TEO. HAHN–BANACH di "estensione con controllo": siano E sp. vettoriale reale (1)

e p una seminorma su esso ($p: E\to\mathbb{R}$ tale che (1) $\forall x\in E$ e $\lambda\ge 0$, $p(\lambda x)=\lambda p(x)$; (2) $\forall x,y\in E$, $p(x+y)\le p(x)+p(y)$) ;

siano $G<E$ e $g: G\to\mathbb{R}$ lineare.

Lemma*: se $x_0\in E$ e se $\boxed{g\le p}$ (su G), allora

(1) $\sup_{y\in G}\big(g(y)-p(y-x_0)\big) \le \inf_{x\in G}\big(p(x+x_0)-g(x)\big)$;

(2) $\exists f:\langle G,x_0\rangle\to\mathbb{R}$ lineare tale che $\boxed{f|_G=g \text{ e } f\le p}$ (su $\langle G,x_0\rangle$).

[(1) $\forall x,y\in G$, $g(x)+g(y) \overset{\text{lin.}}{=} g(x+y) \overset{g\le p}{\le} p(x+y) \overset{\text{semin.}}{\le} p(x+x_0)+p(y-x_0)$, ove

$g(y)-p(y-x_0)\le p(x+x_0)-g(x)$. ✓

(2) Posso supporre $G\subsetneq E$ e $x_0\notin G$; scelgo f della forma $f(x+tx_0):=$

$= g(x)+t\alpha$, $x\in G$ e $t\in\mathbb{R}$, con $\alpha\in\mathbb{R}$ tale che $\boxed{f\le p}$ (per cui però $\alpha = f(x_0)$):

visto che per $t=0$ $f\le p$ ($f=g$), scelgo che $\forall t\neq 0$ (e $\forall x\in G$) sia $g(\frac{x}{|t|})+\frac{t}{|t|}\alpha \overset{\text{semin.}}{\le} p(\frac{x}{|t|}+\frac{t}{|t|}x_0)$,

cioè $\begin{cases} g(x)+\alpha\le p(x+x_0)\\ g(y)-\alpha\le p(y-x_0)\end{cases}$ $\forall x,y\in G$, ove $g(y)-p(y-x_0)\le\alpha\le p(x+x_0)-g(x)$,

cosa effettivamente possibile per (1). □]

Teorema (Hahn–Banach)*: se $\boxed{g\le p}$, allora $\exists f: E\to\mathbb{R}$ lineare

tale che $f|_G=g$ e $f\le p$.

[$X=\{f:E_f<E\to\mathbb{R}$ lineari $\mid G<E_f,\ f|_G=g,\ f\le p$ (su E_f)$\}$ è $\neq\emptyset$ perché

$g\in X$, ed è parz. ordinato ponendo, $\forall f,h\in X$, «$f\le h \overset{\text{def}}{\iff} h$ estende f»,

cioè se «$E_f<E_h$ e $h|_{E_f}=f$»; ogni catena in X è

della forma $(f_i)_{i\in I}$ con $f_i\le f_j \iff i\le j$ (in I ordinato), che ammette

un maggiorante: si tratta di $h:E_h\to\mathbb{R}$, $E_h:=\bigcup_{i\in I}E_{f_i}$, $h|_{E_{f_i}}:=f_i$.

Bibliographie Platonicienne 2001-2002

((*) Inoltre $x \neq 0 \Rightarrow T_x \neq 0$, e allora $J : E \to E''$, $x \mapsto T_x$ è lineare iniettivo con $\|J\| = 1$, essendo effetto $\|T_x\| = |x|_E$: in altre parole $E \cong J(E)$)

(segue che J è "chiuso" fra, mandando completo in completo)

Femenías, María Luisa, voir Davolio, María Cristina 1995.

Fendt, Gene, "*Ion:* Plato's defense of poetry", *ISPh* 29, 1997 29, 23-50.

Ferber, Rafael, "Ist die Idee des Guten nicht transzendent oder ist sie es doch? Nochmals Platons *epékeina tê̱s ousías*", *Méthexis* 14, 2001, 7-21. Bibliographie.

(in effetti, T che conserva le norme è automaticamente iniettivo!)

Ferrari, Franco, "L'*oikeion* dell'anima e la conoscenza filosofica: il motivo gnoseologico nel *Liside*", *GLP* 16-217, 1998 [2000], 21-27.

E è "riflessivo" se $E \cong E''$, cioè se J è suriettivo: $J(E) = E''$, cioè $J(B_1^E) = B_1^{E''}$.

Ferrari, Franco, "Struttura e funzione dell'esegesi testuale nel Medioplatonismo. Il cas del *Timeo*", *Athenaeum* 89, 2001, 525-574.

Ferrari, Franco, "La causalità del Bene nella *Repubblica* di Platone", *Elenchos* 22, 2001, 5-37.

Ferrari, Franco, "Verità e giudizio: il senso e la funzione dell' essere tra *aísthe̱sis* e *dóxa*", *Teeteto* (*Il*) (congrès) 2002, 156-174.

Ferrari, G.R.F., "Plato, *Republic* 9, 585c-d", *CQ* 52, 2002, 384-388.

Ferreira de Andrade e Silva, Mariluze, "Platão e os fundamentos da linguagem", *Reunião da Sociedade Brasileira de Platonistas* (congrès) I, 2001, 167-173. Bibliographie.

Fierro, María Angélica, "Symp. 212a2-7. Desire for the truth and desire for death and a god-like immortality", *Méthexis* 14, 2001, 23-43. Bibliography.

Figal, Günter, "Die Wahrheit und die schöne Täuschung: zum Verhältnis von Dichtung und Philosophie im Platonischen Denken", *PhJ* 107, 2000, 301-315 [rés. en angl.].

Figal, Günter, "Platonforschung und hermeneutische Philosophie" [1999], *Mélanges Krämer* (Hans Joachim) 2001, 19-29.

Fischer, Eugen, "Platos Untersuchung der Formen der Tugend: eine Fallstudie zur Frage: Was ist und was soll Metaphysik?" *PhJ* 107, 2000, 95-115 [rés. en angl.].

Flannery, Kevin L., "Homosexuality and types of dualism: a Platonico-Aristotelian approach", *Gregorianum* 81, 2000, 353-372 [rés. en franç.].

Flannery, Kevin L., "Robinson's Lukasiewiczian *Republic* IV, 435-439". *Gregorianum* 77,1996, 705-726 [avec rés. en franç.].

Follon, Jacques, "Amour, sexualité et beauté chez Platon. La leçon de Diotime (*Banquet* 201d-212c)", *Méthexis* 14, 2001, 45-71.

Foucrier, Chantal, "La migration septentrionale du mythe platonicien de l'Atlantide. Déplacement et réécriture d'un récit d'origine", *Nord* (*Le*) (recueil) 2001, 403-411.

Frede, Dorothea, "*Platons* Phaidon: *der Traum von der Unsterblichkeit der Seele*, coll. Werkinterpretationen, Darmstadt (Wissenschaftliche Buchgesellschaft) 1999. VIII - 189 pp.

(Scelto $x \in E$, $T_x : E' \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x)$ è in $E'' := (E')'$, essendo lineare e continua con $\|T_x\| = \sup_{f \in B_1^{E'}} \underbrace{T_x(f)}_{f(x)} = |x|_E$!!) (*)

Allora (per Zorn) X ha un elemento massimale $f: E_f < E \to \mathbb{R}$; ora ho ②
concluso perché allora in realtà avremmo $E_f = E$ (altrimenti, se $x_0 \in E \setminus E_f$,
proverei (Lemma, (2)) $h: \langle E_f, x_0 \rangle \to \mathbb{R}$ lineare tale che $h|_{E_f} = f$ e
$h \leq p$, la quale dunque è $h \in X$ con $h \succ f$). $\square$]

~~DUE~~ TRE COROLLARI nel caso che E sia normato.

$\boxed{\text{I}}$ $g \in G' \Rightarrow \exists f \in E'$ tale che $f|_G = g$ e $\|f\| = \|g\|$.

$\downarrow$

$\boxed{\text{II}}$ $\forall x \in E$, $\exists f \in E'$ tale che $f(x) = |x|_E^2$ e $\|f\| = |x|_E$.

$\Leftarrow_*$

[I) Se $p(x) \doteq \|g\| \|x\|$ $\forall x \in E$, allora p è seminorma su E tale che $g \leq p$ (su G),
dunque per H.-B. $\exists f: E \to \mathbb{R}$ lin. tale che $\underset{\Rightarrow (\|g\| \leq \|f\|)}{f|_G = g}$ e $f \leq p$ (su E),
ossia $\|f\| \leq \|g\|$: allora $\|f\| = \|g\|$ ed f è pure continua. $\square$

II) Sia $x \neq 0$ e $G \doteq \langle x \rangle$, e $\forall t \in \mathbb{R}$ $g(tx) \doteq t|x|_E^2$ (lineare) ; allora
$|tx|_E = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{|x|_E}$, da cui $\|g\| = |x|_E$ e allora $g \in G'$: per (I) so
che $\exists f \in E'$ tale che $\underset{\Rightarrow (f(x) = g(x) = |x|_E^2)}{f|_G = g}$ e $\|f\| = \|g\|$. $\square$]

~~$\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\exists f \in E' \setminus \{0\}$ tale che $f(x) > 0$!~~ (ossia $x \notin \ker f$)

$\Leftarrow_*$

$\boxed{\text{III}}$ $\forall x \in E$, $|x|_E = \sup_{f \in B_1^{E'}} f(x)$.

[Innanzitutto, $\forall f \in E'$ con $\|f\| \leq 1$, $f(x) \leq |x|_E \|f\| \leq |x|_E$; ora tale sup è
raggiunto proprio in $|x|_E$ (che posso supporre $\neq 0$) : infatti, se $f \in E'$ è tale
che $f(x) = |x|_E^2$ e $\|f\| = |x|_E$ come in II), allora $\tilde{f} \doteq \frac{f}{|x|_E} \in E'$ e ha
$\|\tilde{f}\| = 1$ e con $\tilde{f}(x) = |x|_E$. $\square$]

Ebert, Theodor, "Das Argument aus dem Wiedergeborenwerden (Wiedergeburts-Argument) 69e-72e), *Symposium Platonicum Pragense* II (congrès) 2001, 208-240.

Edmonds, Radcliffe Guest, *A path neither simple nor single : the use of myth in Plato, Aristophanes, and the "Orphic" gold tablets.* [S.l.]: [s.n.], 1999, 439 pp. Thesis (Ph.D.) – University of Chicago, Chicago (Ill.), 1999. Summary in: *DAI-A* 1999-2000 60 (6): 2016. Microform available from: University Microfilms International, Ann Arbor (Mich.), no. AAT 9934046.

Edmonds III, Radcliffe Guest, "Socrates the beautiful: role reversal and midwifery in Plato's *Symposium*", *TAPhA* 130, 2000, 261-285.

Edwards, M[ark] J., "In defense of Euthyphro", *AJPh* 121, 2000, 213-224.

Eming, Knut, "Affekt und Ursache", *Symposium Platonicum Pragense* II (congrès) 2001, 305-339.

Erbse, H., "Beobachtungen über Platons *Politeia A-D*", *Hermes* 129, 2001, 198-207.

Erler, Michael, "Selbstfindung im Gebet" [1994], Mélanges *Krämer* (Hans Joachim) 2001, 155-171.

Erler, Michael, "Entendre le vrai et passer à côté de la vérité. La poétique implicite de Platon", *Philosophie (La) de Platon* (recueil), 2001, 55-86. Traduit de l'anglais par Carlos Lévy.

Erler, Michael, "Geschlechterdifferenz als Konvention: zum Verhältnis von Körper und Rolle der Geschlechter bei Platon", *Körper (Der) und die Religion* (recueil) 2000, 47-66.

Evans, David, "Plato whole", *PhB* 41, 2000, 225-235. On J. Annas (*Platonic ethics, old and new*, 1999) ; with a response by Annas.

Faraguna, Michele, "A proposito degli archivi nel mondo greco : terra e registrazioni fondiarie", *Chiron* 30, 2000, 65-115.

Farrell, Anne Mary, *Plato's use of Eleusinian Mystery motifs* [S.l.] : [s.n.], 1999. 237 pp. Thesis (Ph.D.) – The University of Texas at Austin, Austin (Tex.), 1999. Argues that in explaining his epistemology in three middle and late period dialogues (*Smp.* 209e-212a, *R.* 509a-518d, and *Phdr.* 246a-253c) Plato consciously and systematically uses Eleusinian Mystery motifs to express the direct, unmediated contact that constitutes knowledge of a form. Summary in : *DAI*-A 1999-2000 60 (9) : 3394. Microform available from : University Microfilms International, Ann Arbor (Mich.), no. AAT 9947222.

Fattal, Michel, *Logos. Pensée et vérité dans la philosophie grecque*, coll. Ouverture Philosophique, Paris (L'Harmattan) 2001, 268 pp. Index des auteurs anciens et médiévaux. Index des auteurs modernes et contemporains. [Recueil de textes déjà publiés. L'ouvrage n'est pas détaillé ici].

Fattal, Michel, "Vérité et fausseté de l'*onoma* et du *logos* dans le *Cratyle* de Platon", *Philosophie (La) de Platon* (recueil), 2001, 207-231.

OSS: nelle ipotesi di H.-B. ma con $p(\cdot) = |\cdot|_C$ gauge di C convesso aperto $\neq \emptyset$ (di E) (seminorma!) (E normato: serve le mie ipotesi!)

$f, \ell \leq p$ sono automaticamente continue! ($\exists\, C \subseteq B$)

[Ad esempio infatti, se $\forall x \in E$ $\ell(x) \leq |x|_C$, allora $\forall x \in C$ è $\ell(x) \leq |x|_C < 1$ essendo C aperto (e comunque è ≤ 1), e per lo stesso motivo ℓ è limitato su una palla.]

TEO. HAHN–BANACH in forma geometrica "(*)": E normato, A, B convessi $\neq \emptyset$ disgiunti di E con A aperto $\Rightarrow$ $\exists \ell \in E' \setminus \{0\}$ $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\ell|_A \leq \alpha \leq \ell|_B$, ossia l'iperpiano chiuso $\ell = \alpha$ separa A da B.

[Basta provarlo nel caso $B = \{0\}$ per linearità: in tal caso, infatti, $A' := A - B = \bigcup_{y \in B} (A - y)$ sarebbe ancora aperto convesso $\neq \emptyset$ e ovviamente disgiunto da $B' = \{0\}$, per cui esisterebbero $\ell \in E' \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\ell|_{A'} \leq \underset{(\ell(0))}{0}$, ossia per ogni $x \in A$ e $y \in B$ $\ell(x) - \ell(y) = \ell(x-y) \leq 0$, ossia $\ell(x) \leq \ell(y)$, ossia $\sup_{x \in A} \ell(x) \leq \inf_{y \in B} \ell(y)$. ✓

Per ragioni analoghe basta ora per $B = \{x_0\}$, $x_0 \neq 0$: se infatti $B' = \{0\}$ e $-x_0 \in A$ e $x_0 \neq 0$, allora $A' := A + x_0$, $B' = B + x_0 = \{x_0\}$ ma $\exists \ell \in E' \setminus \{0\}$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell|_{A'} \leq \alpha \leq \ell(x_0)$, ossia t.c. $\forall x \in A$ $\ell(x) + \ell(x_0) = \ell(x + x_0) \leq \alpha \leq \ell(x_0)$, ossia $\ell(x) \leq \underbrace{\alpha - \ell(x_0)}_{=:\alpha'} \leq 0$ $(= \ell(0))$. ✓

Siano pertanto A convesso aperto $\neq \emptyset$ e $B = \{x_0\}$, $x_0 \in E \setminus A$ e $x_0 \neq 0$; dunque se $G = \langle x_0 \rangle$ allora $g : G \to \mathbb{R}$, $g(tx_0) = t$ $\forall t \in \mathbb{R}$, è lineare NON nulla (tale che $g(x_0) = 1$, ad es.), e $g(tx_0) = t \leq |tx_0|_A$ perché $x_0 \notin A \Rightarrow |x_0|_A \geq 1$, e so che $|\cdot|_A$ è seminorma su E: per H.-B. precedente so $\exists \ell : E \to \mathbb{R}$ lineare tale che $\ell|_G = g$ e $\ell(\cdot) \leq |\cdot|_A$ (per oss.! $\ell \in E'$); in particolare $\ell(x_0) = 1$ ($\Rightarrow \ell \neq 0$) mentre $\forall x \in A$, $\ell(x) \leq |x|_A < 1$: $\ell(x) < \alpha \leq \ell(x_0)$ se $\alpha := 1$.]

Fatti banali in un E normato:

- $\forall x \in E$ e $\forall \lambda, r > 0$, $\lambda B_r(x) = B_{\lambda r}(\lambda x)$ ($\Rightarrow B_r = r B_1$)
- $B_r(x) = x + B_r$ ($= x + rB_1$)
- $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall \lambda > 0, \lambda A \subseteq \lambda B$ (e $A + x \subseteq B + x$)
- $\lambda \overline{A} = \overline{(\lambda A)}$ (e $x + \overline{A} = \overline{(x+A)}$)
- C convesso $\Rightarrow \overline{C}$ convesso

$\Rightarrow$ un'appl. lineare è convessa e simmetrica (cioè T lineare è tale che (·) C conv. $\Rightarrow T(C)$ conv. $\not\Rightarrow \overline{T(C)}$ conv.) (··) $C = -C \Rightarrow T(C) = -T(C)$ $\not\Rightarrow \overline{T(C)} = -\overline{T(C)}$)

$\Rightarrow$ F normato, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ $\overset{\text{cont.}}{\underset{(A \subseteq E)}{\Rightarrow}} T(\overline{A}^E) \subseteq \overline{T(A)}^F$

Casertano, Giovanni, "Hegel e la "Filosofia della natura" di Platone", *Hegel e Platone* (congrès) 2002, 251-284.

Casertano, Giovanni, "Le definizioni socratiche di *episteme*", *Teeteto* (*II*) (congrès) 2002, 87-117.

Cattanei, Elisabetta, "Hegel e Platão, filósofos da matemática", *Hypnos* n° 7, 2001, 37-55. Resomo. Abstract.

Cattanei, Elisabetta, "Hegel e Platone, filosofi della matematica", *Hegel e Platone* (congrès) 2002, 285-208.

Cavallero, Pablo A., "*Apokrinómenos* (Platón, *Apol.* 33b)", *Méthexis* 14, 2001, 127-133.

Centrone, Bruno, "Il concetto di *hólon* nella confutazione della dottrina del sogno (*Theaet.* 201d8-206e12) e i suoi riflessi nella dottrina aristotelica della definizione", *Teeteto* (*II*) (congrès) 2002, 139-155.

Cerri Giovanni, "Una nuova introduzione a Platone" *QUCC* N. S. N° 64, 2000, 145-152. Considerazioni in merito all'opera di G. Reale.

Cherniss, Harold F., "L'économie philosophique de la théorie des idées" [1936], *Platon: les formes intelligibles* (recueil), 2001, 155-176. Présentation et traduction par Jean-François Pradeau.

Chvatík, Ivan, "*Aisópou ti geloîon*", *Symposium Platonicum Pragense* II (congrès) 2001, 174-192.

Clark, Gillian, "Animal passions", *G&R*, Ser. 2, 47, 2000, 88-93. [*Protagoras* 320 C-322 D on animals' lack of reason].

Cohen, Jonathan R., "Philosophy is education is politics. The dramatic interlude in the *Protagoras*", *AncPhil* 22, 2002, 1-2. Bibliography.

Collins, Susan D. and Stauffen, Devin, "The challenge of Plato's *Menexenus*", *RPol* 61, 1999, 95-115. Abstract.

Comoth, Katharina, *Vom Grunde der Idee: Konstellationen mit Platon*, coll. Beiträge zur Philosophie. Neue Folge, Heidelberg (Winter) 2000. 48 pp. Ill.

(In altri termini, se $F \leq E$ è tale che $f|_F \neq 0$ $\forall f \in E' \setminus \{0\}$ allora F è denso in E)

Cordero, Nestor-Luis, "Los atomistas y los celos de Platón", *Méthexis* 13, 2000, 7-16.

Cordero, Nestor-Luis, "Parménide platonisé: à propos du *Parménide* de Marcel Conche", *RPhA* 18, 2000, 15-24. [Parménide vu dans la perspective de Platon].

Cordero, Nestor-Luis, "L'interprétation antisthénienne de la notion platonicienne de forme (*eidos, idea*)", *Philosophie (La) de Platon* (recueil), 2001, 323-344.

Cormak, Michael Shawn, *Virtue, knowledge, and happiness in Plato's early and middle dialogues*. [S. l.]: [s. n.], 1999, 273 pp. Thesis (Ph. D.) – University of Kansas, Lawrence (Kan.), 1999. Summary in: *DAI-A* 1999-2000 60 (8): 2959. Microform available from: University Microfilms International, Ann Arbor (Mich.), no. AAT 9941624.

$\boxed{\text{NOTA}}$: E sp. vett. $\neq \{0_E\}$, $f: E \to \mathbb{R}$ lineare $\neq 0 \Rightarrow \sup_E f = +\infty$ ($\inf_E f = -\infty$)!

[Se $x_0 \in E \setminus \operatorname{Ker} f$ e se $(\lambda_n)_n$ è in $(0, \infty)$ con $\lambda_n \to \infty$, allora $f(\lambda_n x_0) \overset{\text{lin.}}{=} \lambda_n \underbrace{f(x_0)}_{\neq 0} \to +\infty$.]

COROLLARIO "separazione stretta chiuso/compatto" (*): E normato, A,B convessi $\neq \emptyset$ sottoinsiemi di E con $\begin{cases} A \text{ compatto} \\ B \text{ chiuso} \end{cases} \Rightarrow \exists f \in E' \setminus \{0\}, \exists \alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$f|_A < \alpha < f|_B .$$

[Basta che $\exists \varepsilon > 0$ piccolo abbastanza affinché $A^\varepsilon := A + \underbrace{\varepsilon B_1^E}_{(= B_\varepsilon^E)} = \{x + \varepsilon z \mid x \in A, z \in B_1^E\}$ sia (convesso e) disgiunto da B: infatti, in tal caso, $\exists f \in E' \setminus \{0\}$ $\exists \alpha^\varepsilon \in \mathbb{R}$ tale che, $\forall x \in A$ e $\forall z \in B_1^E$ e $\forall y \in B$, $f(x + \varepsilon z) \leq \alpha^\varepsilon \leq f(y)$, ossia

$f(x) + \frac{\varepsilon}{2} f(z) \leq \alpha^\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} f(-z) \leq f(y) + \frac{\varepsilon}{2} f(-z)$; abbiamo $f|_{B_1^E} \neq 0$: se $z \in B_1^E$ è tale che $f(z) > 0$, ossia $f(-z) < 0$, allora $\alpha := \alpha^\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} f(-z)$ è tale che

$f(x) < \ldots \leq \alpha \leq \ldots < f(y)$.

Supponiamo allora per assurdo che $\exists \varepsilon_n \downarrow 0$ tale che $A^{\varepsilon_n} \cap B \neq \emptyset$, per cui $\exists z_n \in B$ tale che $z_n = x_n + \varepsilon_n z$ con $x_n \in A$ e $z \in B_1^E$; ora però per compattezza di A x_n ha limite (in A) (un compatto in un T2 è chiuso) a meno di sottosuccessioni, mentre appunto $\varepsilon_n z \to 0$ $(\|\cdot\|_E)$, per cui z_n avrebbe limite in $A \cap B$ per chiusura di B. □]

Cor. $\Rightarrow$ Gli iperpiani chiusi di E normato sono i nuclei di funzionali lineari continui: $F < E$ non denso in E $\Rightarrow$ $\exists f \in E' \setminus \{0\}$ tale che $(F \subseteq)\ \overline{F}^E \subseteq \operatorname{Ker} f$.

