $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e $W \subseteq \mathbb{R}^M$ aperti $\neq \emptyset$ omeomorfi, allora $M = N$!

(COR) ▷ Per ogni $\phi \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^M)$ avente $\mathring{(\phi(\Omega))} \neq \emptyset$, se $M > N$ allora ϕ non è iniettiva.

[Osserviamo anzitutto che una mappa continua da un compatto in un T_2 è chiusa, quindi se tale mappa fosse invertibile allora la sua inversa sarebbe continua. Ebbene, se per assurdo ϕ fosse iniettiva, allora sia $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione di compatti di $\mathbb{R}^N$ tali che $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \Omega$, per cui dato che $\phi(\Omega) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underset{\text{chiusi}}{\phi(K_n)}$ abbia parte interna $\neq \emptyset$ in $\mathbb{R}^M$: per Baire deve esistere $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\mathring{(\phi(K_{\bar{n}}))} \neq \emptyset$ ⇒ ϕ sarebbe continua $K_{\bar{n}} \to \phi(K_{\bar{n}})$ e quindi ϕ^{-1} sarebbe continua $\mathring{(\phi(K_{\bar{n}}))} \to \mathbb{R}^N$, oltre che iniettiva, e ciò porterebbe ad essere $N \geq M$. □]

Per il teorema delle mappe aperte sarà ampiamente sufficiente il seguente risultato.

Proposizione: se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto $\neq \emptyset$ è limitato e connesso, allora per ogni $\phi \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ iniettiva $\phi(\Omega)$ è un aperto di $\mathbb{R}^N$, ed anzi $\phi(\Omega)$ coincide con una componente connessa (limitata) $W^\#$ di $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$ tale che $\deg(W^\#, \phi, \Omega) \in \{\pm 1\}$.

↳ Vale il teorema perché ϕ manda palle (aperte) in aperti! ✓

[Abbiamo già capito che $\phi^{-1} : \phi(\bar{\Omega}) \to \mathbb{R}^N$ è continua, quindi (per Tietze) esiste $\psi \in C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tale che $\psi|_{\phi(\bar{\Omega})} = \phi^{-1}$, per cui $(\psi \circ \phi)|_{\bar{\Omega}} = I_{\bar{\Omega}}$: se $N \geq 2$ e se $(W_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sono le componenti connesse di $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$ delle quali W_0 quella illimitata, allora chiaramente per ogni $x \in \Omega$ è $1 = \deg(x, \psi \circ \phi, \Omega) =$

$= \sum_{i \geq 1} \deg(x, f, W_i) \deg(W_i, \phi, \Omega)$, $\Rightarrow$ deve esistere $\bar{i} \geq 1$ tale che $\deg(x, f, W_{\bar{i}}) \cdot$

$\cdot \deg(W_{\bar{i}}, \phi, \Omega) \neq 0$, quindi tale che $W_{\bar{i}} \subseteq \phi(\Omega)$; ma $\phi(\Omega) \overset{(*)}{\subseteq} \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial\Omega)$ ed è connesso: non può che essere $W_{\bar{i}} = \phi(\Omega)$, $\Rightarrow \deg(W_i, \phi, \Omega) = 0$ per ogni $i \neq \bar{i}$, ed in definitiva $1 = \deg(x, f, W_{\bar{i}}) \deg(W_{\bar{i}}, \phi, \Omega)$: essendo tali fattori numeri interi, devono coincidere entrambi con 1 o con -1. $\square$

$\boxed{\text{NOTA}}$: possiamo usare la proprietà moltiplicativa del grado anche per $N = 1$, ed ottenere in particolare il precedente lemma, giacché niente cambierebbe nelle nostre trattazioni e nel riguardo a fatto ed esempio di chiamare come "$(W_i)_{i \geq -1}$" le componenti connesse di $\mathbb{R} \setminus \phi(\partial\Omega)$ delle quali W_{-1} e W_0 quelle illimitate.