(In particolare, F iperpiano chiuso di E (ossia NON denso) $\Leftarrow$ coincide col nucleo di una certa $f \in E'$.)

[Per ipotesi $\exists x_0 \in E \setminus \overline{F}^E$, per cui $A := \{x_0\}$ e $B := \overline{F}^E$ soddisfano il precedente risultato: $\exists f \in E' \setminus \{0\}$ ed $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tali che $f(x_0) < \alpha < f(y)$ $\forall y \in B$; in particolare $\underset{(F<E)}{0 \in B} \Rightarrow \alpha < 0$, ossia $-\alpha > 0$, e dunque $\alpha < \underbrace{f(-y)}_{-f(y)}$ cioè in totale $f(y) \in (\alpha, -\alpha)$: assurdo perché f è lineare $\neq 0$. □]

(*) : ho così $(x_n)_{n\ge1}$ di Cauchy in E (in realtà in $\overline{B_{r_1}(x_1)}^E \subsetneq A$), per cui per completezza ivi converge, ossia $x_n \to x \in A$; inoltre chiaramente $x \in \bigcap_{n\ge1} O_n$. □]

Dunque: E di Banach o è a dim. finita o è a dim. più che numerabile!
[$X < E$, dim $X < \infty$, è chiuso con $\mathring{X} = \emptyset$ . .]

Athanasatos, "Philosophie et politique chez Platon" [en grec moderne], *Plat<u>o</u>n* 51, 1999-2000, 186-212.

Bader, Françoise, "Les sirènes et la poésie", *Mélanges Kerlouégan* (François) 1994, 17-42. Ill.

Balaudé, Jean-François, Les théories de la justice dans l'antiquité, coll. Philosophie 128, Paris (Nathan) 1996, 128 pp. [Sur Platon, 65-93].

Baltzer, Ulrich, "Beschauer der Reden – Hörer der Taten: übersehene Potentiale antiker Rhetoriktheorie für die Moralphilosophie", *ZPhF* 54, 2000, 365-386.

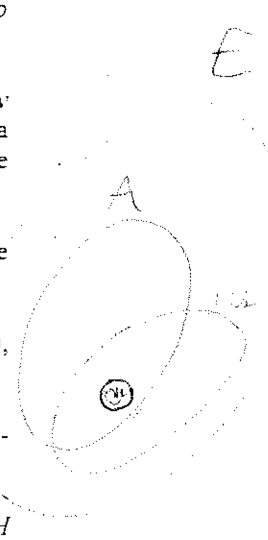
Banfi, Antonio, "*Periklḗs phainoménos politikós*: note su Platone e Pericle", *Suggraphḗ* (congrès) 1998, 35-74.

Baptista, Alexandre Jordão, "*Mûthos* e *lógos* no *Fédon* de Platão", *Reunião da Sociedade Brasileira de Platonistas* (congrès) I, 2001, 135-140. Bibliographie.

Beets, Muus Gerrit Jan, *Socrates on death and the beyond: a companion to Plato's* Phaedo, Amsterdam (Duna) 1997. 278 pp.

Bemelmans, Richard, "Why does Protagoras rush off? Self-refutation and haste in Plato, *Theaetetus* 169a-171d", *AncPhil* 22, 2002, 75-86. Bibliography.

Benoit, Alcides Hector, "Da *koinonia* do não-ser que é a *koinonia* da *polis*", *Reunião da Sociedade Brasileira de Platonistas* (congrès) I, 2001, 33-35.



Bensen-Pagen, Rebecca Adele, *Socratic method and self-knowledge in Plato's early dialogues*. [S.l.]: [s.n.], 1999, 347 pp. Thesis (Ph.D.) – University of California, Santa Barbara (Calif.), 1999. Summary in: *DAI-A* 1999-2000 60 (12): 4459. Microform available from: University Microfilms International, Ann Arbor (Mich.), no. AAT 9956139.

Berardo, "La teoria delle proporzioni della *Repubblica* di Platone: armonizzazione e dissonanze", *A&R* 46, 2001, 1-8.

Bertrand, Jean-Marie, "Le citoyen des cités platoniciennes", *Cahiers Glotz* 11, 2000, 37-55.

Bertrand, Jean-Marie, "Platon et les lois sur le discipline militaire", *QAR* 15, 2001, 9-27.

Bertrand, Jean-Marie, "Réflexions sur l'expertise politique en Grèce ancienne", *RH* 306, 2001, 929-964. [Sur la *République* et sur les *Lois*]

Beverluis, John, *Cross-examining Socrates: a defense of the interlocutors in Plato's early dialogues*. Cambridge (New York [N. Y.] / Cambridge University Pr.) 2000, XII - 416 pp. Index.

Bickmann, Claudia, "Evidenz und Vergewisserung. Zum Verhältnis von noetischem und dianoetischem Denken bei Platon", *PhJ* 103, 1996, 29-47.

Lemma (di Baire): E sp. metrico completo, $(X_n)_{n\ge1}$ chiusi di E con $\mathring{X}_n = \emptyset$ $(X_n \neq E)$ $\Rightarrow$ anche $(\bigcup_{n\ge1} X_n)^{\circ} = \emptyset$. (ma $\bigcup_{n\ge1} X_n \neq E$!)

[Visto che $\overline{(E \setminus X)} = E \setminus \mathring{X}$, è come dimostrare che $(O_n)_{n\ge1}$ aperti densi di E $(O_n \neq \emptyset)$ hanno $\bigcap_{n\ge1} O_n$ densa in E, cioè che $(\bigcap_{n\ge1} O_n) \cap A \neq \emptyset$ per ogni A aperto $\neq \emptyset$ di E. Ora infatti $\exists x_1 \in O_1 \cap A$ (per densità di O_1), e ora $\exists r_1 > 0$ tale che $\overline{B_{r_1}(x_1)}^E \subseteq O_1 \cap A$ (O_1 è aperto come A!); dunque $\exists x_2 \in O_2 \cap B_{r_1}(x_1)$ $(\subseteq O_1)$ e ancora $\exists r_2 > 0$ t.c. $\overline{B_{r_2}(x_2)} \subseteq O_2 \cap B_{r_1}(x_1)$, potendo supporre $r_2 \le \frac{r_1}{2}$ ... ECCETERA : (*)

Teo. BANACH – STEINHAUS (di "limitatezza uniforme")*: E di Banach, F normato, $(T_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{L}(E,F)$ tali che

$$\forall x\in E,\ \sup_{i\in I}|T_i(x)|_F<\infty \;\Rightarrow\; \sup_{i\in I}\|T_i\|<\infty$$

($(T_i(x))_{i\in I}$ limitata in F)

(, ovvero $\exists\, C>0$ tale che, $\forall i\in I$ e $\forall x\in E$, $|T_i(x)|_F\le C|x|_E$).

[Poniamo, $\forall n\ge 1$, $X_n := \{x\in E \mid \forall i\in I,\ |T_i(x)|_F\le n\}$ (chiusi di E!), poiché per ipotesi si ha $\bigcup_{n\ge1}X_n = E$: segue per Baire che $\exists\, n_0\ge 1$ con $\mathring{X}_{n_0}\ne\emptyset$, per cui siano $x\in X_{n_0}$ e $r>0$ tali che $B_r(x)\subseteq X_{n_0}$; per definizione di X_{n_0} otteniamo allora che $|T_i(x)|_F\le n_0\ \forall i\in I$, e che ($B_r(x)=x+rB_1$) $\forall z\in B_1$ $|T_i(x+rz)|_F\le n_0$, $\Rightarrow \forall i\in I$ e $\forall z\in B_1$, $|T_i(z)|_F =$

$$= \Big|\underbrace{T_i\Big(\frac{x+rz}{r}-\frac{x}{r}\Big)}_{=\frac{1}{r}[T_i(x+rz)-T_i(x)]}\Big|_F \le 2\,\frac{n_0}{r}\ . \ \square\ ]$$

(Inoltre ($\Leftarrow$) è ovvio: $\forall x\in E$, $|T_i(x)|_F\le \|T_i\|\,|x|_E \le (\sup_{i\in I}\|T_i\|)\,|x|_E\ \forall i\in I$!)

$\boxed{\text{Cor. 1}}$ E di Banach, F normato, $(T_n)_{n\ge1}$ in $\mathcal{L}(E,F)$ tali che $T_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{F}T(x)\ \forall x\in E$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sup_{n\ge1}\|T_n\|<\infty \\ T\in\mathcal{L}(E,F) \\ \|T\|\le \liminf_n \|T_n\| \end{cases}$$

[S'intende che, $\forall x\in E$, esiste (in F) $\lim^F_{n\to\infty} T_n(x)$, $=: T(x)$ (lineare), per cui ovviamente $\sup_{n\ge1}|T_n(x)|_F<\infty$ (limitatezza succ. conv.) $\overset{B.-S.}{\Rightarrow} \sup_{n\ge1}\|T_n\|<\infty$, ossia $\exists\, C>0$ tale che, $\forall n\ge1$ e $\forall x\in E$, si ha $|T_n(x)|_F\le C|x|_E$ $\overset{(C \text{ non dip. } n)}{\Rightarrow}$ $\forall x\in E$, $|T(x)|_F\le C|x|_E$ ($\Rightarrow T$ continua); infine posso prendere $C:=\liminf_n\|T_n\|$: se infatti $\|T_{n_k}\|\xrightarrow[k]{} C$, allora $\forall x\in E$ $|T(x)|_F=\lim_k|T_{n_k}(x)|_F\le \lim_k(\|T_{n_k}\|\cdot|x|_E)=$
$= C|x|_E$. $\square$]

EDITIONS ET TRADUCTIONS

Oeuvres complètes

Grec et Allemand

Platon im Kontext Plus : griechisch-deutsche Parallelausgabe : mit allen Übersetzungen und Einleitungen Fr. Schleiermachers, ergänzt um Übersetzungen von Fr. Susemihl, H. Müller u. a. Berlin : Worm, 2000. 1 CD-ROM + 1 manuel de 4 p. (Literatur im Kontext auf CD-ROM ; 8).

Anglais

The dialogues of Plato. 3: *Ion*; *Hippias minor*; *Laches*; *Protagoras*, transl. with comment. by Reginal E. Allen, New Haven [Conn.] (Yale Univ. Press) 1996, XIV - 234pp. Index.

Catalan

Diàlegs. 18, Timeu ; Crítias / Plató ; text rev., trad. i notes de Josep Vives, Barcelona (Fundació Bernat Metge) 2000, 188 pp. en partie doubles. (Collecció dels clàssics grecs i llatins ; 317. Escriptors grecs).

Oeuvres particulières

Clitophon

Anglais

Clitophon / Plato ; ed. with introd., transl. and commentary by S[imon] R. Slings, coll. Cambridge classical texts and commentaries 37, Cambridge / New York [N. Y.] (Cambridge University Pr.) 1999, XV - 360 pp. Index.

Eutidemus

Grec et Espagnol

Platón, *Eutidemo*, Introducción, traducción y notas de Ute Schmidt Osmanczik, coll. bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum mexicana, Mexico (UNAM) 2002, XL - 57 pp. Texte grec (Burnet) et traduction en regard.

Io

Français

Platon, *Ion*, Introduction, traduction, notes et bibliographie par Jean-François Pradeau, suivi de Édouard Mehl, *Deux lectures de* l'Ion: M. Ficin [1482] et J.W. Goethe [1797], textes présentés et traduits par Édouard Mehl; et de Jean-Luc Nancy, *Le partage des voix* [1982].

Parmenides

Italien

Parmenide / Platone ; trad., introd. e note di Luc Brisson ; versione italiana a cura di Amalia Riccardo, coll. *Sképsis* : collana di testi e studi di filosofia antica 13, Napoli (Loffredo) 1998. 238 pp. 2 Index.

COR 2 E normato e $A \subseteq E$: $\forall f \in E'$, $f(A)$ limitato (in $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$ A limitato (in E).

[Le $(T_a)_{a\in A}$, $T_a : E' \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(a)$ (E' di Banach!), sono tali che, $\forall f \in E'$,

$|T_a(f)| = |f(a)| \le M$ per ipotesi, per cui $\sup_{a\in A} T_a(f) < \infty$ $\forall f \in E'$,

$\overset{B.-S.}{\Rightarrow}$ $\sup_{a\in A} \underbrace{\|T_a\|}_{=|a|_E} < \infty$. □]

Teorema della MAPPA APERTA : E, F di Banach, $T \in \mathcal{L}(E,F)$,

T suriettivo $\Rightarrow$ T aperto.

[La tesi equivale ad avere che $\exists\, r > 0$ t.c. $B_r^F \subseteq T(B_1^E)$: infatti, in tal caso, per ogni $A \subseteq E$ aperto $\neq \emptyset$, se $B_\rho^E(x_0) \subseteq A$ per opportuni $x_0 \in A$ e $\rho > 0$, allora

$T(A) \supseteq T(B_\rho^E(x_0)) = T(x_0 + \underbrace{B_\rho^E}_{(=\rho B_1^E)}) = T(x_0) + \rho T(B_1^E) \supseteq T(x_0) + \rho B_r^F =$

$= B_{\rho r}^F(T(x_0))$ (dunque $T(A)$ è aperto in F : $\forall\, T(x_0) \in T(A)$, $\exists\, r' > 0$ tale che $B_{r'}^F(T(x_0)) \subseteq T(A)$: $r' = \rho r$ se $\rho > 0$ è tale che $B_\rho^E(x_0) \subseteq A$).

In realtà ora ciò equivale al fatto che $\exists\, r > 0$ t.c. $B_r^F \subseteq \overline{T(B_1^E)}^F$, "diciamo" $B_{3r}^F \subseteq \overline{T(B_1^E)}^F$, cioè $B_r^F \subseteq \overline{T(B_{1/3}^E)}^F \underset{No!}{\overset{2(*)}{=}} T(\overline{B_{1/3}^E}^E) \subseteq T(B_1^E)$, appunto. !

Siano per questo $X_n = n\overline{T(B_1^E)}^F$, $= \overline{T(B_n^E)}^F$, chiusi di F che per suriettività di T hanno $\bigcup_{n\ge 0} X_n = F$ ($X_n \subseteq X_{n+1}$ e $E = \bigcup_{n\ge 0} B_n^E$), $\overset{\text{Baire (su } F)}{\Rightarrow}$

$\exists\, n_0 \ge 1$ tale che $\mathring{X}_n \neq \emptyset$, ovvero finché $\exists\, y \in X_n$ e $\rho > 0$ tale che

$B_\rho^F(y) \subseteq X_n = n\overline{T(B_1^E)}^F$, cioè $B_{\rho/n}^F(y/n) \subseteq \overline{T(B_1^E)}^F$ $(= X_1)$; ora

poiché $\overline{T(B_1^E)}^F = X_1$ è simmetrico e convesso, per cui $-\frac{y}{n} \in X_1$ così avremo dunque

$\frac{1}{2}\left(B_{\rho/n}^F(y/n) - \frac{y}{n}\right) \subseteq X_1$, cioè $B_{\frac{\rho}{2n}}^F \subseteq X_1$. □]

(E normato (1.E), $G, L < E$ ⟹ $(G+L < E)$

$T : G \times L \to G + L$, $(x, z) \mapsto x + z$, è suriettiva, lineare e continua ! $[|x+z| \le |x| + |z|]$)

Ensayos para una Historia de la Filosofía. De los Presocráticos a Leibniz, Caracas, (Fondo Editorial de Humanidades. Universidad Centra de Venezuela) 1998, 496 pp.

Hermenèutica i Platonisme — *Hermenèutica i Platonisme*, edició a cura de Josep Monserrat Molas, Barcelona (Barcelonesa d'edicions) 2002, 190 pp. préface de Josep Monserrat Molas.

Homo Pictor — *Homo Pictor*, Redaktion Stephen E. Hauser, München / Leipzig (Saur) 2001, XIII - 390 pp. 61 Taf.

Justice (La) — *La Justice*, ouvrage dirigé par Guy Samama, Paris (Ellipses) 2001, 255 pp.

Körper (Der) und die Religion — *Der Körper und die Religion : das Problem der Konstruktion von Geschlechterrollen*, Elmar Klinger, Stephanie Böhm, Theodor Seidl (Hg.), Würzburg (Echter) 2000. 224 pp. Ill.

Lengua científica griega (La) — *La lengua científica griega : orígenes, desarrollo e influencia en las lenguas modernas europeas. 2, Los compuestos de pouw, Aristófanes, Platón, comedia postaristofánica, interferencias del griego y el latín, Ortega y Gasset* / ed. por Juan Antonio López Férez, coll. Estudios de filología griega 6, Madrid (Ed. Clásicas) 2000. 305 pp. 2 Index.

Lettres et lois — *Lettres et Lois. Le droit au miroir de la littérature*, sous la direction de François Ost, Laurent Van Eynde, Philippe Gérard, Michel van de Kerchove, Publications des Facultés Universitaires Saint-Louis, Bruxelles, 2001.

Liebe und Gebot : Studien zum Deuteronomium / Reinhard G. Kratz & Hermann Spieckermann (Hg.), coll. Forschungen zur Religion und Literatur des Alten und Neuen Testaments 190, Göttingen (Vandenhoeck und Ruprecht) 2000, 231 pp. Ill.

Meisterwerke der antiken Literatur — *Meisterwerke der antiken Literatur : von Homer bis Boethius*, hrsg. von Martin Hose, coll. Beck'sche Reihe 1382, München (Beck) 2000. 187 pp.

Mesure (La) de l'humain selon Platon — *La mesure de l'humain selon Platon*, Paris (Vrin) 2002, 218 pp. Bibliographie. Index des passages cités. Index des auteurs anciens et médiévaus. Index des auteurs modernes et contemporains.

Nord (Le) — *Le Nord, latitudes imaginaires*, textes réunis par Monique Dubar et Jean-Marc Moura, Travaux et recherches, Lille (Univ. Charles-de-Gaulle – Lille 3) 2001,

Philosophie (La) de Platon — *La philosophie de Platon*, sous la direction de Michel Fattal, coll. Ouverture Philosophique, Paris (L'Harmattan) 2001. Présentation par Michel Fattal. Index des auteurs anciens et médiévaux. Index des auteurs modernes et contemporains.

Platon: l'amour du savoir — *Platon: l'amour du savoir*, coordonné par Michel Narcy, coll. Débats philosophiques, Paris (PUF) 2001, 170 pp. Introduction par Michel Narcy, p. 7-11.

(E, F normati ⟹ $E \times F$ normato (ob. es.) con $|(x,y)|_{E\times F} = |x|_E + |y|_F$ $(\forall x \in E\ \forall y \in F)$;

E, F sp Banach ⟹ tale $E \times F$ sp Banach,

e $(x_n, y_n) \xrightarrow{E\times F} (x, y) \iff \begin{cases} x_n \xrightarrow{E} x \\ y_n \xrightarrow{E} y \end{cases}$!)

Corollari ① E, F di Banach, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ bigettiva $\Rightarrow T$ omeomorfismo .

② Se $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ sono due norme su E (sp. vett.) tali per cui E risulti di Banach, allora o sono non confrontabili o sono equivalenti .

[② Supp. $\exists\, \beta>0$ t.c. $|\cdot|_2 \leq \beta |\cdot|_1$, ossia che $id_E : (E,|\cdot|_1) \to (E,|\cdot|_2)$ sia continua : allora per (1) è un omeomorfismo.]

(Cor1)

Teorema del GRAFICO CHIUSO ⊛ : E, F di Banach, $T : E \to F$ lineare, $\Gamma_T := \{(x,y) \in E\times F \mid y = T(x)\}$ "grafico di T" : $\underset{(\text{in } E\times F)_{(\text{per norma})}}{\Gamma_T \text{ chiuso}} \Leftrightarrow T$ continua.

[($\Leftarrow$) Siano $(x_n, T(x_n)) \xrightarrow{E\times F} (x,y)$; allora $x_n \xrightarrow{E} x \overset{\text{cont}}{\Rightarrow} T(x_n) \xrightarrow{F} T(x)$, per cui deve essere $y = T(x)$. ($\Rightarrow$) Poniamo, $\forall x \in E$, $|x|_T := |(x, T(x))|_{E\times F} = |x|_E + |T(x)|_F$, che è norma su E (T lineare!) tale che $|\cdot|_E \leq |\cdot|_T$; dico che Γ_T chiuso $\Rightarrow (E, |\cdot|_T)$ è di Banach, per cui avrei (per (2) sopra) che $\exists\, c>1$ t.c. $|\cdot|_T \leq c|\cdot|_E \Rightarrow \forall x \in E$, $|T(x)|_F \leq (c-1)|x|_E$ cioè T continua! Allora, sia $(x_n)_n$ di Cauchy in $(E, |\cdot|_T)$, ossia $\begin{cases} (x_n)_n \text{ di Cauchy in } E \\ (T(x_n))_n \text{ di Cauchy in } F \end{cases} \overset{\text{compl.}}{\Rightarrow} \begin{cases} x_n \xrightarrow{E} x \\ T(x_n) \xrightarrow{F} y \end{cases}$, ossia $(x_n, T(x_n)) \xrightarrow{E\times F} (x,y)$ e $y = T(x)$, poiché per chiusura di Γ_T dovrebbe $(x,y) \in \Gamma_T$, e pertanto $x_n \xrightarrow{|\cdot|_T} x$ $\left(T(x_n - x) \overset{\text{lin.}}{=} T(x_n) - \underset{y}{T(x)}\right)$. □]

(Cor2)

E normato, $G < E$ chiuso ha "supplementare topologico" $L < E$ se L è chiuso, $G \cap L = \{0\}$ e $G + L = E$ (per cui $E = G \oplus L$) ; in tal caso G è il suppl. top. di L.

[Es.: (a) E di Hilbert e $G < E$ chiuso : $L = G^\perp$ (ma non è il solo!) ; (b) $G < E$ chiuso di codimensione finita : $L =$ un suppl. algebrico ; (c) $G < E$ di dimensione finita ⊛]

L'importanza del concetto sta nel seguente risultato .

$(\cdot)\ P_{\mathcal{L}}|_{\mathcal{L}} = id_{\mathcal{L}} \quad ((P_G)|_G = id_G)$

Bibliographie Platonicienne 2001-2002

NOTARE : $(\cdot)\ (P_{\mathcal{L}})|_G = 0 \quad (=(P_G)|_{\mathcal{L}})$
(E Banach, G, L n.t.)
$(\cdot)\ \forall x \in E,\ x - P_{\mathcal{L}}(x) = P_G(x) \in G$

((Quindi, se $E \neq 0$ e se $\mathcal{L} \neq 0$, allora $\mathrm{Ker}\, P_{\mathcal{L}} = G$!
$(\Rightarrow E = \mathrm{Ker}\, P_{\mathcal{L}} \oplus \mathrm{Ker}\, P_G)$
$(= \mathrm{Im}(P_G) \oplus \mathrm{Im}(P_{\mathcal{L}}))$))

Congrès

Congrès de l'Association des Sociétés de Philosophie de Langue Française XXVII – *La Métaphysique. Son histoire, sa critique, ses enjeux*, conférences plénières du XXVII[e] Congrès de l'A.S.P.L.F., éditées par Jean-Marc Narbonne et Luc Langlois, Collection Zêtêsis, Paris (Vrin) / Québec (Presses de l'Univ. Laval) I, 1999, 256 pp.: II, 2000, 1097 pp.

Hegel e Platone — *Hegel e Platone. Atti del Convegno internazionale di Cagliari* [21-22 Aprile 1998], a cura di Giancarlo Movia, Prefazione di Klaus Düsing, con una Bibliografia su "Hegel e i filosofi greci", a cura di Raffaella Santi, Università degli studi di Cagliari. Facoltà di Lettere e filosofia. Dipartimento di filosofia e Teoria delle Scienze Umane, Cagliari (AV) 2002, 536 pp. Indice dei nomi.

Lirica (Dalla) al teatro — *Dalla lirica al teatro*: nel ricordo di Mario Untersteiner (1899-1999). Atti del convegno Internazionale di Studio, Trento – Rovereto. febbraio 1999, a cura di Luigi Belloni, vittorio Citti, Lia de Finis, coll. Labirinti 43, Trento, Dipartimento di scienze filologiche et storiche, 1999, 451 pp.

Rede und Redner — *Rede und Redner: Bewertung und Darstellung in den antiken Kulturen: Kolloquium* [Frankfurt a.M., 14.-16. Oktober 1998], hrsg. von Christof Neumeister und Wulf Raeck, coll. Frankfurter archäologische Schriften 1, Möhnesee (Bibliopolis) 2000, XI - 312 pp. Ill.

Reunião da Sociedade Brasileira de Platonistas I — Atas da Primeira *Reunião da Sociedade Brasileira de Platonistas* [Poços de Caldas – ANPOF 4-6 Ouтubro de 2000], Cadernos de Atas da ANPOF n° 1, 2001.

Sortego pubblico e cleromanzia — *Sortego pubblico e cleromanzia dell' Antichità all' Età moderna,* Atti della Tavola rotonda, a cura di Federica Cordano e Cristiano Grottanelli, Università degli Studi di Milano, dipartimento di Scienze dell'Antichità [26-27 Gennaio 2000], Milano (Università degli Studi di Milano) 2001.

Struttura del dialogo platonico (La) — *La struttura del dialogo platonico*, a cura di Giovanni Casertano, coll. *Sképsis*: collana di testi e studi di filosofia antica 14, Napoli (Loffredo) 2000. 331 pp. Index. Actes d'un colloque international qui s'est tenu à Naples en mai 1998.

Suggraphē — *Suggraphē: materiali e appunti per lo studio della storia e della letteratura antica*, a cura di Delfino Ambaglio, Como (New Press) 1998. 156 pp. Ill. Raccolta di lezioni tenute presso la sezione di Storia Antica del Dipartimento di Scienze dell'Antichità dell'Università di Pavia.

Symposium Platonicum Pragense II — *Plato's* Phaedo. *Proceedings of the second Symposium Platonicum Pragense*, edited by Aleš Havlícek and Filip Karfik, Prague (*Oikoumenē*) 2001, 474 pp. Preface. Index locorum.

Teeteto (Il) — *Il* Teeteto *di Platone: struttura e problematiche* [Convegno, Napoli, 21-23 febbraio 2000], a cura di Giovanni Casertano, coll. *Sképsis*: collana di testi e studi di filosofia antica 15, Napoli (Loffredo) 2002, 264 pp. Indice dei nomi.

($\boxed{\times}$ $G = \{0_E\} \Rightarrow \mathcal{L} = E$; $G = \langle z \rangle$, $z \neq 0$ (in E) $\Rightarrow$ se $f \in E'$ è tale che $z \notin \mathrm{Ker} f$, allora sappiamo che $E = \mathrm{Ker} f \oplus \langle z \rangle$ (dunque $\mathcal{L} = \mathrm{Ker} f$) ; $G = \langle z_1, z_2 \rangle$ con $z_1, z_2 \in E$ indipendenti, $g_i(a_1 z_1 + a_2 z_2) = a_i$ $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e $i \in \{1,2\}$ ($g_i : G \to \mathbb{R}$ lineare continua con $\mathrm{Ker}\, g_i = \langle z_j \rangle$ se $i \neq j$ (in $\{1,2\}$)) $\overset{H.-B.}{\Rightarrow} \exists f_i \in E'$ tale che $f_i|_G = g_i$ (e $\|f_i\| = \|g_i\| = |z_i|_E^{-1}$), per cui $G \cap \mathrm{Ker} f_1 \cap \mathrm{Ker} f_2 = \{0_E\}$ e dunque $\mathcal{L} = \bigcap_{i \in \{1,2\}} \mathrm{Ker} f_i$, visto (usando) che, $\forall x \in E$, $x = \underbrace{(x - \sum_{i=1,2} f_i(x) z_i)}_{\in \mathcal{L}} + \underbrace{\sum_{i=1,2} f_i(x) z_i}_{\in G}$ $(f_i(z_j) = g_i(z_j) = \delta_{ij})$. ECC. $\square$)

Teorema (dei "proiettori"): E di Banach, $G, L < E$ chiusi supplementari (8)

topologici $\Rightarrow \exists! \begin{cases} P_G \in \mathcal{L}(E,G) \\ P_L \in \mathcal{L}(E,L) \end{cases}$ tale che, $\forall x \in E$, $x = P_G(x) + P_L(x)$.

(per cui risultano (per surriettività) aperte!)

Sappiamo che $E = G \oplus L$, $\forall x \in E$ $\exists!$ $y \in G$, $z \in L$ tale che $x = y + z$, per cui $P_G(x) := y$ e $P_L(x) := z$ sono ben def. e lineari; per la continuità dimostriamo il seguente lemma (che la implica subito).

Lemma: E di Banach, $G, L < E$ chiusi con $G+L$ chiuso $\Rightarrow$ $\exists\, C > 0$ tale che, $\forall x \in G+L$ $(\subseteq E)$, $\exists\, y \in G$ e $\exists\, z \in L$ tale che

$$\begin{cases} x = y + z \\ |y|_E \le C|x|_E \\ |z|_E \le C|x|_E \end{cases}$$

[G, L e $G+L$ sono per ipotesi completi e lo sono (su $G \times L$), ossia di Banach, per cui...

$T: G \times L \to G+L$, $(y,z) \longmapsto y+z$ è aperta (TEO.): $\exists\, r > 0$ tale che si abbia

$\overline{B_1^{G+L}}^{G+L} \subseteq T\left(\overline{B_{1/r}^{G\times L}}^{G\times L}\right)$; in particolare, $\forall x' \in G+L$ con $|x'|_E = 1$, $\exists\, y' \in G$ e $\exists\, z' \in L$ con $|y'|_E + |z'|_E \le \frac{1}{r}$ e tale che $y' + z' = x'$:

Dunque $\begin{cases} |y'|_E \le \frac{1}{r} \\ |z'|_E \le \frac{1}{r} \end{cases}$ $\left(= \frac{1}{r} \cdot 1 = \frac{1}{r}|x'|_E\right)$ e pongo $C := r^{-1}$. Segue che,

$\forall x \in G+L$, $x = \|x\|_E \underbrace{\frac{x}{\|x\|_E}}_{=:x'} = \|x\|_E(y' + z') =: \underset{\in G}{y} + \underset{\in L}{z}$ e ad es. $y = \|x\|_E y'$ che

$|y|_E = |y'|_E |x|_E \le \frac{1}{r}|x|_E = C|x|_E$.] $\square$]

$\boxed{\text{EX}}$ E di Banach $\neq \{0\}$, $G, L < E$ suppl. topologici, $L \neq \{0\}$ $\Rightarrow \|P_L\| = 1$.

$\|P_L\| := \sup_{x \in B_1^E} |P_L(x)|_E$; ma $P_L(x) = 0$ $\forall x \in G \Rightarrow \|P_L\| = \sup_{B_1^L} |P_L|_E$; ma ora, $\forall x \in L$, $P_L(x) = x$. $\square$ (Notare che, se E è normato $\neq \{0\}$ e $P: E \to E$ lineare $\neq 0$ tale che $P^2 = P$, allora $\|P\| \ge 1$: infatti $\|P\| = \|P^2\| \le \|P\|^2$ ...)

$T(x_n) \xrightarrow{F} T(x)$ e necessariamente $T(x) = T(x_0)$

$T(x_{n_k}) \xrightarrow{F} x$; $S(T(x_{n_k})) \xrightarrow{E} x$ ⟹ $x = S(x_0)$: infatti anche $y = T(x_0)$, $x_0 \in E$ [illegible], per cui anche $x = S(T(x_0)) = P_L(x_0)$ ($\in L$), cioè che $x_0 - x \in G = \mathrm{Ker}(T)$; ma infatti $T \circ S = id_F$ ⟸ ...... in effetti $T \circ S$ è chiaro (in $F \times E$)!

PERIODIQUES

A&A — Antike und Abendland. Beiträge zum Verständnis der Griechen und Römer und ihres Nachlebens, Berlin.
AANL — Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Morali, Storiche et Filologiche, Roma.
Acme — Annali della Facoltà di filosofia e Lettere dell' Università statale di Milano, Milano.
AAntHung — Acta Antiqua Academiae Scientiarum Hungaricae. Akadémiai Kiadó, Budapest.
AFC — Anales de Filologia clásica, Facultad de Filosofía y Letras, Buenos-Aires.
AGPh — Archiv für Geschichte der Philosophie, Berlin.
AIIS — Annali dell' Istituto Italiano per gli studi storici, Napoli.
AJPh — American Journal of Philology, Baltimore.
AncPhil — Ancient Philosophy, Pittsburg.
AncW — The Ancient World, Chicago.
Anregung — Zeitschrift für Gymnasialpädagogik, München.
Apeiron — Department of Philosophy, University of Alberta [Canada].
APSR — American Political Science Review, Washington D.C.
A&R — Atene e Roma. Rassegna trimestrale dell'Associazione Italiana di cultura classica, Firenze.
ASCF — Anvari de la Sócietat Catalana de Filosofia, Barcelona.
ASCL — Archivio Storico per la Calabria e la Lucania, Assoc. nazionale per gli ingeressi del Mezzogiorno d'Italia, Roma.
Athenaeum — Studi periodici di Letteratura e Storia. Università di Pavia.

BPhJAM — Bochumer Philosophisches Jahrbuch für Antike und Mittelalter, Amsterdam.

Cahiers Glotz — Cahiers du Centre Gustave-Glotz, Paris.
CFC(G) — Cuadernos de Filología clásica. Estudios griegos y indoeuropeos, Madrid.
Chiron — Mitteilungen der Kommission für alte Geschichte und Epigraphik des Deutschen Archäologischen Instituts, München.
CJ — The Classical Journal. Univ. of Georgia, Athens [Ga.].
ClAnt — University of California Press, Berkeley.
CM — Clio Medica. Acta Academiae internationalis historie medicinae, Amsterdam.
CPh — Classical Philology, Chicago.
CPhS — Les Cahiers Philosophique de Strasbourg, Strasbourg.
CQ — Classical Quarterly, Oxford [UK].

DA — Dissertations Abstract: International abstracts of dissertations available in microfilms or as xerographic reproductions, Univ. Microfilms, Ann Harbor [Mich.],
Diadokhe — Revista de Estudios de Filosofía Platónica y Cristiana, Buenos aires / Santiago de Chile.
Dionysius — Dalhousie Univ. Dept. of Classics, Halifax [Nova Scotia], Canada.

(8)

E, F di Banach, $T \in \mathcal{L}(E,F)$: $S : F \to E$ lineare è "inversa sinistra" di T se $S \circ T = id_E$ e $S \in \mathcal{L}(F,E)$ (ossia S è continua); dunque ciò che serve per T iniettiva, e S sarebbe suriettiva. Simmetricamente, S è "inversa destra" di T se $T \circ S = id_F$ e $S \in \mathcal{L}(F,E)$, che ha senso per T suriettiva ed implicherebbe S iniettiva. Notiamo che « S è inversa sinistra/destra di T » $\Leftrightarrow$ « T è inversa destra/sinistra di S ».

1) Se $T \in \mathcal{L}(E,F)$ iniettiva ha inversa sinistra $S \in \mathcal{L}(F,E)_{(sx)}$, allora $Im(T)$ è chiusa in F e ha supplementare topologico $Ker(S)$ (in F). Analogo: Se T suriettiva ha inversa destra $S_{(in)}$, allora $Im(S)$ è chiusa in E e $Ker(T)$ ha per supplementare topologico (proprio $Im(S)$).

[(i) $Im(T)$ chiusa : se $T(x_n) \xrightarrow{F} y$, allora $x_n = S(T(x_n)) \xrightarrow{E} S(y)$ e quindi $T(x_n) \to T(S(y))$ e necessariamente $y = T(S(y))$ $(\in Im(T))$. ✓

(ii) $Im(T) \cap Ker(S) = \{0\}$: se $y \in F$ è tale che $\begin{cases} S(y) = 0 \\ \exists x \in E : y = T(x) \end{cases}$, allora $x = S(T(x)) = S(y) = 0$ e quindi $y = T(0) = 0$. ✓

(iii) $Im(T) + Ker(S) = F$: $\forall y \in F$, $y = T(S(y)) + [y - T(S(y))]$. □] (NOTA: per ora bastavano E,F normati!)

2) Teorema (delle inverse) (E,F Banach) : $\boxed{I}$ Se T iniettiva ha $Im(T)$ chiusa con supplementare topologico, allora ha un'inversa sinistra.

$\boxed{II}$ Se T suriettiva ha $Ker(T)$ che ammette supplementare topologico, allora ha un'inversa destra.

[(I) Sia $L := Im(T)$ e sia $G < F$ suo suppl. topologico; dato che $T : E \to T(E)$ ($Im(T) = L$) è biiezione (anche lin. cont.) $\Rightarrow$ omeo (T^{-1} cont.!), e volendo $S \in \mathcal{L}(F,E)$ tale che $S \circ T = id_E$ e tale che (possibilmente) abbia $Ker\, S = G$, pongo $\forall y \in F$ $S(y) := T^{-1}(P_L(y))$, cioè $S = T^{-1} \circ P_L$ $\Rightarrow$ S è lin., cont., (e, $Ker\, S = Ker\, P_L = G$,) e tale che, $\forall x \in E$, $S(T(x)) = T^{-1}(\underbrace{P_L(T(x))}_{= T(x)!}) = x$. ✓

(II) Sia $G := Ker(T)$ e sia $L < E$ suo suppl. topologico; so che T è suriettiva, per cui cerco $S \in \mathcal{L}(F,E)$ "sui $T(x)$, $x \in E$," tale che $T \circ S = id_F$ e tale che abbia a posteriori $Im(S) = L$: pongo $\forall x \in E$ $S(T(x)) := P_L(x)$. Ora, S è ben definita (e quindi lineare) perché $T(x) = T(x') \Leftrightarrow x - x' \in Ker\, T = G = Ker\, P_L$; e inoltre ($\forall x \in E$) $T(P_L(x)) = T(x)$ in quanto $x - P_L(x) \in G = Ker(T)$; infine S è continua perché T è aperta $\Rightarrow \exists r > 0 : \overline{B_1^F} \subseteq T(\overline{B_{1/r}^E}) \Rightarrow \sup_{|y|_F \le 1} |S(y)|_E \le \sup_{|x|_E \le 1/r} \underbrace{|S(T(x))|_E}_{|P_L(x)|_E} \le c\,\frac{1}{r}$. □]

Ci sono altri passi in cui aggettivi, come *patrius, fraternus*, hanno una particolare pregnanza solo in relazione agli eventi noti dal contesto:

> in tanta mala praecipitatus ex patrio regno (14, 23)
> deinde patrio regno me expulit (24, 6).

In entrambi i casi è Aderbale che parla, la prima volta di persona, davanti al senato, la seconda tramite una lettera portata dai messi a Roma e letta in senato: *patrius* vale «di mio padre», non si può non capire, il senato è ben informato di tutta la vicenda, proprio il figlio legittimo, legittimo successore al trono, è stato privato di tutto. *Patrius* è qui una forte eco interna, udibile solo per chi è 'dentro' il racconto.

Nel capitolo 39 viene descritta la situazione a Roma dopo la notizia della resa vergognosa di Aulo e la conseguente condotta del fratello Albino:

> ob ea consul Albinus ex delicto fratris invidiam ... timens (39, 2).

E poco più avanti:

> quamquam persequi Iugurtham et mederi fraternae invidiae animo ardebat (39, 5).

L'uso di *fraternus* non rinvia al concetto astratto, ma a quanto noto in merito al comportamento di Aulo e alla conseguente malevolenza della comunità nei suoi confronti. Sallustio ha operato nel contesto il legame tra *frater, delictus* e *invidia*, pertanto il sintagma con l'aggettivo non solo è legittimo, ma anche fortemente espressivo[46].

Analogamente le espressioni *bello Iugurthino* (19, 7)[47], *milites Iugurthini* (21, 2; 56, 6), trovano la loro giustificazione nella già avvenuta connessione storica e linguistica tra *bellum, milites* e *Iugurtha*.

---

[46] Nella *Catilinae Coniuratio* troviamo *multi autem ... volventes hostilia cadavera amicum alii, pars hospitem aut cognatum reperiebant* (61, 8): qui *hostilia* sembra valere proprio «dei nemici». Siamo nel capitolo finale dell'opera, si è conclusa la battaglia tra l'esercito di Catilina e quello dei Romani, rimangono desolazione e morte. poco prima Sallustio collega *cadavera* con *hostes*, in quanto *Catilina vero longe a suis inter hostium cadavera repertus est* (61, 2), Catilina viene rinvenuto lontano dai suoi, in mezzo a cadaveri di nemici, quelli dello schieramento avverso, contro i quali si era lanciato con grande coraggio e orgoglio. L'immagine è fortemente legata alla battaglia in atto, quando coloro contro cui si combatte non possono che essere *hostes*. Poco più avanti, come detto, leggiamo *hostilia cadavera*, un nesso dunque 'fondato' nel racconto. Ma non solo: i soldati usciti dall'accampamento vanno nel luogo di battaglia per curiosare o per predare e, nel rivoltare i cadaveri dei nemici, trovano un amico o un ospite o un congiunto, talvolta un nemico personale: l'atrocità delle guerre civili sta nel fatto che possono diventare *hostes* anche uomini uniti da forti legami. Questi *cadavera* che svelano sembianze note, in alcuni casi anche amate, non possono essere definiti *hostium*, cioè di veri e propri nemici, ma *hostilia*, cioè di uomini che, in un determinato frangente, si sono comportati da nemici. Cfr. R. JACOBS - H. WIRZ - A. KURFESS, *C. Sallusti Crispi De Coniuratione Catilinae Liber, Orationes et Epistulae ex Historiis excerptae*, Berlin-Zürich 1965[12], 122: «hostilia nicht schlechtweg = hostium, sondern = derer, die ihnen als Feinde gegenüberstanden». F. GIANCOTTI, *Strutture delle monografie di Sallustio e di Tacito*, Messina-Firenze 1971, 77: «l'avvicendarsi di letizia e tristezza è conseguenza del fatto che non una guerra tra genti straniere è finita or ora, ma una guerra civile ... La vittoria dell'esercito del senato - per benefica che, in sé, appaia agli occhi dello scrittore - non è risolutiva, non è separabile dal problema della crisi generale di cui la monografia è compenetrata».

[47] MAROUZEAU, *op. cit.* (n. 22), 218: «[Löfstedt] observe que l'emploi de l'adjectif paraît propre à exprimer la qualité ... tandis que l'emploi du substantif au génitif exprime essentiellement la

La "topologia debole" "$\sigma(E,E')$" su $(E,|\cdot|_E)$ normato è la topologia meno fine tra quelle su E rispetto alle quali restano continue le $f\in E'$ $(B(E'))$, cioè è la topologia su E di base $\left\{\bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(I_i)\right\}_{m\in\mathbb{N},\ I_i\subseteq\mathbb{R}\text{ aperto},\ f_i\in E'_{(B(E'))}}$ (e tale che quindi, $\forall x\in E$, x ammette come sistema fondamentale di intorni (aperti di tale base) $\left\{\bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}((f_i(x)-\varepsilon, f_i(x)+\varepsilon))\right\}_{m\in\mathbb{N},\ \varepsilon>0,\ f_i\in E'_{(B(E'))}}$).

Questa topologia è sempre meno fine di quella "forte" di spazio metrico, e in effetti se $\dim E=\infty$ allora è propria davvero: infatti, in questo $\forall \alpha\in\mathbb{R}$ $f^{-1}(\alpha)$ è un iperpiano (chiuso) di E, un aperto debole contiene un'intersezione finita di nuclei d'iperpiani (chiusi) di E, e in particolare un'intersezione finita di iperpiani, la quale a $\dim\infty$ è sempre "illimitata" nel senso che contiene almeno una retta! (In particolare, gli aperti forti limitati non sono aperti deboli; ad esempio $\mathrm{int}_\sigma(B_1^E)=\emptyset$.) Al contrario, se $E\underset{(|\cdot|_E\sim|\cdot|_2)}{\cong}\mathbb{R}^d$, allora le due topologie coincidono: infatti, supposto $d\geq 1$ e considerate $\forall i\in\{1,\dots,d\}$ le proiezioni $\pi_i((x_1,\dots,x_d))\doteq x_i$, ho che $\forall x=(x_1,\dots,x_d)\in E$ e $\forall r>0$

$$x\in\bigcap_{i=1}^{d}\pi_i^{-1}\left(\left(\pi_i(x)-\frac{r}{d},\ \pi_i(x)+\frac{r}{d}\right)\right)\subseteq B_r^E(x)$$

(essendo che, se $y\in E$ ha qui $|y_i-x_i|<\frac{r}{d}$, allora ha $|y-x|_2=\left\{\sum_{i=1}^{d}(y_i-x_i)^2\right\}^{1/2}\underset{(CK)}{\leq}\sum_{i=1}^{d}|y_i-x_i|<r$!)

Anche sui chiusi riusciamo a dir qualcosa di più preciso (a conoscenza del fatto che, $\forall A\subseteq E$, $\overline{A}^\sigma\supseteq\overline{A}$ (essendo che un chiuso debole è un chiuso forte!)): se $C\subseteq E$ è un convesso chiuso $\neq\emptyset,E$, e se $x\in E\setminus C$, allora per "H.-B. stretto" $\exists f\in E'\setminus\{0\}$ e $\exists\alpha\in\mathbb{R}$ tale che $f|_C<\alpha<f(x)$, per cui $x\in f^{-1}((\alpha,\infty))\subseteq E\setminus C$ e quindi C è pure chiuso debole!

Riassumendo: per $\underset{(\text{es: }\neq\emptyset,E)}{C}$ convesso di E, C chiuso $\iff$ C deb. chiuso.

È chiaro inoltre che $(E,\sigma(E,E'))$ è T2 (ragionando allo stesso modo).

(1) Per C convesso di E, $\overline{C}^\sigma=\overline{C}$. [Ovvio $\subseteq$, ma infatti $\overline{C}$ è un convesso chiuso ($\Rightarrow$ deb. chiuso) che contiene C!]

μετὰ τὴν βασιλέος ἐξέλασιν (183, 2)
τὴν βασιλέος γνώμην (239, 3).

Πατρώιος / πατρός, πατέρων

Demarato è stato destituito dal governo di Sparta grazie alle manovre di Cleomene, il quale riesce a far credere che Demarato non sia figlio legittimo di Aristone (VI 63-67). Demarato fugge allora in Asia, presso il re Dario, aiuta Serse nella contesa per la successione al trono e segue poi Serse nella spedizione contro la Grecia. A Dorisco Serse chiede a Demarato se i Greci sono in grado di resistere al suo assalto e Demarato, nel corso della sua risposta, afferma di dire solo la verità quando esalta il valore dei Greci, soprattutto degli Spartani, dai quali ha peraltro avuto un pessimo trattamento:

οἵ με τιμήν τε καὶ γέρεα ἀπελόμενοι πατρώια ἄπολίν τε καὶ φυγάδα πεποιήκασι (104, 2).

Γέρεα πατρώια sono tutte le prerogative che un padre, in questo caso un re, consegna al figlio, si tratta di privilegi che Demarato in base alle norme doveva avere e che proditoriamente gli sono stati tolti, privilegi che vanno al di là del singolo caso, perché sono sanciti dalla città.

L'uso invece di πατρός, πατέρων è relativo alla situazione individuale:

Ἀρτάβανε, πατρὸς εἷς τοῦ ἐμοῦ ἀδελφεός (11, 1)
ἐὼν πατέρων τῶν ἐμῶν δοῦλος (11, 4)[34].

Una situazione più fluida sembra nascere dall'osservazione dei nomi di popolo (in particolare Ἕλληνες, Πέρσαι e Μῆδοι). Infatti troviamo:

ὡς Ἑλλήνων λόγος (95, 1)
οἱ ἄγγελοι τῶν Ἑλλήνων (157, 1)
ἁπάσῃ τῇ Ἑλλήνων στρατιῇ (158, 4)
κατὰ τῶν Ἑλλήνων λόγον (189, 1)
τὰς ... τῶν Ἑλλήνων νέας (194, 1)

ma anche

---

[34] Sembra interessante un passo del II libro in cui troviamo τοῦ πατρὸς τὸν νέκυν e, poco più avanti, ἐν ἐκείνῳ τῷ πατρωίῳ τάφῳ (132, 2). Si parla di norme promulgate dal re egiziano Asichi: per ricevere un prestito si può dare in pegno la mummia del padre, se però il prestito non viene restituito, il debitore, una volta morto, non può essere sepolto né nella tomba dove è sepolto il padre, né in alcun'altra. La salma (ὁ νέκυς) deve essere determinata in modo puntuale: è quella del padre e il creditore prende possesso anche della tomba dove la salma è custodita. Il contesto è chiaro: l'insolvente non si riappropria dunque della tomba dove è sepolto il padre, quella che in condizioni abituali dovrebbe ospitare anche lui una volta morto, e addirittura perde il diritto ad essere sepolto in modo convenzionale. Con ἐν ἐκείνῳ τῷ πατρωίῳ τάφῳ si vuol dire sì la tomba del padre, ma non solo e non tanto di quel singolo padre: è la tomba 'di famiglia' con tutti i nessi sociali che questo implica. Anche un passo del III libro ci fornisce uno spunto di riflessione: Periandro cerca di far tornare il figlio Licofrone e, per convincerlo, gli invia sua figlia, sperando che alla sorella Licofrone dia maggior ascolto di quanto ne abbia dato ai precedenti messi. La ragazza, fra gli altri, usa questo argomento: vuoi che gli averi del padre, di tuo padre, siano dispersi (τὸν οἶκον τοῦ πατρὸς διαφορηθῆντα) piuttosto che siano tuoi? Poi, uscendo dalla situazione contingente, generalizza: molti, ricercando i diritti materni, persero i beni del padre, πολλοὶ δὲ ἤδη τὰ μητρώια διζήμενοι τὰ πατρώια ἀπέβαλον, (53, 3-4). Il Prof. A. Carlini mi ha suggerito un altro interessante esempio: Ps. Platone, *Alc.* 2 138 c, ὥσπερ τὸν Οἰδίπουν αὐτίκα φασὶν εὔξασθαι χαλκῷ διελέσθαι τὰ πατρῷα τοὺς υἱεῖς.. Si tratta dell'uso sostantivato dell'aggettivo, come nel passo precedente, con valore di «eredità paterna».

(2) Per C convesso limitato di E, $\overline{\partial C}^{\circ} = \overline{C}$!! [Uso che $\partial C = \overline{C}^{\circ} \setminus \mathrm{int}_{\circ}(C)$, dove effetto $\overline{C}^{\circ} = \overline{C}$ per convessità, mentre $\mathrm{int}_{\circ}(C) = \emptyset$ per limitatezza. □]

(3) Per $\varphi : E \to \overline{\mathbb{R}}$ convessa, φ è s.c.i. $\iff$ φ è deb. s.c.i.

(Es.: $\varphi(\cdot) = \|\cdot\|_E$, convessa continua)

[$\forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, $\varphi^{-1}((\alpha,\infty))$ è aperto debole perché equiv. $\varphi^{-1}((-\infty,\alpha])$ è chiuso debole, essendo chiuso convesso: $\varphi(x), \varphi(y) \le \alpha \overset{\forall \lambda \in [0,1]}{\Longrightarrow} \varphi(\lambda x + (1-\lambda) y) \overset{\text{conv.!}}{\le} \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y) \le \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha$. □]

Venendo ora alla convergenza debole "$\rightharpoonup$", vediamo subito che

(a) $x_n \rightharpoonup x \iff \forall f \in E'$, $f(x_n) \xrightarrow{(\mathbb{R})} f(x)$ [evidente!], e in tal caso

(e perciò il fatto che $x_n \xrightarrow{E} x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$)

(b) x è limite forte di una successione di combinazioni convesse di x_n;

[$x_n \rightharpoonup x \Rightarrow x \in \overline{\bigcup\{x_n\}}^{\circ} \Rightarrow x \in \overline{co(\bigcup x_n)}^{\circ} \overset{(2)}{=} \overline{co(\bigcup x_n)}$. □]

(c) $\|x\|_E \le \liminf_n \|x_n\|_E$;

[Se $\|x_{n_k}\|_E \xrightarrow[k]{} \liminf_n \|x_n\|_E$, allora dal fatto che, $\forall f \in E'$, $f(x_{n_k}) \le \|f\| \|x_{n_k}\|_E$ e $x_{n_k} \rightharpoonup x$, otteniamo $f(x) \le \|f\| \cdot \liminf_n \|x_n\|_E$, e ora ricordo che $\|x\|_E = \sup_{f \in B_1'} f(x)$ (H.-B.) □]

(d) $(x_n)_{n \ge 1}$ limitata in E;

[$\forall f \in E'$, $f(\bigcup_{n\ge 1}(x_n)) = \bigcup_{n \ge 1} f(x_n)$ è limitato in $\mathbb{R}$ (B.-S.) □]

(e) se $(f_n)_{n\ge1}$ in E' sono tali che $f_n \xrightarrow{E'} f$, allora $f_n(x_n) \xrightarrow{(\mathbb{R})} f(x)$.

[$|f_n(x_n) - f(x)| \le |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|$, e $|f_n(x_n) - f(x_n)| \to 0$ in quanto $|(f_n - f)(x_n)| \le \|f_n - f\| \cdot \|x_n\|_E$ e $\|x_n\|_E$ è limitata indip. da n (per (d))! □]

στρατηγὸς δὲ τῶν παραθαλασσίων ἀνθρώπων (135, 1)
ἔστι οὐδὲν ἄλλο ἔθνος ἀνθρώπων (209, 4).

In modo analogo possiamo confrontare

πρὸς [...] ῥώμης ἀνδρηίης (153, 4)

con, ad esempio,

ἡ δὲ μάχη τούτων τῶν ἀνδρῶν (85, 2)
ἡ τόλμα τούτων τῶν ἀνδρῶν (135, 1)
ἐς τοὺς παῖδας τῶν ἀνδρῶν τούτων τῶν ἀναβάντων πρὸς βασιλέα (137, 2).

Βασιλήιος / βασιλέος

Serse ha avuto una visione che gli ha ordinato di fare la spedizione contro la Grecia. Per essere sicuro che sia proprio un dio che vuole questo, chiede ad Artabano di indossare le sue vesti, sedere sul suo trono e dormire nel suo letto: il dio manderà la stessa visione. Ma Artabano in un primo momento non fa quanto Serse gli chiede, perché non si ritiene degno di sedere sul trono

ἐς τὸν βασιλήιον θρόνον ἵζεσθαι (16, 1).

Solo perché costretto finirà con l'obbedire e allora, indossata la veste di Serse e

ἱζόμενος ἐς τὸν βασιλήιον θρόνον (17, 1)

si addormenterà e gli comparirà la stessa visione. Il trono è sì quello di Serse, ma è quello che prima fu di suo padre, è il simbolo del potere, tanto è vero che Artabano ha molte perplessità prima di obbedire[33]. Di più: Artabano, con gli abiti di Serse e seduto sul trono che è del re, diventa, per la divinità che invia la visione, il re. Dunque è il trono che, in qualche modo, legittima come re colui che vi prende posto, non viceversa: il trono non è 'del re' in quanto gli appartiene, ma 'del re' perché oggetto indissolubilmente legato all'istituzione della monarchia. Anche negli esempi che seguono l'uso di βασιλήιος si riferisce non a uno o più re ben precisi, ma a quanto di spettanza, appartenenza alla casa reale, dunque ad una 'entità' sovraindividuale:

τεῖχός τε ἐδέδμητο βασιλήιον (59, 1)
γένεος μέντοι ἐὼν οὐ τοῦ βασιληίου (173, 2)
ἐόντα τῶν βασιληίων δικαστέων (194, 1)
ἐς οἶκον τὸν βασιλήιον (194, 2)
ἔστιξαν στίγματα βασιλήια (233, 2).

L'uso invece di βασιλέος indica l'appartenenza, la relazione con un ben preciso re (Serse o Dario):

πάντα τὰ βασιλέος πρήγματα (10 γ 2)
τὴν βασιλέος στρατιὴν πᾶσαν (27, 1)
ὕστερον ... τοῦ βασιλέος στόλου (138, 1)
τὴν βασιλέος στρατιήν (146, 1)

33 Cfr. W.W. HOW - J. WELLES, *A Commentary on Herodotus*, Oxford 1912, 132: «it was a capital offence to sit on the king's throne ... hence Artabanus might suspect a trap and hesitate».

La "topologia debole*" "$\sigma(E',E)$" sul duale $(E',\|\cdot\|)$ di un normato $(E,\|\cdot\|_E)$ è la topologia meno fine tra quelle su E' rispetto alle quali restano continui gli operatori $T_x \in J(E) < E''$, $x \in \underset{(\text{BS})}{E}$, "di valutazione" ossia "di proiezione", e cioè è la topologia su E' di base $\left\{\bigcap_{i=1}^{n} T_{x_i}^{-1}(I_i)\right\}_{\substack{n\in\mathbb{N},\\ I_i\subseteq\mathbb{R}\text{ aperto},\\ x_i\in E\\ (1\le i\le n)}}$ (per cui ogni $f\in E'$ ammette come sistema fondamentale d'intorni (aperti di tal base) $\left\{\bigcap_{i=1}^{n} T_{x_i}^{-1}\big((f(x_i)-\varepsilon, f(x_i)+\varepsilon)\big)\right\}_{\substack{n\in\mathbb{N},\\ \varepsilon>0,\\ x_i\in E\ (1\le i\le n)}}$).

La topologia debole* su E' è quindi meno fine di quella debole $\sigma(E',E'')$ su E', la quale è meno fine di quella forte $\|\cdot\|$ ed è da queste diversa se e solo se $\dim E'=\infty$, cioè $\dim E=\infty$; in particolare è ovvio che gli aperti debole* di E' sono "illimitati" nel senso che devono contenere almeno una retta di E'. (Da qui come, ovviamente è $\sigma(E',E)=\sigma(E',E'')$ se E è riflessivo.) Per quanto invece riguarda i chiusi debole* di E', tali devono certamente essere chiusi forti, ma devono anche essere chiusi deboli potremmo di seguito essere convessi; in effetti vale che

▶ C chiuso, convesso e limitato di E' $\Rightarrow$ C debole* chiuso di E'.

Essendo $C\subseteq E'$ limitato, si ha che $\forall \xi\in E''=(E')'$, $\xi|_C$ è limitato da una costante; se quindi $f\in E'\setminus\{0\}$ e $f\notin C$, allora c'è certamente un $x\in E$ tale che $\xi|_C < f(x)$, dunque che $\exists \alpha\in\mathbb{R}$ tale che $\xi|_C<\alpha<f(x)$: in particolare $f\in T_x^{-1}((\alpha,\infty))\subseteq E'\setminus C$. □

(NON PROPRIO: devo invece che $\xi=T_x$! Quindi: $\forall f\in C$, $\|f\|\le M$ $\Rightarrow$ $\forall x\in E$, $|f(x)|\le M\|x\|_E$; dopo un x ... e trovo $g\in C$ tale che $g(x)>M\|x\|_E$.)

Inoltre lo stesso $(E',\sigma(E',E))$ risulta T2 in modo banale: $\forall f\neq g$ in E', se $x\in E$ è tale che $f(x)\neq g(x)$, diciamo $f(x)<\alpha<g(x)$, allora $f\in T_x^{-1}((-\infty,\alpha))$ e $g\in T_x^{-1}((\alpha,\infty))$! Venendo dunque alla convergenza debole* in E' "$\xrightarrow[*]{}$", è evidente che $f_n\xrightarrow[*]{} f \Leftrightarrow \forall x\in E,\ f_n(x)\xrightarrow{\mathbb{R}} f(x)$, ovviamente (per via della definizione, in effetti, $f_n\xrightarrow{E'} f \Rightarrow f_n \rightharpoonup f \Rightarrow f_n\xrightarrow[*]{} f$); supposto allora $\boxed{E \text{ di Banach}}$ per B-S otteniamo direttamente che

▶ $f_n\xrightarrow[*]{} f \Rightarrow \begin{cases} (f_n) \text{ limitata in } E' \\ \|f\|\le \liminf_n \|f_n\| \end{cases}$.

Demarato è stato destituito dal governo di Sparta grazie alle manovre di Cleomene, il quale riesce a far credere che Demarato non sia figlio legittimo di Aristone (VI 63-67). Demarato fugge allora in Asia, presso il re Dario, aiuta Serse nella contesa per la successione al trono e segue poi Serse nella spedizione contro la Grecia. A Dorisco Serse chiede a Demarato se i Greci sono in grado di resistere al suo assalto e Demarato, nel corso della sua risposta, afferma di dire solo la verità quando esalta il valore dei Greci, soprattutto degli Spartani, dai quali ha peraltro avuto un pessimo trattamento:

οἵ με τιμήν τε καὶ γέρεα ἀπελόμενοι πατρώια ἄπολίν τε καὶ φυγάδα πεποιήκασι (104, 2).

Γέρεα πατρώια sono tutte le prerogative che un padre, in questo caso un re, consegna al figlio, si tratta di privilegi che Demarato in base alle norme doveva avere e che proditoriamente gli sono stati tolti, privilegi che vanno al di là del singolo caso, perché sono sanciti dalla città.

L'uso invece di πατρός, πατέρων è relativo alla situazione individuale:

Ἀρτάβανε, πατρὸς εἷς τοῦ ἐμοῦ ἀδελφεός (11, 1)
ἐὼν πατέρων τῶν ἐμῶν δοῦλος (11, 4)[32].

Una situazione più fluida sembra nascere dall'osservazione dei nomi di popolo (in particolare Ἕλληνες, Πέρσαι e Μῆδοι). Infatti troviamo:

ὡς Ἑλλήνων λόγος (95, 1)
οἱ ἄγγελοι τῶν Ἑλλήνων (157, 1)
ἁπάσῃ τῇ Ἑλλήνων στρατιῇ (158, 4)
κατὰ τῶν Ἑλλήνων λόγον (189, 1)
τὰς ... τῶν Ἑλλήνων νέας (194, 1)

ma anche

τὸ Ἑλληνικὸν στράτευμα (48, 1)
φόνος Ἑλληνικὸς μέγιστος (170, 3)

e in modo analogo

ἡ πᾶσα Περσικὴ στρατιή (52, 1)

---

[32] Sembra interessante un passo del II libro in cui troviamo τοῦ πατρὸς τὸν νέκυν e, poco più avanti, ἐν ἐκείνῳ τῷ πατρωίῳ τάφῳ (132, 2). Si parla di norme promulgate dal re egiziano Asichi: per ricevere un prestito si può dare in pegno la mummia del padre, se però il prestito non viene restituito, il debitore, una volta morto, non può essere sepolto né nella tomba dove è sepolto il padre, né in alcun'altra. La salma (ὁ νέκυς) deve essere determinata in modo puntuale: è quella del padre e il creditore prende possesso anche della tomba dove la salma è custodita. Il contesto è chiaro: l'insolvente non si riappropria dunque della tomba dove è sepolto il padre, quella che in condizioni abituali dovrebbe ospitare anche lui una volta morto, e addirittura perde il diritto ad essere sepolto in modo convenzionale. Con ἐν ἐκείνῳ τῷ πατρωίῳ τάφῳ si vuol dire sì la tomba del padre, ma non solo e non tanto di quel singolo padre: è la tomba 'di famiglia' con tutti i nessi sociali che questo implica. Anche un passo del III libro ci fornisce uno spunto di riflessione: Periandro cerca di far tornare il figlio Licofrone e, per convincerlo, gli invia sua figlia, sperando che alla sorella Licofrone dia maggior ascolto di quanto ne abbia dato ai precedenti messi. La ragazza, fra gli altri, usa questo argomento: vuoi che gli averi del padre, di tuo padre, siano dispersi (τὸν οἶκον τοῦ πατρὸς διαφορηθῆντα) piuttosto che siano tuoi? Poi, uscendo dalla situazione contingente, generalizza: molti, ricercando i diritti materni, persero i beni del padre, πολλοὶ δὲ ἤδη τὰ μητρώια διζήμενοι τὰ πατρώια ἀπέβαλον, (53, 3-4).

mi ▶ $f_n \xrightarrow{*} f$ e $x_n \xrightarrow{E} x$ $\Rightarrow$ $f_n(x_n) \to f(x)$.

[$|f_n(x_n) - f(x)| \le |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$, e $|f_n(x_n) - f_n(x)| \to 0$ perché $|f_n(x_n - x)| \le \|f_n\| \, |x_n - x|_E$, e questo $\sup_n \|f_n\| < \infty$! □]

Teorema (di BANACH-ALAOGLU) (*): le palle chiuse (in 0) del duale di un normato sono debolo* compatte (e quindi debolo* chiuse, giustamente).

(ma ▶ Ogni chiuso, convesso e limitato di un duale è debole* compatto!)

[$\forall r > 0$, $\overline{B_r^{E'}}^{E'} = \{f \in E' \mid \|f\| \le r\} = \{f \in E' \mid \forall x \in E,\ |f(x)| \le r|x|_E\}$, $=$

$= \{f \in \mathbb{R}^E \mid f \text{ lineare}\} \cap \prod_{x \in E} [-r|x|_E, r|x|_E]$; se quindi vediamo l'insieme $\mathbb{R}^E$ $\left(= \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots}_{|E| \text{ volte}}\right)$ come munito della topologia prodotto generata dalle proiezioni $\mathbb{R}^E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x)$, $x \in E$, otteniamo subito che per TYCONOFF $\prod_{x \in E} [-r|x|_E, r|x|_E]$ è ivi compatto, e che inoltre la topologia debole* di E' ($\subseteq \mathbb{R}^E$) è precisamente quella di sottospazio: basta così osservare che $\{f \in \mathbb{R}^E \mid f \text{ lineare}\}$ è un chiuso di $\mathbb{R}^E$, e infatti $\forall x, y \in E$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, sono continue $\phi_{x,y}, \psi_{x,\lambda} : \mathbb{R}^E \to \mathbb{R}$, $\phi_{x,y}(f) = f(x+y) - f(x) - f(y)$ e $\psi_{x,\lambda}(f) = f(\lambda x) - \lambda f(x)$ ($\forall f \in \mathbb{R}^E$), e sono tali che $\{f \in \mathbb{R}^E \mid f \text{ lineare}\} = \bigcap_{x,y \in E,\ \lambda \in \mathbb{R}} [\phi_{x,y}^{-1}(0) \cap \psi_{x,\lambda}^{-1}(0)]$. □]

mi ▶ «$C \subseteq E'$ convesso chiuso» NON implica «$C \subseteq E'$ debole* chiuso»!

Come duale di un normato prendiamo il biduale di un normato, che inoltre supponiamo essere non riflessivo: $(E, |\cdot|_E)$ con $J(E) \subsetneq E''$, su $(E'', \sigma(E'', E'))$.

Allora $J(E) \subsetneq E''$ è un convesso chiuso che NON può essere anche debole* chiuso:

Teorema (di GOLDSTINE) (*): $J(E)$ è debole* denso in E'', ossia $\overline{J(E)}^{\sigma(E'',E')} = E''$, o meglio addirittura $\overline{J(\overline{B_1^E})}^{\sigma(E'',E')} = \overline{B_1^{E''}}^{E''}$.

[Anzitutto $J(\overline{B_1^E}^E) \subseteq \overline{B_1^{E''}}^{E''}$ il quale è debole* chiuso (in E''), per cui $\overline{J(\overline{B_1^E}^E)}^{\sigma(E'',E')} \subseteq \overline{B_1^{E''}}^{E''}$

πρὸς [...] ῥώμης ἀνδρηίης (153, 4)

con, ad esempio,

ἡ δὲ μάχη τούτων τῶν ἀνδρῶν (85, 2)
ἡ τόλμα τούτων τῶν ἀνδρῶν (135, 1)
ἐς τοὺς παῖδας τῶν ἀνδρῶν τούτων τῶν ἀναβάντων πρὸς βασιλέα (137, 2).

Βασιλήιος / βασιλέος

Serse ha avuto una visione che gli ha ordinato di fare la spedizione contro la Grecia. Per essere sicuro che sia proprio un dio che vuole questo, chiede ad Artabano di indossare le sue vesti, sedere sul suo trono e dormire nel suo letto: il dio manderà la stessa visione. Ma Artabano in un primo momento non fa quanto Serse gli chiede, perché non si ritiene degno di sedere sul trono

ἐς τὸν βασιλήιον θρόνον ἵζεσθαι (16, 1).

Solo perché costretto finirà con l'obbedire e allora, indossata la veste di Serse e

ἱζόμενος ἐς τὸν βασιλήιον θρόνον (17, 1)

si addormenterà e gli comparirà la stessa visione. Il trono è sì quello di Serse, ma è quello che prima fu di suo padre, è il simbolo del potere, tanto è vero che Artabano ha molte perplessità prima di obbedire[31]. Di più: Artabano, con gli abiti di Serse e seduto sul trono che è del re, diventa, per la divinità che invia la visione, il re. Dunque è il trono che, in qualche modo, legittima come re colui che vi prende posto, non viceversa: il trono non è 'del re' in quanto gli appartiene, ma 'del re' perché oggetto indissolubilmente legato all'istituzione della monarchia. Anche negli esempi che seguono l'uso di βασιλήιος si riferisce non a uno o più re ben precisi, ma a quanto di spettanza, appartenenza alla casa reale, dunque ad una 'entità' sovraindividuale:

τεῖχός τε ἐδέδμητο βασιλήιον (59, 1)
γένεος μέντοι ἐὼν οὐ τοῦ βασιληίου (173, 2)
ἐόντα τῶν βασιληίων δικαστέων (194, 1)
ἐς οἶκον τὸν βασιλήιον (194, 2)
ἔστιξαν στίγματα βασιλήια (233, 2).

L'uso invece di βασιλέος indica l'appartenenza, la relazione con un ben preciso re (Serse o Dario):

πάντα τὰ βασιλέος πρήγματα (10 γ 2)
τὴν βασιλέος στρατιὴν πᾶσαν (27, 1)
ὕστερον ... τοῦ βασιλέος στόλου (138, 1)
τὴν βασιλέος στρατιήν (146, 1)
μετὰ τὴν βασιλέος ἐξέλασιν (183, 2)
τὴν βασιλέος γνώμην (239, 3).

Πατρώιος / πατρός, πατέρων

---

[31] Cfr. W.W. How - J. Welles, *A Commentary on Herodotus*, Oxford 1912, 132: «it was a capital offence to sit on the king's throne ... hence Artabanus might suspect a trap and hesitate».

è ovvio dunque e la tesi è finita il $\supseteq$, ovvero che: $\forall \xi \in \overline{B_1^{E''}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall f_i \in E'$ con $i \in \{1, \dots, n\}$, $\left(\bigcap_{i=1}^{n} T_{f_i}^{-1}((\xi(f_i) - \varepsilon, \xi(f_i) + \varepsilon)) \right) \cap J(\overline{B_1^E}) \neq \emptyset$ e

cioè $\underset{(= J(x))}{\exists\, x \in \overline{B_1^E}}$ tale che, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $|f_i(x) - \xi(f_i)| < \varepsilon$ (il che implica subito $E''_{\{\cdot\}} \subseteq \overline{J(E)}^{\sigma(E'', E')} \setminus \{0\}$). Considerate $\underset{(\forall \xi)}{}$ infatti $\underset{(\forall n, \forall f_i)}{}$ $F : E \to \mathbb{R}^n$ di componenti $(f_1, \dots, f_n)$, ovvero $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ $\forall x \in E$, F è lineare (e continua) e allora $\overline{F(\overline{B_1^E})}^{\mathbb{R}^n}$ è convesso chiuso di $\mathbb{R}^n$; se per assurdo $(\xi(f_1), \dots, \xi(f_n)) \notin \overline{F(\overline{B_1^E})}^{\mathbb{R}^n}$, allora li separo grazie ad un'appl. lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: cioè esisterebbero $z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $\sum_{i=1}^{n} z_i f_i(x) \overset{\forall x \in \overline{B_1^E}}{<} \alpha < \sum_{i=1}^{n} z_i \xi(f_i)$; d'altronde $\sum_{i=1}^{n} z_i f_i \in E'$, per cui $\sum_{i=1}^{n} z_i f_i(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} z_i f_i\right)(x) < \alpha$ $\forall x \in \overline{B_1^E}$ implica subito che $\left\| \sum_{i=1}^{n} z_i f_i \right\| \le \alpha$; però $\alpha < \sum_{i=1}^{n} z_i \xi(f_i) = \xi\left(\sum_{i=1}^{n} z_i f_i \right) \overset{(\|\xi\| \le 1)}{\le} \left\| \sum_{i=1}^{n} z_i f_i \right\|$: assurdo. $\square$]

Proposizione. (fondamentale) Siano F, G di Banach e $T : F \to G$ lineare: allora $T \in \mathcal{L}(F, G)$ $\Longleftrightarrow$ T è continua "debole" come applicazione $(F, \sigma(F, F')) \to (G, \sigma(G, G'))$ (per cui, se in realtà $G = E'$ con E normato, e $T \in \mathcal{L}(F, E')$, allora T è continua debole/debole* come applicazione $(F, \sigma(F, F')) \to (E', \sigma(E', E))$!)

[$\Rightarrow$ Controimmagine d'intersezione è intersezione, e inoltre, $\forall g \in G'$ e $\forall I \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $\cancel{T(f)}$ $g(T) \in F'$ è tale che $T^{-1}(g^{-1}(I)) = (g(T))^{-1}(I)$.

$\Leftarrow$ Visto che $(G, \sigma(G, G'))$ è T2, il grafico di T è chiuso nel prodotto $(F \times G, \sigma(F, F') \times \sigma(G, G')) = (F \times G, \sigma(F \times G, (F \times G)'))$, dunque è un chiuso debole e a maggior ragione è un chiuso forte). $\square$]

Per i prossimi ragionamenti conviene presentare un'altra elementare proposizione.

La lettura del VII libro[28] di Erodoto ci evidenzia che, per indicare discendenti il genitivo è di norma: Δαρεῖον τὸν Ὑστάσπεος (1, 1), ἐξ Ἀτόσσης τῆς Κύρου (2, 1), Μαρδόνιος ὁ Γωβρύεω (5, 1) o le lunghe liste di avi di Serse (11, 2) e di Leonida (204, 1). Un caso si discosta da questo uso: τοῖσι Μασκαμείοισι ἐκγόνοισι, (106, 2), «ai discendenti di Mascame». Il nome di Mascame è già stato introdotto (105, 1), Serse lo nominò governatore a Dorisco. Erodoto prosegue (106, 1): Mascame fu uomo di grande valore, tanto che Serse gli inviava doni ogni anno e anche Artaserse, suo figlio, continuò a mandare doni ai discendenti di Mascame. Questa espressione è dunque del tipo 'alla discendenza mascamea', diversa dalle puntuali attestazioni di filiazione con le quali Erodoto introduce personaggi di cui vuol dare precise coordinate. Un altro caso di forma aggettivale derivata da nome proprio è γένος Ἡρακλείδης (208, 1): gli Eraclidi sono i figli di Eracle e i loro discendenti[29], considerati copostipiti delle famiglie reali doriche.

Proviamo ora a confrontare la forma aggettivale derivata con l'uso al genitivo del sostantivo che ne costituisce la base.

Ἀνθρωπήιος, ἀνθρώπινος / ἀνθρώπων
ἀνδρήιος / ἀνδρῶν

La forma aggettivale rinvia al concetto astratto, generale:

ὡς βραχὺς εἴη ὁ πᾶς ἀνθρώπινος βίος (46, 2)
βιοτῆς μέν νυν ἀνθρωπηίης πέρι (47, 1).

È un dialogo tra Artabano e Serse, suo nipote: Serse, alla vista dell'enorme quantità delle sue navi, nell'Ellesponto, e dei suoi uomini, nella pianura di Abido, piange perché pensa che la vita è breve, di lì a cento anni nessuno di quegli uomini, che pure sono in gran numero, ci sarà più. Artabano replica che ben peggiori della morte sono le sofferenze che gli uomini devono sopportare nel corso della vita. Ma Serse chiude l'argomento: non parliamo più dell'esistenza umana, pensiamo invece alle cose buone che possiamo fare. Il contesto è dunque relativo alla condizione di tutti gli uomini, sottoposti alle sventure, alle malattie e alla morte[30]. Quando, però, il ragionamento è su determinati uomini troviamo il sostantivo al genitivo:

ἀνθρώπων κακῶν ὁμιλίαι σφάλλουσι (16, α 1)
στρατηγὸς δὲ τῶν παραθαλασσίων ἀνθρώπων (135, 1)
ἔστι οὐδὲν ἄλλο ἔθνος ἀνθρώπων (209, 4).

In modo analogo possiamo confrontare

---

28 Da C. Hude, *Herodoti Historiae*, II, Oxonii 1927³, per le concordanze C. Schrader, *Concordantia Herodotea*, I-V, Hildesheim-Zürich-New York 1996.
29 Cfr. J. Pley, *Herakleidai*, in *RE* VIII 1 (1912), 446-457.
30 Vd. anche φωνῇ ἀνθρωπηίῃ (II 55, 2), τὰ δὲ ἄνω μέζονα ἀνθρωπηίων ἔργων (II 148, 6), τὰ ἀνθρωπήια πάντα πάθεα (V 4, 2): in quest'ultimo esempio il contesto è vicino a quello del dialogo tra Artabano e Serse, infatti Erodoto parla del popolo trace dei Trausi, che, quando nasce un bambino, sono soliti piangere, pensando a tutti i mali che, in quanto uomo, dovrà soffrire. E ancora ἐν τῇ γὰρ ἀνθρωπηίῃ φύσι (III 65, 3). Questa espressione è in un contesto particolarmente drammatico, infatti Cambise sta confessando ad un gruppo di notabili persiani il fratricidio compiuto per salvaguardare il suo potere: aveva avuto una visione in cui gli veniva detto che Smerdi era seduto sul trono reale e toccava il cielo con la testa. Ma gli uomini, per natura, non hanno i mezzi per evitare ciò che comunque deve avvenire: Cambise fa uccidere il fratello, ma era Smerdi il Mago il nemico da cui avrebbe dovuto guardarsi.

Proposizione (di separabilità): per E normato, E' separabile $\Rightarrow$ E separabile (per cui E riflessivo separabile $\underset{[J(E)=E''\text{ separabile!}]}{\Rightarrow}$ E' separabile).

Siano $(T_n)_{n\geq 1}$ densi in E'; visto che, $\forall f\in E'$, dalla def. di $\|f\| = \sup_{\partial B_1}|f|$ segue che $\exists\, x\in E$ con $|x|_E = 1$ tale che $f(x) \geq \underset{(<\|f\|)}{\frac{\|f\|}{2}}$, posso considerare $(x_n)_{n\geq 1}$ in ∂B_1^E tale che $\frac{1}{2}\|T_n\| \leq T_n(x_n)$ $\forall n\geq 1$: allora $F = \langle x_n \mid n\geq 1\rangle < E$ è denso in E, in quanto, se $T\in E'$ è tale per cui $T_{|F} = 0$, allora $T = 0$. Infatti, se $T_{n_k} \xrightarrow[k]{E'} T$, allora $\frac{1}{2}\|T_{n_k}\| \leq T_{n_k}(x_{n_k}) = \underbrace{T(x_{n_k})}_{=0} + (T_{n_k}-T)(x_{n_k}) \leq$ $\leq \|T_{n_k} - T\| \to 0$, per cui $T_{n_k} \xrightarrow{E'} 0$ e non può che essere $T = 0$. □

Sappiamo già che E riflessivo $\Rightarrow$ E' riflessivo, mentre E separabile $\not\Rightarrow$ E' separabile (a meno che E sia riflessivo!); supponiamo adesso che E' sia riflessivo: allora banalmente la topologia debole* su E'' coincide con la topologia debole su E'', per cui Goldstine diventa

E' riflessivo $\Rightarrow$ $\overline{J(\overline{B_1^E})}^{deb} = \overline{B_1}^{E''}$; ma $J(\overline{B_1^E})$ è un chiuso convesso di E'', per cui ne è debole chiuso e quindi $J(\overline{B_1^E}) = \overline{B_1}^{E''}$, cioè segue che pure E è riflessivo e dunque che:

▷ E riflessivo separabile $\Leftrightarrow$ E' riflessivo separabile*.

Teorema (di KAKUTANI)*: per E di Banach, E riflessivo $\Leftrightarrow$ $\underset{(palla)}{\overline{B_1^E}}$ debole compatta.

($\Rightarrow$) grazie al precedente ragionamento so che $J(\overline{B_1^E}) = \overline{B_1}^{E''}$, che è debole compatta su $E''_{(BA)}$ ($\sigma(E'',E') = \sigma(E'',E''')$!): ora uso che J^{-1} è debole continua.

($\Leftarrow$) J è debole/debole* continua, per cui ottengo che $J(\overline{B_1^E})$ è debole* compatta (quindi chiusa*) su E'', da cui $J(\overline{B_1^E}) = \overline{B_1}^{E''}$ per G. □ Sia ora $\boxed{E \text{ riflessivo}}$:

Cor. 1 $M < E$ chiuso $\Rightarrow$ M riflessivo.

$\overline{B_1^M} = M\cap \overline{B_1^E}$ è debolmente compatto in E perché $\overline{B_1^E}$ lo è e M è convesso chiuso e quindi debole chiuso; ma $\overline{B_1^M} \subseteq M$ e la topologia debole su M è esattamente

Nel capitolo 39 viene descritta la situazione a Roma dopo la notizia della resa vergognosa di Aulo e la conseguente condotta del fratello Albino:

> ob ea consul Albinus ex delicto fratris invidiam ... timens (39, 2).

E poco più avanti:

> quamquam persequi Iugurtham et mederi fraternae invidiae animo ardebat (39, 5).

L'uso di *fraternus* non rinvia al concetto astratto, ma a quanto noto in merito al comportamento di Aulo e alla conseguente malevolenza della comunità nei suoi confronti. Sallustio ha operato nel contesto il legame tra *frater, delictus* e *invidia,* pertanto il sintagma con l'aggettivo non solo è legittimo, ma anche fortemente espressivo[45].

Analogamente le espressioni *bello Iugurthino* (19, 7)[46], *milites Iugurthini* (21, 2; 56, 6), trovano la loro giustificazione nella già avvenuta connessione storica e linguistica tra *bellum, milites* e *Iugurtha.*

> Ea tempestate Romae seditionibus tribuniciis atrociter res publica agitabatur (37, 1),

in questo caso si tratta delle sedizioni suscitate dai tribuni della plebe[47], che dovevano essere tristemente note al 'pubblico' di Sallustio: ancora una forma

---

[45] Nella *Catilinae Coniuratio* troviamo *multi autem ... volventes hostilia cadavera amicum alii, pars hospitem aut cognatum reperiebant* (61, 8): qui *hostilia* sembra valere proprio «dei nemici». Siamo nel capitolo finale dell'opera, si è conclusa la battaglia tra l'esercito di Catilina e quello dei Romani, rimangono desolazione e morte. poco prima Sallustio collega *cadavera* con *hostes,* in quanto *Catilina vero longe a suis inter hostium cadavera repertus est* (61, 2), Catilina viene rinvenuto lontano dai suoi, in mezzo a cadaveri di nemici, quelli dello schieramento avverso, contro i quali si era lanciato con grande coraggio e orgoglio. L'immagine è fortemente legata alla battaglia in atto, quando coloro contro cui si combatte non possono che essere *hostes.* Poco più avanti, come detto, leggiamo *hostilia cadavera,* un nesso dunque 'fondato' nel racconto. Ma non solo: i soldati usciti dall'accampamento vanno nel luogo di battaglia per curiosare o per predare e, nel rivoltare i cadaveri dei nemici, trovano un amico o un ospite o un congiunto, talvolta un nemico personale: l'atrocità delle guerre civili sta nel fatto che possono diventare *hostes* anche uomini uniti da forti legami. Questi *cadavera* che svelano sembianze note, in alcuni casi anche amate, non possono essere definiti *hostium,* cioè di veri e propri nemici, ma *hostilia,* cioè di uomini che, in un determinato frangente, si sono comportati da nemici. Cfr. R. Jacobs - H. Wirz - A. Kurfess, C. *Sallusti Crispi De Coniuratione Catilinae Liber, Orationes et Epistulae ex Historiis excerptae,* Berlin-Zürich 1965[12], 122: «hostilia nicht schlechtweg = hostium, sondern = derer, die ihnen als Feinde gegenüberstanden». F. Giancotti, *Strutture delle monografie di Sallustio e di Tacito,* Messina-Firenze 1971, 77: «l'avvicendarsi di letizia e tristezza è conseguenza del fatto che non una guerra tra genti straniere è finita or ora, ma una guerra civile ... La vittoria dell'esercito del senato - per benefica che, in sé, appaia agli occhi dello scrittore - non è risolutiva, non è separabile dal problema della crisi generale di cui la monografia è compenetrata».

[46] Marouzeau, *op. cit.* (n. 20), 218: «[Löfstedt] observe que l'emploi de l'adjectif paraît propre à exprimer la qualité ... tandis que l'emploi du substantif au génitif exprime essentiellement la possession. Il faut mettre a part naturellement les cas où l'écrivain emploi le substantif parce qu'il ne dispose pas d'un adjectif usité: Cic., *Fam.* V, 12, 2: Callisthenes *Phocium* bellum, Timaeus *Pyrrhi,* Polibius *Numantinum* (pas d'autre adjectif tiré de *Pyrrhus* que *Pyrrhicius,* dont l'usage est fixé dans un autre sens). Quint. III, 8, 9: Sallustius in bello *Iugurthino* et *Catilinae* (*Catilinarius* n'eût pas convenu dans cet emploi)».

[47] Koestermann, *op. cit.* (n. 40), 153: «Für Sallust hat der Hinweis auf die *seditiones tribuniciae* wohl die Bedeutung einer "unheilvollen Ankündigung des Parteienkampfes"». Da qui un rinvio a

quella di sottospazio di E (per H.B.). ∎

$\boxed{\text{Cor. 2}}$ C chiuso, convesso e limitato di E $\Rightarrow$ C debole compatto.

C è un debole chiuso di E contenuto in una palla (w*) di E. ∎

$\boxed{\text{Cor. 3}}$ Sia $C \subseteq E$ un convesso chiuso e sia $u : C \to \overline{\mathbb{R}}$ convessa e s.c.i. (debole!):

(sopra)

u ha minimo assoluto su C se $\begin{cases} C \text{ è limitato} \\ C \text{ è illimitato e } \lim_{\substack{\|x\|_E \to \infty \\ x \in C}} u(x) = \infty \end{cases}$ (u "coerciva") (s.c.i.)

u debole s.c.i. ha minimo assoluto su un compatto debole, com'è C se è pure limitato; altrimenti c'è $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $u^{-1}((-\infty, \alpha]) \neq \emptyset$, e tale $u^{-1}((-\infty,\alpha])$ è chiuso, convesso e limitato, ovviamente. ∎

Teorema di caratterizzazione di separabilità*: per E normato, E è separabile $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $(\overline{B_1^{E'}}, \sigma(E',E))$ è metrizzabile. * è debole* sequenzialmente compatta!)

(debole* compatta)

$\boxed{\Rightarrow}$ Sia $(x_n)_{n \geq 1}$ densa in $\overline{B_1^{E}}$ e poniamo, $\forall f, g \in \overline{B_1^{E'}}$, $d(f,g) := \sum_{k\geq 1} \frac{|f(x_k) - g(x_k)|}{2^k}$ la quale è chiaramente una metrica su $\overline{B_1^{E'}}$: se "τ" è la topologia su $\overline{B_1^{E'}}$ da d indotta, si tratta di vedere se $\tau = \sigma(E',E)$ (su $\overline{B_1^{E'}}$).

$\underline{\subseteq}$: $\forall f \in \overline{B_1^{E'}}$ e $\forall r > 0$, cerchiamo $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ e $y_i \in \overline{B_1^{E}}$ $\forall i = 1, \dots, m$ tali che $\bigcap_{i=1}^{m} T_{y_i}^{-1}((f(y_i) - \varepsilon, f(y_i) + \varepsilon)) \subseteq B_r^d(f)$ in $\overline{B_1^{E'}}$, ossia tali che, $\forall g \in \overline{B_1^{E'}}$, se $|f(y_i) - g(y_i)| < \varepsilon$ $\forall i = 1, \dots, m$ allora $\sum_{k \geq 1} \frac{|f(x_k) - g(x_k)|}{2^k} < r$; prendo infatti $\varepsilon := r/2$ e m grande abbastanza affinché $\sum_{k \geq m+1} \frac{|f(x_k) - g(x_k)|}{2^k} < \varepsilon$, e quindi $\forall i = 1, \dots, m$ pongo $y_i := x_i$ ottenendo appunto che $|f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon$ $\forall i = 1, \dots, m$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k \geq 1}(\dots) = \sum_{k=1}^{m}(\dots) + \sum_{k \geq m+1}(\dots) < \varepsilon \cdot 1 + \varepsilon = r$. ✓

$\underline{\supseteq}$: $\forall f \in \overline{B_1^{E'}}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall y_i \in \overline{B_1^{E}}$ con $i = 1, \dots, m$, cerchiamo $r > 0$ tale che $B_r^d(f) \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} T_{y_i}^{-1}((f(y_i) - \varepsilon, f(y_i) + \varepsilon))$ in $\overline{B_1^{E'}}$, ossia tale che $\forall g \in \overline{B_1^{E'}}$

$\sum_{k \geq 1} \frac{|f(x_k) - g(x_k)|}{2^k} < r$ $\Rightarrow$ $\forall i = 1, \dots, m$, $|f(y_i) - g(y_i)| < \varepsilon$; siamo infatti

Löfstedt[13] ritiene invece che le due diverse espressioni abbiano convissuto anche nel periodo più arcaico, perché non sovrapponibili semanticamente: il genitivo esprime un reale rapporto di possesso, mentre l'aggettivo derivato rientra nella normale funzione di denominazione, qualificazione, generica designazione[14]. Ad esempio, si dice *virgo Vestalis*, ma *atrium Vestae, aedes Vestae; porta Quirinalis, collis Quirinalis*, ma *templum Quirini, Quirini fanum*: il tempio è percepito come possesso della divinità[15], ma né le località, né gli ordini sacerdotali che prendono il nome da una divinità ne sono considerati 'proprietà'[16]. Un'espressione come *Colonia Agrippinensis, Colonia Augusta, Colonia Iulia* è denominazione 'in onore' di un personaggio importante, non allude ad un rapporto di appartenenza e lo prova il fatto che *Colonia Agrippinensis* precedentemente si chiamava *oppidum* o *ara Ubiorum*, perché era la città degli Ubi e degli Ubi era l'altare. Anche per quanto riguarda *erilis* Löfstedt nota una diversa distribuzione rispetto ad *eri*[17]. L'aggettivo è abituale con *filius, filia, amica, concubina* e indicherebbe come appartenenti attivamente alla sfera familiare determinate persone che gravitano intorno all'*erus*, per cui *erilis filius* non vale «der Sohn des Hausherrn», ma «der junge Herr (der Sohn) im Hause»[18]. Un'espressione

---

[13] *Syntactica*, I, Lund 1942², 107-124. Löfstedt rinvia a K. Brugmann, *Grundriss der vergleichenden Grammatik der indogermanischen Sprachen*, II 2, *Wortbildungslehre*, Straßburg 1911, 571. Brugmann sostiene che «dieser Genitiv auch schon in der uridg. Zeit neben dem Adjektiv nicht selten gebraucht worden ist», perché l'aggettivo, del tutto esplicito quando si riferisce a nomi individuali, perde di chiarezza se si riferisce ad una pluralità. Inoltre il genitivo è inevitabile quando il sostantivo è accompagnato da un attributo.

[14] Costituirebbero un'eccezione i dialetti eolici e la lingua di Omero, in cui l'aggettivo derivato ha valore possessivo equivalente a quello del genitivo di appartenenza.

[15] «Das Haus des Gottes, die Wohnung des Gottes», Löfstedt, *op. cit.* (n. 13), 112.

[16] Secondo Löfstedt, *op. cit.* (n. 13), 112 n. 2, ci sono però casi un po' meno chiari di quelli descritti, in particolare in Plauto *sacerdos Veneria* (*Rud.* 329, 350, 644) e *sacerdos Veneris* (*Rud.* 430), *sacram urnam Veneris* (*Rud.* 473) e *sacra urna Veneria* (*Rud.* 475), dove l'uso sembra oscillare senza sostanziali differenze semantiche, forse per esigenze metriche. Sull'apparente equivalenza di queste espressioni cfr. E. Benveniste, *Génitif et adjectif en latin*, «St. Clasice» 2 (1960), 65-67. L'analisi che Benveniste fa dei contesti del *Rudens* evidenzia la differenza semantica fra *urna Veneris*, orcio che appartiene a Venere, e *urna Veneria*, orcio consacrato a Venere: in un caso dunque il genitivo esprime il semplice possesso, nell'altro l'aggettivo «qualifie l'objet comme matériel de culte et lui donne sa désignation consacrée» (66). Benveniste continua la sua disamina ed arriva ad affermare che quando al posto di un genitivo di appartenenza troviamo un aggettivo 'di relazione' «le syntagme indique alors une appellation traditionelle et respectueuse» (67).

[17] L'importanza che Löfstedt attribuisce all'aggettivo *erilis* in Plauto non è condivisa da P.W. Harsch, *Adjective and Genitive in Plautus*, «Mnemosyne» IV s. 2 (1949), 333-339, il quale ritiene e cerca di dimostrare che in Plauto la distinzione tra aggettivo e genitivo è formale e metrica, più che semantica.

[18] In relazione alle caratteristiche di espressività di questa forma aggettivale, Löfstedt, *op. cit.* (n. 13), 117-120, porta un esempio a suo parere significativo, cioè quello di *dominicus* e della eccezionale diffusione che ha nel latino tardo, soprattutto nella lingua dei Cristiani, come si desume da *dominica*, con o senza *dies*, 'il giorno del Signore'. Su *dominicus* cfr. già E. Löfstedt, *Philologischer Kommentar zur Peregrinatio Aetheriae. Untersuchungen zur Geschichte der lateinischen Sprache*, Uppsala 1911, 76-81, che tende a considerare in generale questo aggettivo (derivato cioè da nome di persona o da sostantivo che indica un concetto legato alla persona, come parentela o cariche) tipico della lingua parlata, popolare, quotidiana, che manterrebbe tratti propri della lingua più antica. Qui invece Löfstedt dice chiaramente di aver cambiato opinione: osservando nella *Peregrinatio Aetheriae* l'uso di *dominicus* e quello del genitivo *domini*, ci si accorge che l'aggettivo è usato 36 volte solo nel nesso *dies dominicae* che al di fuori di questa associazione troviamo sempre *domini*. Questo testo dunque, semplice e poco elaborato stilisticamente, offre una prova dell'uso volgare, che ricorre normalmente al genitivo, con l'eccezione di un concetto importante che richiede un'espressione solenne, *dominica*. L'uso spesso

x_{n_i} tale che $|x_i - x_{n_i}|_E < \frac{\varepsilon}{4}$ $\forall i=1,\dots,\mu$, e sia allora $N \doteq \max_{i=1,\dots,\mu}(n_i)$;
cosicché per $r \doteq \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2^N}$ si abbia $\sum_{n\ge 1}\frac{|f(x_n)-g(x_n)|}{2^n} < r \Rightarrow \forall i=1,\dots,\mu$,
$|f(x_{n_i}) - g(x_{n_i})| < \frac{\varepsilon}{2}$, ovviamente. Segue così che in effetti, $\forall i=1,\dots,\mu$,

$$|f(x_i)-g(x_i)| \le \underbrace{|f(x_i)-f(x_{n_i})|}_{\le \underbrace{\|f\|}_{\le 1} |x_i - x_{n_i}|_E < \frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{|f(x_{n_i})-g(x_{n_i})|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|g(x_{n_i})-g(x_i)|}_{\le \underbrace{\|g\|}_{\le 1} |x_{n_i}-x_i|_E < \frac{\varepsilon}{4}} < \varepsilon . \checkmark$$

($\Leftarrow$) Sia d una metrica su $\overline{B_1}^{\sigma'}$ che induce esattamente la stessa topologia debole*; in particolare quest'ultima sarebbe più fine, quindi, $\forall r>0$, esistono $\mu\in\mathbb{N}$, $\varepsilon>0$ e $x_i \in \overline{B_1}^{E}$ $\forall i=1,\dots,\mu$ tale che $\bigcap_{i=1}^{\mu} T_{x_i}^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon)) \subseteq B_r^d$ in $\overline{B_1}^{\sigma'}$, ossia tale che, $\forall g\in\overline{B_1}^{\sigma'}$, se $|g(x_i)|<\varepsilon$ $\forall i=1,\dots,\mu$ allora $d(g,0)<r$.
Pertanto, $\forall m\in\mathbb{N}$, esistono $\mu\in\mathbb{N}$, $\varepsilon>0$ e $x_i\in\overline{B_1}^{\sigma}$ $\forall i=1,\dots,\mu$ tale che, $\forall g\in\overline{B_1}^{\sigma'}$,
$|g(x_i)|<\varepsilon$ $\forall i=1,\dots,\mu \Rightarrow d(g,0)<\frac{1}{m}$, e posso supporre che $\mu \ge m$ cosicché per $m\to\infty$ anche $\mu\to\infty$ e gli $(x_i)_{i\ge1}$ formino perciò una successione in $\overline{B_1}^{\sigma}$; allora, $(x_i)_{i\ge 1}$ è [illegible]: se infatti $f\in\overline{B_1}^{\sigma'}$ ha $f(x_i)=0$ $\forall i\ge 1$, allora appunto $\forall m\ge 1$ $d(f,0)<\frac{1}{m} \Rightarrow f=0$. $\square$

$\boxed{\text{COR.}}$ E di Banach riflessivo (ossia $\overline{B_1}^{\sigma}$ deb. compatta) $\Rightarrow$ $\overline{B_1}^{\sigma}$ debole sequenzialmente compatta*.
(Ci vorrebbe il ricorrere per EBERLEIN-ŠMULIAN ...)

[Se infatti $(x_n)_{n\ge1}$ è in $\overline{B_1}^{E}$ e se $M \doteq \overline{\langle x_n \mid n\ge 1\rangle}^{E}$, allora $\overline{B_1^M}^{\sigma(M)}$ $(=\overline{B_1}^{\sigma}\cap M)$ è debole sequenzialmente compatto. Questo è vero perché $M<E$ chiuso $\Rightarrow M$ riflessivo, ed essendo pure separabile (per sua def.) ha M' riflessivo separabile: allora la topologia debole* su M'' coincide con la topologia debole (su M''), e quindi, per il teorema precedente $\overline{B_1^{M''}}^{\sigma''}$ è debole sequenzialmente compatto; per concludere uso che naturalmente $\overline{B_1^M}^{\sigma} = J^{-1}\left(\overline{B_1^{M''}}^{\sigma''}\right)$. $\square$]

Hercules ci testimoniano questa doppia provenienza: l'antico *Herculaneus*, come in *pars Herculanea* (Plauto, *Truc.* 562), *ficus Herculanea* (Catone), *via Herculanea* (in Campania), *rivus Herculaneus* (presso Roma), e il grecismo *Herculeus*, in Virgilio, Orazio e altri. Per dare altri esempi di aggettivi derivati da nomi di divinità: *mensis Martius* (Gellio 4, 6, 2), *vim Volcaniam* (Lucilio, 606 Marx), *flamen Dialis* (ad es. Tacito, *Ann.* III 58, 1 e Livio I 20, 1). Il virgiliano *Aeneia nutrix* (*Aen.* VII 1) non sembra tratto dal greco (τιθήνη non è mai attestato con l'aggettivo di un nome di persona), ma riconducibile ad un uso 'nazionale', se lo confrontiamo con *noutrix Paperia* (CIL I 45). Wackernagel passa a dimostrare che l'uso dell'aggettivo derivato si rivelerebbe più antico rispetto a quello del genitivo possessivo, non solo per quanto riguarda i patronimici: in Omero la locuzione βίη + aggettivo è applicata solo a personaggi appartenenti ad una tradizione anteriore, βίη Ἡρακληείη (B 658, B 666, E 638, Λ 690, O 640, T 98, λ 601)[6], βίη Ἐτεοκληείη (Δ 386), βίη Ἰφικληείη (λ 296)[7]. Quando, invece, si tratta di eroi che compaiono per la prima volta nell'*Iliade* e nell'*Odissea*, troviamo il sintagma con il genitivo, ad esempio Αἰνείαο (Y 307), Τεύκροιο (Ψ 859), Ἑλένοιο (N 770, N 781). Anche nella formazione dei toponimi si nota il passaggio dall'aggettivo al genitivo: in Erodoto leggiamo, ad esempio, Ἀχιλλήιος δρόμος (IV 55, 1 e IV 76, 4), invece in Tolomeo (*Geog.* III 5, 25 Nobbe), Arriano (*Peripl. M. Eux.* 21, 1), Ἀχιλλέως δρόμος, Ammiano (XXII 8, 41) *Achilleos dromos*. Il genitivo caratterizza anche le neoformazioni: ad esempio Ζηνὸς πάγος (Sofocle, *Tr.* 1191) a fronte di Ἄρειος πάγος. Cicerone ha *ostium Oceani*, ma *ostium Tiberinum* (la foce del Tevere)[8], nesso evidentemente molto arcaico[9]. Wackernagel conclude: «in den klassischen Sprachen ist hier durchweg das Adjektiv das Primitivere; der Genetiv mehr der jüngern überhaupt analytischen Sprachstufe eigen»[10]. Così anche nella sintassi dello Schwyzer leggiamo che l'uso adnominale del genitivo si è esteso a spese dell'aggettivo di appartenenza[11], per lo più derivato da nomi proprio a indicare proprietà (δόμος Πηλήιος, Νηλήιαι ἵπποι, βίη Ἡρακληείη, in Omero) oppure discendenza (Τελαμώνιος Αἴας, Ἀντίλοχος Νηλήιος, in Omero, τοῖς Μασκαμείοισι ἐκγόνοισι, in Erodoto VII 106, 2). Ma in Omero troviamo anche δόμος Ὀδυσῆος, Πριάμοιο βίη, Τυδέος υἱός, in Pindaro si alternano genitivo e aggettivo in παρθενηΐοις παίδων τ' ἐφίζοισα γλεφάροις (*Nem.* VIII 2). Per Schwyzer: «wo das Adjektiv bewahrt war, konnte der Genitiv als stilistisch höhere Form erscheinen: Κρόνου πάγος Pind. O. 10, 49 f. für das Κρόνιον (ὄρος) zu Olympia ...»[12].

---

[6] In Σ 117 leggiamo βίη Ἡρακλῆος: Wackernagel, *art. cit.* (n. 1), 143 (= 1364).

[7] A proposito della tradizione anteriore ad Omero, in particolare per Eracle, si veda A. Heubeck - G.A. Privitera, *Omero. Odissea*, III, *Libri IX-XII*, Milano 1983, 306-307. Più in generale, cfr. J. Latacz, *Homer. Der erste Dichter des Abendlands*, München-Zürich 1989, trad. it. Roma-Bari 1990.

[8] *Pro Lege Manilia* 33: ... *ut vos, qui modo ante ostium Tiberinum classem hostium videbatis, nunc nullam intra Oceani ostium praedonum navem esse audiatis?*

[9] Inoltre, la comparazione ci dice che l'aggettivo derivato è presente da solo, senza la concorrenza del genitivo, per esprimere il rapporto di possesso, nelle lingue slave: «ursprünglich herrschte das Adjektiv wie in den slavischen Sprachen», Wackernagel, *art. cit.* (n. 1), 145 (= 1366).

[10] Wackernagel, *art. cit.* (n. 1), 145-146 (= 1366-1367).

[11] E. Schwyzer - A. Debrunner, *Griechische Grammatik*, II, *Syntax und syntaktische Stilistik*, München 1950, 89-90, 117-122, 176-177: «der bloße Genitiv zum Ausdruck des Verwandtschafts- und Eigentumsverhältnisses steht an Stelle eines ältern Adjektivs der Zugehörigkeit» (119).

[12] Schwyzer - Debrunner, *op. cit.* (n. 11), 177.

Siano $(E, \|\cdot\|_E)$ normato, $M < E$ e $N < E'$:

$M^\perp = \{f \in E' \mid M < \mathrm{Ker}(f)\}$ mentre $N^\perp = \{x \in E \mid \forall f \in N,\ f(x)=0\}$.
($\forall x \in M,\ f(x)=0$)

Allora $M^\perp < E'$ e $N^\perp < E$, e in più $M^\perp = \bigcap_{x\in M} T_x^{-1}(\{0\})$ è debole* chiuso
($\{0_{E'}\} \subseteq M^\perp$) ($\{0_E\} \subseteq N^\perp$)

in E', mentre $N^\perp = \bigcap_{f\in N} \mathrm{Ker}(f)$ è chiuso (debole) di E. (Notiamo che $M_1 < M_2 < E$ $\Rightarrow M_2^\perp < M_1^\perp \ (< E')$, e che $N_1 < N_2 < E' \Rightarrow N_2^\perp < N_1^\perp \ (< E)$; inoltre $(\overline{M}^E)^\perp = M^\perp$.) Ora, dalle ovvietà $M < (M^\perp)^\perp$ e $N < (N^\perp)^\perp$ segue (per chiusura) che $\overline{M}^E < (M^\perp)^\perp$ e $\overline{N}^{\sigma(E',E)} < (N^\perp)^\perp$; in realtà

$(M^\perp)^\perp = \overline{M}^E$ e $(N^\perp)^\perp = \overline{N}^{\sigma(E',E)}$.

[Ossia quanto è $\leq$; abbiamo $(M^\perp)^\perp < \overline{M}^E$ in quanto, $\forall x \in (M^\perp)^\perp = \bigcap_{f\in M^\perp} \mathrm{Ker}(f)$, $x \in \overline{M}^E$ (prendendo (H.B.) una $f \in E'$ tale che $\overline{M}^E < \mathrm{Ker} f$. (Poi $(N^\perp)^\perp < \overline{N}^{\sigma(E',E)}$ in quanto, $\forall f \in (N^\perp)^\perp$ (ossia tale che $f(x)=0$ per ogni $x \in N^\perp$), comunque si prendano $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $x_i \in \overline{B}_1^E$ con $i=1,\dots,n$, esiste $g \in N$ tale che, $\forall i=1,\dots,n$, $|f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon$: infatti facendo per assurdo già no in $\overline{B_1^{N^\perp}}^E$, e allora ogni $f \in N$ soddisfa. □]

(Il fatto è che $N^\perp = \{0_E\} \Rightarrow \overline{N}^{\sigma(E',E)} = E'$, è davvero quasi "ovvio": presi $f \in E'$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, x_i fissati, voglio $g \in N$ con $|f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon$ $\forall i$ ... interpolazione lineare e dimensione infinita!!)

Grazie poi al precedente risultato, vale che $\forall G, L < E$ chiaramente

$$\Longrightarrow \begin{cases} G^\perp \cap L^\perp = (\overline{G}^E + \overline{L}^E)^\perp \ \left(= (G+L)^\perp\right) \\ \overline{G}^E \cap \overline{L}^E = (G^\perp + L^\perp)^\perp \end{cases}$$; formando gli ortogonali,

otteniamo dunque $(G^\perp \cap L^\perp)^\perp = \overline{G+L}^E$ e $(\overline{G}^E \cap \overline{L}^E)^\perp = \overline{G^\perp + L^\perp}^{\sigma(E',E)}$, da cui che, per $G, L < E$ chiusi, $G+L$ chiuso $\Leftrightarrow G+L = (G^\perp \cap L^\perp)^\perp$, e $G^\perp + L^\perp$ debole* chiuso $\Leftrightarrow G^\perp + L^\perp = (G \cap L)^\perp$. (Per E di Banach, ci sarebbe un teorema secondo il quale tali queste condizioni risultano equivalenti tra loro ed e $G^\perp + L^\perp$ chiuso ... !)

Lemma (di Riesz): se $(E, |\cdot|_E)$ è normato e se $M \subsetneq E$ chiuso, allora $\forall \varepsilon>0$, $\exists\, x_\varepsilon \in E$ con $|x_\varepsilon|_E = 1$ tale che $\mathrm{dist}(x_\varepsilon, M) \geq 1-\varepsilon$ ($\Rightarrow x_\varepsilon \notin M$)

[Dato che $\overline{M}^E = M$, per cui $x \in E\setminus M$ è $D \doteq \mathrm{dist}(x,M) > 0$: $\forall \varepsilon>0$, se prendiamo uno di tali $x \notin M$ e se $D = \inf_{y\in M}|x-y_\varepsilon|$, allora sia $y_\varepsilon \in M$ tale che $D \leq |x-y_\varepsilon|_E \leq \frac{D}{1-\varepsilon}$, e sia $x_\varepsilon \doteq \frac{x-y_\varepsilon}{|x-y_\varepsilon|_E}$

$\Rightarrow \mathrm{dist}(x_\varepsilon, M) = \frac{1}{|x-y_\varepsilon|_E}\mathrm{dist}(x,M) = \frac{D}{|x-y_\varepsilon|_E} \in [1-\varepsilon, 1]$. □]

Corollario: se $(E, |\cdot|_E)$ è normato, allora $\overline{B_1^E}$ compatta $\Rightarrow \dim E < \infty$.

[Se per assurdo $\dim E = \infty$, allora dimostriamo che $\overline{B_1^E}$ non è compatta. Infatti posso prendere $(E_n)_{n\geq1}$ con $E_n \subsetneq E$ chiuso (e dim finita) tale che $E_n \subsetneq E_{n+1}$ $\forall n\geq1$, per cui applicando Riesz ad E_{n+1} $\forall n \geq 1$ (e con $\varepsilon = \frac{1}{2}$) otteniamo che $\forall n\geq 1$ $\exists\, x_n \in E_{n+1}\setminus E_n$ tale che $|x_n|_E = 1$ e $\mathrm{dist}(x_n, E_n) \geq 1/2$: segue che $(x_n)_{n\geq1}$ è in $\overline{B_1^E}$ tale che $\forall m<n \Rightarrow |x_n - x_m|_E \geq \mathrm{dist}(x_n, E_n) \geq 1/2$. □]

$\boxed{\text{EX.}}$ $(E, \sigma(E,E'))$, e $(E', \sigma(E',E))$, non sono completi a dimensione infinita.

[A dimensione infinita, le palle di E e E' sono a parte interna vuota in senso debole, e ovviamente $E = \bigcup_{n\geq1} B_n^E$ e $E' = \bigcup_{n\geq1} B_n^{E'}$: E, E' non sono completi, altrimenti avrei Baire. □]

Teorema: E (di Banach) uniformemente convesso $\Rightarrow$ E riflessivo.

In altre parole, sapendo che « $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta_\varepsilon > 0$ tale che, $\forall x, y \in \overline{B_1^E}$, se $|x-y|_E > \varepsilon$ allora $\left|\frac{x+y}{2}\right|_E < 1-\delta$ », vogliamo che $\partial B_1^{E''} = J(\partial B_1^E)$, ossia (per chiusura) che quest'ultimo sia denso in $\partial B_1^{E''}$: $\forall z \in E''$ con $\|z\| = 1$, e $\forall \varepsilon > 0$, esiste $x \in \overline{B_1^E} \setminus \{0\}$ tale che $\|z - J(x)\| \leq \varepsilon$. Fissiamo quindi $z \in \partial B_1^{E''}$, $\varepsilon > 0$ e $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ (dalla def.), e prendiamo subito un $f \in \partial B_1^{E'}$ tale che $z(f) \geq (1 - \frac{\delta}{2})\|f\|$ (essendo appunto $\|z\| = 1$); in virtù del fatto che $\overline{J(\overline{B_1^E})}^{\sigma(E'',E')} = \overline{B_1^{E''}}$ (Goldstine), se consideriamo $V_1 \doteq \{\xi \in E'' \mid |\xi(f) - z(f)| < \frac{\delta}{2}\} \ni z$ allora $\exists z_1 \in V_1 \cap J(\overline{B_1^E})$, ossia $\exists x_1 \in \overline{B_1^E}$ tale che $z_1 = J(x_1)$ e $|(z_1 - z)(f)| < \frac{\delta}{2}$. Se per assurdo fosse $\|z - z_1\| > \varepsilon$, allora avremmo che $z \in V_2 \doteq V_1 \cap \left(\underbrace{\overline{B_\varepsilon^{E''}(z_1)}^{E''}}_{\text{(deb.* chiusa)}}\right)^c$ ed esisterebbe $z_2 \in V_2 \cap J(\overline{B_1^E})$, ovvero $z_2 = J(x_2)$ con $x_2 \in \overline{B_1^E}$ tale che $\begin{cases} |z_2(f) - z(f)| < \frac{\delta}{2} \\ \|z_2 - z_1\| > \varepsilon \end{cases}$; segue che $\underbrace{2z(f) - \delta}_{2(1-\delta) \leq} < z_1(f) + z_2(f)$ $= (z_1 + z_2)(f) \leq \|z_1 + z_2\| = |x_1 + x_2|_E$, ma $\left|\frac{x_1 + x_2}{2}\right|_E > 1-\delta$, mentre però $|x_2 - x_1|_E = \|z_2 - z_1\| > \varepsilon$: contraddizione. $\square$

Sia $(H, \langle;\rangle)$ uno spazio di Hilbert (reale) e sia C un convesso chiuso $\neq \emptyset$ di H.

TEOREMA: $\exists!\, y \in C$ di minima norma (fra gli elementi di C), ed è caratterizzato dalla seguente proprietà: $\forall z \in C$, $\langle z - y ; y \rangle \geq 0$. (Cioè $\langle z ; y \rangle \geq |y|^2$.) (Pertanto, $0_H \in C \Leftrightarrow y = 0_H$.)

COR. ▶ $\forall x \in H$, $\exists!\, y \in C$ tale che, $\forall z \in C$, $|y - x| \leq |z - x|$ o equivalentemente $\langle z - y ; y - x \rangle \geq 0$. (Resta così definita $P_C : H \to C$, $P_C(x) \doteq y$.)

▶ P_C è sempre 1-lipschitziana, e nel caso sia $C < H$ (chiuso) P_C è esattamente il proiettore di H su C, ossia tale che $\forall x \in H$, $x - P_C(x) \in C^\perp$.

[Altrimenti, H riflessivo con $|\cdot|$ convessa s.c.i. e coerciva su C $\Rightarrow$ $|\cdot|$ ha minimo assoluto su C, sia ad esempio in $y \in C$; ma allora tale y deve essere l'unico di minima norma, come si vede subito usando che $\forall y' \in C, y' \neq y$,

$$\left|\frac{y+y'}{2}\right|^2 = \frac{|y|^2}{2} + \frac{|y'|^2}{2} - \left|\frac{y-y'}{2}\right|^2$$
$(\in C)$

. Inoltre, $\forall z \in C$ e $\forall t \in (0,1]$, è

$$|y|^2 \leq |(1-t)y + tz|^2 = |y + t(z-y)|^2 = |y|^2 + t^2|z-y|^2 + 2t\langle z-y ; y\rangle$$

$\Rightarrow \langle z-y ; y\rangle \geq -\frac{t}{2}|z-y|^2$ (e ora $t \downarrow 0$). ✓ Viceversa, se $y \in C$ è $(\exists!)$ tale che, $\forall z \in C$, $\langle z-y ; y\rangle \geq 0$, allora $|y|^2 \leq \langle z ; y\rangle \leq |z||y|$. ✓

Adesso, $\forall x \in H$, essendo pure $C-x$ un convesso chiuso (di H) $\neq \emptyset$, so che $\exists!\, y \in C$ tale che, $\forall z \in C$, $|y-x| \leq |z-x|$ e anche tale che $\langle (z-x)-(y-x) ; y-x\rangle \geq 0$. ✓

Volendo infine provare che, $\forall x, x' \in H$, se $y = P_C(x)$ e $y' = P_C(x')$ allora $|y-y'| \leq |x-x'|$, uso il fatto che
$(\exists)$
$$\begin{cases} \langle y'-y ; y-x\rangle \geq 0 \\ \langle y'-y ; x'-y'\rangle \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\langle y'-y ; (x'-x)-(y'-y)\rangle \geq 0$, $\Rightarrow |y'-y||x'-x| \geq \langle y'-y ; x'-x\rangle \geq$
$\geq |y'-y|^2$. $\square$]

Sia $(H, \langle ; \rangle)$ uno spazio di Hilbert (reale) e sia $a : H^2 \to \mathbb{R}$ una forma bilineare su H. a è "continua" se $\exists C > 0$ tale che, $\forall u, v \in H$, $a(u,v) \leq C|u||v|$, mentre a è "coerciva" se $\exists K > 0$ tale che, $\forall u \in H$, $a(u,u) \geq K|u|^2$; dunque, se a è continua e coerciva, allora $K|u|^2 \leq a(u,u) \leq C|u|^2$: segue che, nel caso a sia pure "simmetrica" ($a(u,v) = a(v,u)$ $\forall u,v \in H$), a è un prodotto scalare su H definito positivo tale che la norma indotta $|u|_a = \sqrt{a(u,u)}$ sia equivalente a $|\cdot|$. In particolare varrebbe Cauchy-Schwartz e che $u \mapsto \sqrt{a(u,u)}$, ma $u \mapsto a(u,u)$, siano strettamente convesse, continue e coercive.

(In verità, per avere che, $\forall u, v \in H$, $a(u,v) \leq \sqrt{a(u,u)}\sqrt{a(v,v)}$ basterebbe che a sia una forma bilineare con $a(u,u) \geq 0$ $\forall u \in H$ e simmetrica, poiché così $\forall t \in \mathbb{R}$ $0 \leq a(u+tv, u+tv) = t^2 a(v,v) + 2t\,a(u,v) + a(u,u)$ $\forall u,v \in H$ fissati, da cui la condizione $\Delta/4 \leq 0$, ossia appunto $(a(u,v))^2 - a(v,v)a(u,u) \leq 0$. $\checkmark$)

Teorema di LAX-MILGRAM*: se a è una forma bilineare su H continua e coerciva, e se C è un convesso chiuso $\neq \emptyset$ di H, allora $\forall w \in H$ $\exists! u \in H$ tale che, $\forall v \in V$, $\langle w; v \rangle = a(u,v)$. Se poi a è simmetrica, allora u è l'unico minimo su C di

$F := F_w : \cancel{H} \xrightarrow{C} \mathbb{R}$, $F(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - \langle w; u \rangle$

(F strett. conv., cont. e coerciva su C)

[Dimostriamolo solo per $C = H$, ed a pure simmetrica, e sia allora $u \in H$ il punto di minimo di F: segue che, $\forall t \in \mathbb{R}$ e $\forall v \in H$, $F(u) \leq F(u+tv) = F(u) + \frac{t^2}{2}a(v,v) + t(a(u,v)) - t\langle w; v \rangle$; da cui per $t > 0$ $\langle w; v \rangle - a(u,v) \leq \frac{t}{2}a(v,v)$, e ora $t \downarrow 0$ ($\Rightarrow$ il ≤ 0); non può essere $\langle w;v\rangle - a(u,v) < 0$ neanche per un solo v, poiché porremo nella formula il $-v$! Viceversa, se $a(u,v) = \langle w; v \rangle$ $\forall v \in H$, allora $F(\underset{(t=1)}{u+v}) = F(u) + \frac{1}{2}\underset{(\geq 0)}{a(v,v)} + a(u,v) - \langle w; v \rangle \geq F(u)$ $\forall v \in H$. $\square$]

Siano $T \in \mathcal{L}(E,F)$ $(\to T^\# \in \mathcal{L}(F',E'))$ con E e F di Hilbert: allora da

$$\begin{array}{ccccccc} F & \longleftrightarrow & F' & \xrightarrow{T^\#} & E' & \longleftrightarrow & E \\ \downarrow & & & & & & \downarrow \\ y & \leftrightarrow & \langle \cdot ; y \rangle_F & & \langle \cdot ; x_0 \rangle_E & \leftrightarrow & x_0 \end{array}$$

abbiamo che, $\forall y \in F$, $\exists!\, x_0 \in E$ tale che $T^\#(\langle \cdot ; y \rangle_F) = \langle \cdot ; x_0 \rangle_E$ e poiché infatti $F' \equiv F$ ed $E' \equiv E$ possiamo scrivere $x_0 \doteq T^\# y$; dunque, $\forall y \in F$ e $\forall x \in E$, $\langle Tx ; y \rangle_F = T^\#(\langle \cdot ; y \rangle_F)(x) = \langle x ; T^* y \rangle_E$. Se $F = E$ e se $T^* = T$, allora T è "autoaggiunto" o "simmetrico".

Siano $(E, |\cdot|_E)$, $(F, |\cdot|_F)$ normati e sia $T : D(T) < E \to F$ lineare su $D(T)$ denso in E (che va inteso come massimo dominio di definizione di T); se $D(T^*) \doteq \{\omega \in F' \mid \omega(T) \text{ limitato su } D(T)\} = \{\omega \in F' \mid \exists c>0 : \forall u \in D(T),\ \omega(T(u)) \leq c\,|u|_E\} < F'$, allora, per qui $\omega \in F'$ (e solo per queste), $\omega(T) : \underset{D(T)<E}{\cancel{E}} \to \mathbb{R}$ è lineare e continua $\overset{(H.B.)}{\Rightarrow}$ ammette un'estensione in E' che mantiene la sua norma, e inoltre tale estensione è unica (per densità di $D(T)$): resta così definito "l'aggiunto di T" "T^*": $D(T^*) < F' \to E'$, $T^*\omega \doteq$ "la sola estensione a tutto E di $\omega(T)$", ossia $(T^*\omega)(u) \doteq \omega(T(u))$ $\forall u \in D(T)$.

Dunque anche T^* è lineare, e $\|T^*\| \doteq \sup_{\substack{\omega \in D(T^*),\\ \|\omega\| \leq 1}} \|T^*\omega\| = \sup_{\substack{\omega \in D(T^*),\\ \|\omega\| \leq 1}} \|\omega(T)\| \leq \|T\|$.

▶ Se $D(T^*) = F'$, allora $\|T\| \underset{(\leq)}{=} \|T^*\|$. [$\forall u \in D(T)$ con $|u|_E \leq 1$, $T(u) \in F$ ha $|T(u)|_F = \sup_{\omega \in B_1'} \omega(T(u))$; ma, per qui $\omega \in \underset{(D(T^*))}{F'}$ con $\|\omega\| \leq 1$, $\omega(T(u)) = (T^*\omega)(u) \leq \|T^*\omega\| \leq \|T^*\|$. ▫]

⇒ ▶ Se $D(T) = E$ ossia se $T \in \mathcal{L}(E,F)$, allora ovviamente $D(T^*) = F'$ e $T^* \in \mathcal{L}(F', E')$ con $\|T^*\| = \|T\|$.

(Es.: $(id_E)^* = id_{E'}$)

$\boxed{\text{Ex.}}$ Siano $S, T \in \mathcal{L}(E,F)$ e $U \in \mathcal{L}(F,G)$, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$: allora $(\lambda T)^* = \lambda T^*$, $(S+T)^* = S^* + T^*$, e $(U(T))^* = T^*(U^*)$, per cui se T è invertibile allora anche T^* lo è e $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

[$\forall \omega \in F'$, $(\lambda T)^*(\omega) = \omega(\lambda T) = \lambda\omega(T) = \lambda T^*(\omega)$; $(S+T)^*(\omega) = \omega(S+T) = \omega(S) + \omega(T) = (S^* + T^*)(\omega)$; $\forall w \in G'$, $(U(T))^*(w) = w(U(T)) = (\underbrace{w(U)}_{\in F'})(T) = T^*(w(U)) = T^*(U^*(w)) = (T^*(U^*))(w)$; infine allora $id_{E'} = (id_E)^* = (T^{-1}(T))^* = T^*(T^{-1})^*$. ▫]

▶ T^* ha sempre grafico chiuso ("è chiuso").

[Sia $\Gamma_{T^*} \doteq \{(\omega, T^*\omega) \in F' \times E' \mid \omega \in D(T^*)\}$ e sia $(\omega_n)_{n \geq 1}$ in $D(T^*)$ tale che

$$\begin{cases} \omega_n \xrightarrow{F'} \omega \\ T^*\omega_n \xrightarrow{E'} f \end{cases}$$

: allora $\omega \in D(T^*)$ e $f = T^*\omega$. Infatti, $\forall u \in D(T)$, è chiaramente

$$\left.\begin{array}{l} \omega_n(T(u)) \longrightarrow \omega(T(u)) \\ \overset{\|}{(T^*\omega_n)(u)} \longrightarrow f(u) \end{array}\right\}$$

$\forall u \in D(T)$, $\omega(T(u)) = f(u)$, è limitato ⇒ $\omega \in D(T^*)$, e il fatto che $f \in E'$ tale che $f_{|D(T)} = \omega(T)$ ⇒ $f = T^*\omega$. ▫]

(già vista) $\leadsto$ Se fosse T sempre chiuso, allora sarebbero equivalenti le seguenti condizioni se E, F di Banach : $D(T) = E$, $T \in \mathcal{L}(E,F) \Longleftrightarrow D(T^*) = F'$, $T^* \in \mathcal{L}(F', E')$.

Oss. Se T è chiuso, ossia $\Gamma_T := \{(u, T(u)) \mid u \in D(T)\} < E \times F$ è ivi chiuso, non potendo ovviamente essere tutto non è denso, e allora (per H.B.) $\exists (f, g) \in E' \times F'$ tale che, $\forall u \in D(T)$, $f(u) + g(T(u)) = 0$, ossia $g(T(u)) = -f(u)$ $\leadsto$ $g \in D(T^*)$ con $T^* g = -f$! Per tali (f,g) si ha allora che $(f \oplus g)_{|\Gamma_T} = 0$, e pertanto $\Gamma_T^\perp = j(\Gamma_{T^*})$ se j è l'isometria di rotazione di $+ \frac{\pi}{2}$ data da $j : F' \times E' \longrightarrow E' \times F'$ (ovviamente $j^2 = -\mathbb{1}$) .
$\{(-T^*\omega, \omega) \mid \omega \in D(T^*)\}$
$(g, f) \longmapsto (-f, g)$

Proposizione : se T è chiuso e se F è riflessivo, allora $D(T^*)$ è denso in F'.
Resta così definito $T^{**} = (T^*)^*$: $D(T^{**}) < E'' \longrightarrow F'' (= F)$: vale che $D(T) < D(T^{**})$, $T^{**}(D(T)) < F$ e $T^{**}|_{D(T)} = T$.

[Anzitutto, osserviamo che se T^{**} esiste allora soddisfa le proprietà enunciate : essendo $D(T^{**}) \doteq \{\xi \in E'' \mid \xi(T^*)$ è limitato$\}$, $\forall u \in D(T)$ è $T_u \in D(T^{**})$ in quanto effettivamente $(T_u(T^*))(\omega) = T_u(T^*\omega) = (T^*\omega)(u) = \omega(T(u))$ è limitato $\forall \omega \in D(T^*)$;
$\underset{(D(T^*))}{\omega}$
inoltre ora $T^{**}(T_u) = T_u(T^*) = \underset{(\in F'')}{T_{T(u)}}$ come appena calcolato . /
Vediamo allora che , se T è chiuso e F è riflessivo, allora tutte e sole le $\varphi \in F''$ tali che $\varphi_{|D(T^*)} = 0$ sono $\varphi = \{0_{F''}\}$. Infatti anzitutto sia $\eta \in F$ quell'elemento tale che $\varphi \overset{\text{rifl.}}{=} T_\eta$, ossia tale che $\varphi(\omega) = \omega(\eta)$ $\forall \omega \in F'$; allora $\eta = \{0_F\}$, perché se per assurdo $\eta \neq 0_F$ allora ovviamente $(0, \eta) \notin \Gamma_T$ e dunque (per l'Oss. precedente) $\exists (f, g) \in E' \times F'$ tale che $\begin{cases} (f \oplus g)|_{\Gamma_T} = 0 \\ g(\eta) \neq 0 \end{cases}$ $\leadsto$ $\begin{cases} g \in D(T^*) \\ \varphi(g) \neq 0 \end{cases}$, che è assurdo. $\square$]

Oss. Se T è chiuso , per cui $\Gamma_T^\perp = \{(-T^*\omega, \omega) \mid \omega \in D(T^*)\}$, e se $G \doteq E \times \{0_F\}$,
$\nexists G^\perp = \{0_E\} \times F'$)
allora $\begin{cases} E \times \mathrm{Im}(T) = \Gamma_T + G \\ \Gamma_T \cap G = \mathrm{Ker}(T) \times \{0_F\} \end{cases}$ e $\begin{cases} \mathrm{Im}(T^*) \times F' = \Gamma_T^\perp + G^\perp \\ \Gamma_T^\perp \cap G^\perp = \{0_E\} \times \mathrm{Ker}(T^*) \end{cases}$

▶ Se T è chiuso, allora $\begin{cases} Ker(T) = Im(T^*)^{\perp} \\ Ker(T^*) = Im(T)^{\perp} \end{cases}$

($\Rightarrow$ $Ker(T)^{\perp} = \overline{Im(T^*)}^{\sigma(E',E)}$ e $Ker(T^*)^{\perp} = \overline{Im(T)}^{F}$, per cui $Im(T)$ chiuso (in F) $\Leftrightarrow Im(T) = Ker(T^*)^{\perp}$, e $Im(T^*)$ debole* chiuso (in E') $\Leftrightarrow Im(T^*) = Ker(T)^{\perp}$.)

[Grazie all'oss. precedente, $Im(T^*)^{\perp} \times \{0_F\} = (Im(T^*) \times F')^{\perp} = (\Gamma_T^{\perp} + G^{\perp})^{\perp} \overset{(\text{chiusi})}{=}$
$= \Gamma_T \cap G = Ker(T) \times \{0_F\}$; analogamente $\{0_{E'}\} \times Im(T)^{\perp} = (E \times Im(T))^{\perp} =$
$= (\Gamma_T + G)^{\perp} = \Gamma_T^{\perp} \cap G^{\perp} = \{0_{E'}\} \times Ker(T^*)$.] (NOTA: le condizioni $Im(T)$ chiuso e $Im(T^*)$ debole* chiuso sono equivalenti ......)

Oss.: $T \in \mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E) \Rightarrow T^* \in \mathcal{L}(E')$; considerato $(id_E - T)^* = id_{E'} - T^*$, $Ker(id_{E'} - T^*)$ è debole* chiuso in E', in quanto è $= \{f \in E' \mid f - T^*f = 0\} =$
(i punti fissi di T^*) $\Rightarrow$ ($\subseteq Im(T^*)$)
$= \{f \in E' \mid \forall x \in E,\ f(x) - \underbrace{(T^*f)(x)}_{f(Tx)} = 0\} = \bigcap_{x \in E} T^{-1}_{(x - Tx)}(\{0\})$. ✓
$f(x - Tx)$

Sia $T \in \mathcal{L}(E,F)$: T è "a rango finito" se la sua immagine ha dimensione finita, mentre T è "compatto" se manda limitati (di E) in precompatti (di F): ovvero se $\dim(Im(T)) < \infty$ e, $\forall B \subseteq E$ limitato, $\overline{T(B)}^F$ compatto, rispettivamente.
Indicando con $B_E = \overline{B_1^E}^E$, T è compatto $\Leftrightarrow \overline{T(B_E)}^F$ compatto.
[$\forall B \subseteq E$ limitato, sia $r > 0$ tale che $B \subseteq B_r^E \Rightarrow \overline{T(B)}^F \subseteq \overline{T(B_r^E)}^F$: basta provare che $\overline{T(B_r^E)}^F$ è compatto; ma infatti tale è $= \overline{T(rB_E)}^F = r\,\overline{T(B_E)}^F$. ✓]
Visto che $\overline{T(B_E)}^F \subseteq \overline{B^F_{\|T\|}}^F$ è limitato, se T è a rango finito allora è compatto.
(Es.: $T = 0$; se $F = E$ e $T = id_E$, allora T è a rango finito o compatto $\Leftrightarrow \dim E < \infty$.)

oss.1 Se T è compatto e se $\dim F = \infty$, allora T non è suriettivo. [Altrimenti sarebbe aperto, ossia ci sarebbe $r > 0$ tale che $\overline{B_r^F}^F \subseteq \overline{T(B_E)}^F$ e la palla di F sarebbe compatta!]

oss.2 $\{T \in \mathcal{L}(E,F) \mid T \text{ è a rango finito}\} < K(E,F) := \{T \in \mathcal{L}(E,F) \mid T \text{ è compatto}\} < \mathcal{L}(E,F)$.
[$\overline{(\lambda T)(B_E)}^F = \lambda\,\overline{T(B_E)}^F$; $\overline{(T+S)(B_E)}^F = \overline{T(B_E)}^F + \overline{S(B_E)}^F$. ✓]

▶ $K(E,F)$ è chiuso in $\mathcal{L}(E,F)$. (ossia ▶ Se $(T_n)_{n \geq 1}$ sono a rango finito tali che $T_n \xrightarrow{\mathcal{L}(E,F)} T$, allora $T \in K(E,F)$.)

[Sia $(T_n)_{n \geq 1}$ in $K(E,F)$ tale che $T_n \xrightarrow{\mathcal{L}(E,F)} T$: allora anche $T \in K(E,F)$. Infatti costretto $\sup_{|x|_E \le 1} |T(x) - T_m(x)|_F \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, cioè $\forall \varepsilon>0$, $\exists\, m_\varepsilon \ge 1$ tale che, $\forall m \ge m_\varepsilon$, è $|T(x) - T_m(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in E$ con $|x|_E \le 1$; ebbene T_{m_ε} è compatto, cioè $\overline{T_{m_\varepsilon}(B_E)}^F$ è totalmente limitato (in F), cioè lo è $T_{m_\varepsilon}(B_E)$: in particolare, in corrispondenza dello stesso $\varepsilon>0$, $\exists\, N_\varepsilon \ge 1$ e $\exists\, x_1,\dots,x_{N_\varepsilon}$ in B_E tali che $T_{m_\varepsilon}(B_E) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B^F_\varepsilon(T_{m_\varepsilon}(x_i))$; allora anche T è compatto (poiché $T(B_E) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B^F_{3\varepsilon}(T(x_i))$: infatti, $\forall x \in B_E$, se x_k è tale che $T_{m_\varepsilon}(x) \in B^F_\varepsilon(T_{m_\varepsilon}(x_k))$, allora $|T(x) - T(x_k)|_F \le \underbrace{|T(x) - T_{m_\varepsilon}(x)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|T_{m_\varepsilon}(x) - T_{m_\varepsilon}(x_k)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|T_{m_\varepsilon}(x_k) - T(x_k)|_F}_{<\varepsilon} < 3\varepsilon$. □]

▶ Se F è di Hilbert, allora per ogni $T \in K(E,F)$ esiste $(T_m)_{m\ge1}$ a rango finito tale che $T_m \xrightarrow{\mathcal{L}(E,F)} T$.

[So che, $\forall m \ge 1$, $\overline{T(B_E)}^F \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_m} B^F_{1/m}(x_i)$ per opportuni $N_m \ge 1$ e $x_1,\dots,x_{N_m}$ in $T(B_E)$; ma so pure che esiste la proiezione P_m di F sul convesso chiuso $\langle x_1,\dots,x_{N_m}\rangle < F$, per cui $\|P_m\| = 1$ $\forall m \ge 1$: ponendo allora $T_m \doteq P_m(T)$, abbiamo effettivamente che $\sup_{|x|_E \le 1} |T(x) - T_m(x)|_F \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ in quanto, $\forall x \in B_E$, se x_k è tale che $|T(x) - x_k|_F \le \frac{1}{m}$, allora pure $|T_m(x) - \underbrace{x_k}_{P_m(x_k)}|_F = |P_m(T(x) - x_k)|_F \le 1/m$ e quindi $|T(x) - T_m(x)|_F \le |T(x) - x_k|_F + |x_k - T_m(x)| \le \frac{2}{m}$. □]

Proposizione: per $T \in \mathcal{L}(E,F)$, $T \in K(E,F) \Leftrightarrow T^* \in K(F',E')$.

[Basta ($\Rightarrow$), la quale infatti darebbe ($\Leftarrow$): questo perché, se T^* fosse compatto, allora effettivamente anche $T^{**}: E'' \to F''$ sarebbe compatto; ricordando ora che $T^{**}|_E = T$, avremmo dunque $\overline{T(B_E)}^F \doteq \overline{T^{**}(B_E)}^{F''} \subseteq \overline{T^{**}(B_{E''})}^{F''}$ compatto. ✓ Vediamo pertanto ($\Rightarrow$): so che $\overline{T(B_E)}^F$ è compatto e voglio dedurre che $\overline{T^*(B_{F'})}^{E'}$ è compatto, cioè che, per ogni $(\omega_m)_{m\ge1}$ in $B_{F'}$, $(T^*(\omega_m))_{m\ge1}$ è relativamente compatta in E'; ma infatti $(\omega_m)_{m\ge1}$ è equilimitata (continue) nel compatto $\overline{T(B_E)}^F$ (essendo $\omega_m(T(x)) \le \|T\|$) ma (Ascoli-Arzelà)

$(\varpi_n)_{n\ge1}$ ammette una sottosuccessione uniformemente convergente su $\overline{T(B_E)}^E$, e allora, se tale è $(\varpi_{n_k})_{k\ge1}$, $(T^*\varpi_{n_k})_{k\ge1}$ è di Cauchy in E': infatti, $\forall h,k\ge1$,

$$\|T^*\varpi_k - T^*\varpi_h\| = \sup_{x\in B_E}|\underbrace{(T^*\varpi_k)(x)}_{(=\varpi_k(Tx))} - \underbrace{(T^*\varpi_h)(x)}_{(=\varpi_h(Tx))}| \le \sup_{y\in\overline{T(B_E)}}|\varpi_k(y)-\varpi_h(y)| \xrightarrow[k,h\to\infty]{} 0 \quad \blacksquare$$

Poniamo $K(E)\doteq K(E,E)$ e $I\doteq id$.

Teorema (dell'alternativa di FREDHOLM) ☆: per $T\in K(E)$ ($T^*\in K(E')$), $I-T\in\mathcal{L}(E)$ è tale che

(1) $d\doteq\dim(\ker(I-T))<\infty$; ($d^*\doteq\dim(\ker(I-T^*))<\infty$)

(2) ha immagine chiusa: $\mathrm{Im}(I-T)=\ker(I-T^*)^\perp$ (è di codimensione finita); ($\mathrm{Im}(I-T^*)=\ker(I-T)^\perp$)

(3) è iniettivo se, e solo se, è suriettivo: $d=0 \iff \mathrm{Im}(I-T)=E$; ($d^*$) ($T^*$) ($E'$)

(4) $d^*=d$ se E è di Banach.

($\leadsto$ L'equazione (in $x\in E$) $(I-T)(x)=f$ ha soluzione se, e solo se, $f\in\ker(I-T^*)^\perp$, il che equivale a certe d "condizioni di ortogonalità". Inoltre $\mathrm{Im}(I-T)^\perp=\ker(I-T^*)$ (è debole* chiuso in E') e $\mathrm{Im}(I-T^*)_\perp=\ker(I-T)$.)

(1) $\ker(I-T)$ è $\subseteq\mathrm{Im}(T)$, per cui la sua palla unitaria è $=B_E\cap\underbrace{\ker(I-T)}_{(\text{chiuso})}\subseteq\overline{T(B_E)}^E$, per cui è compatta: $d<\infty$ (per Riesz).

(2) Se $(y_n)_{n\ge1}$ è in $\mathrm{Im}(I-T)$ tale che $y_n\xrightarrow{E}y$, allora (ecco) $y\in\mathrm{Im}(I-T)$. Infatti sia $(x_n)_{n\ge1}$ in E tale che, $\forall n\ge1$, $y_n=(I-T)(x_n)=x_n-T(x_n)$; nel caso che $(x_n)_{n\ge1}$ fosse limitata in E, allora per compattezza di T ci sarebbe $(x_{n_k})_{k\ge1}$ estratta tale che $T(x_{n_k})\xrightarrow{E}l$: dato che $y_{n_k}\xrightarrow{E}y$, seguirebbe quindi $x_{n_k}\xrightarrow{E}y+l\overset{\text{cont }T}{\Rightarrow}T(y+l)=l$, da cui ovviamente $y=(I-T)(y+l)$ ($\in\mathrm{Im}(I-T)$). Si tratta allora di trovare (se possibile) una $(\tilde{x}_n)_{n\ge1}$ in E limitata tale che, $\forall n\ge1$, $y_n=(I-T)(\tilde{x}_n)$; ora però, per il punto (1), $\ker(I-T)<E$ è chiuso e di dimensione finita, dunque $\forall m\ge1$

$$\mathrm{dist}(x_m,\ker(I-T))\doteq\inf_{z\in\ker(I-T)}|x_m-z|_E=\min_{z\in\ker(I-T)}|x_m-z|_E$$

: $\forall m\ge1$, sia allora $z_m\in\ker(I-T)$ tale che $|x_m-z_m|_E=\mathrm{dist}(x_m,\ker(I-T))$, e sia $\tilde{x}_n\doteq x_n-z_n$: $\forall n\ge1$, $(I-T)(\tilde{x}_n)=y_n$. Se per assurdo $|\tilde{x}_n|_E\to\infty$ (per cui posso supporre $\tilde{x}_n\neq0$ $\forall n\ge1$), allora $\frac{\tilde{x}_n}{|\tilde{x}_n|_E}$ sarebbe tale che $(I-T)\frac{\tilde{x}_n}{|\tilde{x}_n|_E}=\frac{y_n}{|\tilde{x}_n|_E}\xrightarrow{E}0$

($(x_n)_{n\ge1}$, essendo convergente, resta limitata) ; ma $(I-T)\frac{\tilde{x}_n}{|\tilde{x}_n|_E} =$

$= \frac{\tilde{x}_n}{|\tilde{x}_n|_E} - T\left(\frac{\tilde{x}_n}{|\tilde{x}_n|_E}\right) \overset{T\in K(E)}{\Rightarrow} \exists\, T\left(\frac{\tilde{x}_{n_k}}{|\tilde{x}_{n_k}|_E}\right) \xrightarrow[k]{E} z$, per cui necessariamente anche

$\frac{\tilde{x}_{n_k}}{|\tilde{x}_{n_k}|_E} \xrightarrow[k]{E} z$: da $(I-T)\frac{\tilde{x}_{n_k}}{|\tilde{x}_{n_k}|_E} \xrightarrow{E} 0$ seguirebbe allora che $z \in Ker(I-T)$.

Ecco l'assurdo: $1 = \frac{dist(x_n, Ker(I-T))}{|\tilde{x}_n|_E} \to 0$. ✓

(3) Basta provare che $I-T$ iniettivo $\Rightarrow$ $I-T$ suriettivo : in tal caso, infatti, se $Im(I-T) = E$ allora $\{0_{E'}\} = E^\perp = Im(I-T)^\perp \overset{(2)}{=} Ker(I-T^*)$, ossia $I-T^*$ iniettivo $\Rightarrow$ $I-T^*$ suriettivo, ossia $Im(I-T^*) = E'$ da cui effettivamente $\{0_E\} = (E')^\perp = Im(I-T^*)^\perp \overset{(2)}{=} Ker(I-T)$. Sia pertanto $I-T$ iniettivo : se per assurdo $Im(I-T) = (I-T)(E) =: E_1 \subsetneq E$ ($\exists\, I-T : E \to E_1$), allora per iniettività $(I-T)(E_1) = (I-T)^2(E) =: E_2 \subsetneq E_1$ (perché, se $x \in E \setminus E_1$, allora $(I-T)(x) \in E_1$ e quindi dovrebbe $(I-T)(x) \notin (I-T)(E_1) = E_2$), e per (2) devono essere chiusi in E! Dunque otteniamo $(E_n)_{n\ge1}$ tale che, $\forall n \ge 1$, $E_n \subsetneq E$ chiuso e $E_{n+1} \subsetneq E_n$: $\forall n \ge 1$, per Riesz, $\exists\, x_n$ con $|x_n|_E = 1$ e $x_n \in E_n$ tale che $dist(x_n, E_{n+1}) \ge \frac{1}{2}$; seguirebbe che, $\forall 1 \le m < n$,

$|T(x_m) - T(x_n)|_E = |x_m - \underbrace{x_n - (I-T)(x_m) + (I-T)(x_n)}_{\in E_{m+1}}|_E \ge 1/2$:

assurdo contro la compattezza di T. ✓

(4) Basta ottenere che $d^* \le d$, perché in tal caso $T^{**} \in K(E'')$, tale che $T^{**}|_E = T$, avrebbe effettivamente $d^{**} = Ker(I-T^{**}) \le d^*$; ma al tempo stesso $Ker(I-T) \subseteq Ker(I-T^{**})$. ✓ Ebbene, so che $Im(I-T) \overset{(2)}{=} {}^\perp Ker(I-T^*)$ ha codimensione finita d^*, per cui avrebbe in E un supplementare topologico $F < E$ (chiuso con $Im(I-T) \cap F = \{0_E\}$ e $Im(I-T) + F = E$) con $dim(F) = d^*$; d'altra parte $Ker(I-T)$ ha (sopra) dimensione finita d (1), per cui avrebbe un supplementare topologico in E e soprattutto un proiettore di E in sé, cioè $P = P_{Ker(I-T)}$. Se per assurdo fosse $d < d^*$, allora

esisterebbe una $\Lambda : \mathrm{Ker}(I-T) \to F$ lineare (cont.) iniettiva ma non suriettiva; otterremmo così cambiando $S = T + \Lambda(P) \in \mathcal{L}(E)$, ancora $S \in K(E)$ (in quanto somma di compatto con uno a rango finito), tale che quindi sarebbe $I-S$ non suriettiva: infatti $I-S = (I-T) - \Lambda(P)$ che $\mathrm{Im}(I-S) = \mathrm{Im}(I-T) + \mathrm{Im}(\Lambda(P))$, per cui un $\underset{(\neq 0)}{x} \in F \setminus \mathrm{Im}(\Lambda)$ è anche $x \notin \mathrm{Im}(I-S)$. ✓

L'assurdo è grazie al punto (3), perché invece $I-S$ sarebbe iniettiva: infatti se $x \in E$ che $(I-S)(x) = 0$, ossia $\underbrace{(I-T)(x)}_{\in \mathrm{Im}(I-T)} - \underbrace{\Lambda(P(x))}_{\in F} = 0$, allora

$$\begin{cases} (I-T)(x) = 0 \iff x \in \mathrm{Ker}(I-T) \quad (\text{cioè } x = P(x)) \\ \Lambda(P(x)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \Lambda(x) = 0 \overset{\Lambda \text{ in}}{\Rightarrow} x = 0 . \qquad \square$$

Per $(E, \|\cdot\|_E)$ normato reale e $T \in \mathcal{L}(E)$, lo "spettro" di T è il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid T - \lambda I \text{ non è bigettivo}\}$, il "risolvente" di T è $\rho(T) := \mathbb{R} - \sigma(T)$, mentre l'insieme dei "valori propri" o "autovalori" di T è il sottoinsieme di $\sigma(T)$ $VP(T) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid T - \lambda I \text{ non è iniettivo}\} \subseteq \sigma(T)$. Dire che $T - \lambda I$ non è iniettivo è dire che $\exists x \in E \setminus \{0\}$ tale che $(T - \lambda I)(x) = 0$, ossia $Tx = \lambda x$, o anche $\mathrm{Ker}(T - \lambda I) \setminus \{0_E\} \neq \emptyset$: $\forall \lambda \in VP(T) \setminus \{0\}$, sono "autovettori" di T relativi all'autovalore λ gli elementi di $\mathrm{Ker}(T - \lambda I) \setminus \{0_E\}$. Qualche osservazione elementare:

▶ $\forall \lambda \neq \lambda'$, $\mathrm{Ker}(T - \lambda I) \cap \mathrm{Ker}(T - \lambda' I) = \{0_E\}$.

[$x \in E$ che nell'intersezione $\Rightarrow \lambda x = \lambda' x$, cioè $\underset{\neq 0}{(\lambda - \lambda')} x = 0$, cioè $x = 0$. ✓]

⇝ ▶ $\forall \lambda \neq \lambda'$ e $\forall x \in \mathrm{Ker}(T - \lambda I) \setminus \{0_E\}$ e $x' \in \mathrm{Ker}(T - \lambda' I) \setminus \{0_E\}$, x e x' sono linearmente indipendenti.

[$\forall c, c' \in \mathbb{R}$, se $cx + c'x' = 0$ allora $0 = c(T(x)) + c'(T(x')) = c\lambda x + c'\lambda' x'$, ossia $\underbrace{c\lambda x}_{\in \mathrm{Ker}(T-\lambda I)} = \underbrace{-c'\lambda' x'}_{\in \mathrm{Ker}(T-\lambda' I)}$, ossia $\begin{cases} c\lambda x = 0 \\ c'\lambda' x' = 0 \end{cases}$, ossia $c = c' = 0$. ✓]
(se anche $\lambda' = 0$, allora $\lambda \neq 0$ e quindi $c = 0$; ma allora $c'x' = 0 \Rightarrow c' = 0$)

▶ $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $T(\mathrm{Ker}(T - \lambda I)) \underset{(2)}{=} \mathrm{Ker}(T - \lambda I)$.

[Se $x \in E$ è tale che $Tx = \lambda x$, allora $\mathrm{Ker}(T - \lambda I) < E$ implica $Tx \in \mathrm{Ker}(T - \lambda I)$ (λx); ma viceversa $\lambda \neq 0 \Rightarrow x = T\left(\frac{x}{\lambda}\right)$. ✓]

Proposizione: se E è di Banach e se $T \in \mathcal{B}(E)$, allora $\sigma(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|]$ ed è (ivi) compatto (ossia chiuso). (di più $\sigma(0) = \{0\}$)

[In altri termini, $\rho(T) \supseteq (-\infty, -\|T\|) \cup (\|T\|, \infty)$ e $\rho(T)$ è aperto in $\mathbb{R}$; per questo useremo il teorema delle contrazioni, dato appunto che E è uno spazio metrico completo: « $f: E \to E$ tale che $\exists K \in (0,1)$ per la quale, $\forall x, x' \in E$, $\underset{(f \text{ contrazione di } E)}{|f(x) - f(x')|_E \leq K |x - x'|_E} \Rightarrow \exists! \, x \in E$ tale che $x = f(x)$ (punto fisso di f)».
Se infatti $\underset{(\Rightarrow \lambda \neq 0)}{|\lambda| > \|T\|}$, allora $\lambda \in \rho(T)$, cioè $T - \lambda I$ è bijettiva, cioè $\forall y \in E \; \exists! \, x \in E$ tale che $(T - \lambda I)(x) = y$: ciò perché $\underset{(Tx - \lambda x)}{(T - \lambda I)(x)} = y \Leftrightarrow$
$x = \frac{T(x) - y}{\lambda} =: f(x)$, ed in effetti f è contrazione di E in quanto, $\forall x, x' \in E$, $|f(x) - f(x')|_E = \frac{1}{|\lambda|} |\underset{T(x - x')}{T(x) - T(x')}|_E \leq \underset{(\in (0,1))}{\frac{\|T\|}{|\lambda|}} |x - x'|_E$ (potendo supporre $T \neq 0$). ✓
Infine voglio che, $\forall \lambda \in \rho(T)$, se $\lambda' \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda\}$ è abbastanza vicino a λ allora anche $\lambda' \in \rho(T)$: $\forall x, y \in E$, $\overset{(Tx - \lambda' x)}{(T - \lambda' I)(x)} = y \Leftrightarrow (T - \lambda I)(x) = y + (\lambda' - \lambda) x$
$\overset{\lambda \in \rho(T)}{\Leftrightarrow} x = (T - \lambda I)^{-1}(y) + (\lambda' - \lambda)(T - \lambda I)^{-1}(x) =: f(x)$, e ora in effetti per $|\lambda - \lambda'| \downarrow 0$ f è una contrazione in quanto, $\forall x, x' \in E$, $|f(x) - f(x')|_E \leq$
$\leq |\lambda - \lambda'| \, \|(T - \lambda I)^{-1}\| \, |x - x'|_E$. ◦]

Teorema (spettro di un operatore compatto)*: se $\dim E = \infty$ e se $T \in K(E)$, allora

(1) $0 \in \sigma(T)$;

(2) $\sigma(T) = \{0\} \cup VP(T)$;

(3) $\sigma(T)$, se non è finito, allora è una successione reale infinitesima.

(quindi $\sigma(T)$ è al più numerabile!)

[(1) $0 \in \sigma(T)$ perché T non può essere invertibile.
(2) Visto che allora $\{0\} \cup VP(T) \subseteq \sigma(T)$, voglio $\sigma(T) \subseteq \{0\} \cup VP(T)$, ossia $\sigma(T) \setminus \{0\} \subseteq VP(T)$, il che vale per (3) di Fredholm.

(3) Se $\sigma(T)$ è infinito, allora $\exists!\ \lambda \in \sigma(T)$ punto di accumulazione per $\sigma(T)$ ed è $\lambda = 0$; sia infatti $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ in $\sigma(T)\setminus\{0\} = VP(T)\setminus\{0\}$ tale che $\lambda_n \to \lambda$, e supponiamo anche $\lambda_k \overset{*}{\neq} \lambda_h$ $\forall k \neq h$: allora $\lambda = 0$. Infatti, $\forall m \geq 1$, $\lambda_m \in VP(T)\setminus\{0\} \Rightarrow \exists\ z_m \in \mathrm{Ker}(T-\lambda_m I)\setminus\{0\}$; se quindi, $\forall n \geq 1$, $E_n \doteq \langle z_1, \dots, z_n\rangle$, allora $E_n \underset{\neq}{\subseteq} E_{n+1}$ in quanto $z_{n+1} \notin E_n$ (essendo $\lambda_{n+1} \neq \lambda_m$ $\forall m \leq n$ e $\overset{*}{\ldots}$) , e inoltre $\forall n \geq 2$ $(T-\lambda_n I)(E_n) \subseteq E_{n-1}$: se dunque prendiamo (per Riesz) $(x_n)_{n\geq 1}$ in E con $\|x_n\|_E = 1$, $x_n \in E_{n+1}\setminus E_n$ e $\mathrm{dist}(x_n, E_n) \geq 1/2$, allora, $\forall\ 1 \leq m < n$, $\left\|T\left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right) - T\left(\frac{x_m}{\lambda_m}\right)\right\|_E =$

$= \left|x_n - x_m + (T-\lambda_n I)\left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right) - (T-\lambda_m I)\left(\frac{x_m}{\lambda_m}\right)\right|_E \geq 1/2$ e per compattezza di T deve essere $\left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)_{n\geq 1}$ $\overset{\in E_{n-1}}{\text{illimitata}}$ in E , per cui $\|x_n\|_E = 1 \Rightarrow \frac{1}{|\lambda_n|} \to \infty$. $\square$]

Per $E =: (H, \langle;\rangle)$ di Hilbert (e $T \in \mathcal{L}(H)$) riusciamo ad approfondire di più.

▶ Se, $(\exists c>0:)$ $\forall u \in H$, $\langle Tu; u\rangle \geq c|u|^2$ ($\Rightarrow T$ è iniettivo) , allora T è invertibile (cioè suriettivo) .

[Dato che $T \in \mathcal{L}(H)$, $a(u,v) \doteq \langle Tu; v\rangle$ $\forall u,v \in H$ è una forma bilineare continua , e per ipotesi è coerciva : grazie a Lax-Milgram vale che, $\forall w \in H$, $\exists!\ u \in H$ tale che, $\forall v \in H$, $\underset{\langle Tu;v\rangle}{a(u,v)} = \langle w; v\rangle$, cioè $\forall w \in H$ $\exists!\ u \in H$ tale che $T(u) = w$. $\square$]

Per $T \in \mathcal{L}(H)$, sappiamo che $\underset{(\text{chiuso})}{\sigma(T)} \overset{*}{\subseteq} [-\|T\|, \|T\|]$; ora, $\forall u \in H$, $|\langle Tu; u\rangle| \leq \leq |Tu|\,|u| \leq \|T\|\,|u|^2$, cioè, $\forall u \in H$ con $|u| = 1$, $|\langle Tu; u\rangle| \leq \|T\|$: per cui $m \doteq \inf_{|u|=1} \langle Tu; u\rangle$ e $M \doteq \sup_{|u|=1} \langle Tu; u\rangle$ sono tali che $m \geq -\|T\|$ e $M \leq \|T\|$. Precisiamo allora la $*$:

Proposizione*. Se $T \in \mathcal{L}(H)$, allora $\sigma(T) \subseteq [m, M]$; se T è autoaggiunto , allora $m, M \in \sigma(T)$.

[Proviamo di nuovo $(-\infty, m) \cup (M, \infty) \subseteq \rho(T)$: infatti, se $\lambda < m$, allora $\underset{(\in GL(H))}{T-\lambda I}$ è bijettiva perché $a(u,v):=\langle (T-\lambda I)(u);v\rangle$ $\forall u,v\in H$ è una forma bilineare continua coerciva in quanto $\langle Tu-\lambda u;u\rangle = \langle Tu;u\rangle-\lambda|u|^2 \geq$ $\geq \underset{>0}{(m-\lambda)}|u|^2$ $\forall u\in H$ .. Analogamente, se $\lambda>M$ allora anche $-a(u,v)$ è b. b. cont. e coerciva dato che $\langle \lambda u-Tu;u\rangle = \lambda|u|^2-\langle Tu;u\rangle \geq \underset{>0}{(\lambda-M)}|u|^2$.

Supponiamo ora che, $\forall u,v\in H$, $\langle Tu;v\rangle=\langle u;Tv\rangle$, e dimostriamo ad esempio che $T-mI$ sia non bijettiva: $a(u,v):=\langle (T-mI)(u);v\rangle$ $\forall u,v\in H$ è una forma bilineare simmetrica e con $a(u,u)=\langle Tu-mu;u\rangle=\langle Tu;u\rangle-m|u|^2\geq 0$, per cui sappiamo valere che $a(u,v)\leq\sqrt{a(u,u)}\sqrt{a(v,v)}$, cioè $\langle (T-mI)(u);v\rangle\leq$ $\leq\sqrt{\langle (T-mI)u;u\rangle}\sqrt{\langle (T-mI)v;v\rangle}$: calcolando quindi il $\sup_{v\in B_H}$ (dei due membri) otteniamo $|(T-mI)u|\leq\sqrt{\langle (T-mI)u;u\rangle}$. Pertanto possiamo affermare che se $(u_n)_{n\geq1}$ è tale che $|u_n|=1$ e $\langle Tu_n;u_n\rangle\downarrow m$, per cui $\langle (T-mI)u_n;u_n\rangle\downarrow 0$, allora pure $(T-mI)u_n\to 0$: se per assurdo $T-mI$ fosse invertibile, allora seguirebbe $u_n=(T-mI)^{-1}((T-mI)u_n)\to 0$ (mentre $|u_n|=1$). □

Corollario: $T\in\mathcal{L}(H)$ autoaggiunto con $\sigma(T)=0$ $\Rightarrow$ $T=0$.

[Dato che T è simmetrico, vale che $\forall u,v\in H$ $\langle Tu;v\rangle=\frac{1}{2}\{\langle T(u+v);u+v\rangle-\langle Tu;u\rangle-\langle Tv;v\rangle\}$; inoltre seguito $m,M\in\sigma(T)$ $(\subseteq[m,M])$, per cui $m=M=0$ e cioè $\langle Tx;x\rangle=0$ $\forall x\in H$: segue che $\langle Tu;v\rangle=0$ $\forall u,v\in H$, ossia $T(u)=0$ $\forall u\in H$. □

Teorema di decomposizione spettrale*: se H è (di Hilbert) infinito dimensionale e separabile, e se $T\in K(H)$ ed autoaggiunto, allora esiste una base di Hilbert (numerabile) di H costituita da autovettori di T.

[Il fatto che H sia separabile equivale all'esistenza di una sua base hilbertiana numerabile, per cui posso supporre $T\neq 0$ e cioè $\sigma(T)\neq\{0\}$. Inoltre T è compatto, per cui $\sigma(T)=\{0\}\cup VP(T)$ ed è al più numerabile: siano $(\lambda_n)_{n\in J,\, J\subseteq\mathbb{N}}$ in $VP(T)\setminus\{0\}$ con $\lambda_k\neq\lambda_h$ $\forall k\neq h$ in J tali che precedentemente e J è finito (della forma $\{1,\dots,n\}$) o $J=\mathbb{N}$ e allora

$\lambda_n \to 0 =: \lambda_0$; poniamo in ogni caso $H_0 := \mathrm{Ker}(T)$ e, $\forall n \geq 1$ in J, $H_n = \mathrm{Ker}(T - \lambda_n I)$ (per cui, come sappiamo, $T(H_0) = \{0_H\}$ e $T(H_n) = H_n$ $\forall n \geq 1$) : allora $H_0 < H$ chiuso è a sua volta di Hilbert separabile, mentre per essi di Fredholm gli H_n sono sottinsiemi e base finita (ortonormale), e ora dimostriamo che l'unione di tali basi è la base voluta. Infatti anzitutto T autoaggiunto $\Rightarrow H_n \perp H_m$ $\forall n, m \geq 0$ $(n \neq m)$: $H_0 \perp H_m$ $\forall m \geq 1$ perché, $\forall x \in H_0$ e $y \in H_m$, $\lambda_m \langle x ; y \rangle = \langle x ; \lambda_m y \rangle = \langle x ; Ty \rangle = \langle \underbrace{Tx}_{=0} ; y \rangle = 0$; ma analogamente, $\forall n \neq m \geq 1$, $\forall x \in H_n$ e $\forall y \in H_m$, $\lambda_n \langle x ; y \rangle = \lambda_m \langle x ; y \rangle$. ✓ Infine $F := \langle H_n \mid n \geq 0 \rangle$ è denso in H, ossia $F^{\perp} = \{0_H\}$: ma infatti, semplicemente, $T_{|F}$ è ancora compatto autoaggiunto (e completo) con $\mathrm{Im}(T_{|F}) = T(F) < F$, per cui $F^{\perp} < \mathrm{Im}(T_{|F})^{\perp} = \mathrm{Ker}(T_{|F}) = F \cap \underset{(=\mathrm{Ker}(T))}{\mathrm{Ker}(T)} < F$. $\square$ ✓

SPAZI DI SOBOLEV (reali) : siano $I \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $p \in [1,\infty)$ e $u \in L^p(I)$; allora, $\forall \varphi \in C^1_c(I)$, $u\varphi$ e $u\varphi'$ sono L^p su un limitato, dunque in L^q su tale per quei $1 \le q \le p$. Inoltre, se u fosse derivabile (con u' almeno in $L^1(I)$), allora sarebbe $(u\varphi)' = u'\varphi + u\varphi'$ da cui $\int_I (u'\varphi + u\varphi')\,dt = [u\varphi]_{\partial I} = 0$, ovvero sarebbe $\int_I u'\varphi\,dt = -\int_I u\varphi'\,dt$ $\forall \varphi \in C^1_c(I)$. Viceversa, se $u \in L^p(I)$ è tale per cui esiste $g \in L^p(I)$ tale che, $\forall \varphi \in C^1_c(I)$, sia $\int_I g\varphi\,dt = -\int_I u\varphi'\,dt$, allora g sarebbe unica (q.o.) e effettivamente sarebbe $g = u'$ se u fosse derivabile con $u' \in L^p(I)$: indichiamo comunque $g \doteq u'$ (...! così come $u' = v \Rightarrow v = u + \text{cost}$) e la chiamiamo "la derivata debole" di u.

Gli spazi di Sobolev considerano esattamente le $u \in L^p(I)$ aventi derivate deboli:

$$W^{1,p}(I) := \{u \in L^p(I) \mid \exists g \in L^p(I) : \forall \varphi \in C^1_c(I),\ \int_I g\varphi\,dt = -\int_I u\varphi'\,dt\}$$

(riservando il simbolo $H^1(I) \doteq W^{1,2}(I)$). Allora $0 \in W^{1,p}(I)$ (con $0'=0$) e anzi $W^{1,p}(I) < L^p(I)$ (con le solite regole di derivazione $(\lambda u)' = \lambda u'$ e $(u+v)' = u'+v'$).

▶ $(W^{1,p}(I), \|\cdot\|_{1,p})$ è di Banach se $\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|u'\|_p$ $\forall u \in W^{1,p}(I)$ (norma!) (mentre $(H^1(I), \underbrace{\|\cdot\|_{1,2}}_{= \{\|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2\}^{1/2}})$ è di Hilbert).

[$(u_n)_{n\ge1}$ in $W^{1,p}(I)$ è di Cauchy $\iff$ $(u_n)_{n\ge1}$, $(u_n')_{n\ge1}$ di Cauchy su $L^p(I)$ e così ivi convergenti : $\begin{cases} u_n \xrightarrow{L^p(I)} u \\ u_n' \xrightarrow{L^p(I)} v\end{cases}$; allora, in effetti, $u \in W^{1,p}(I)$ con $u' = v$ (per cui $u_n \xrightarrow{W^{1,p}(I)} u$) : infatti $u, v \in L^p(I)$ e, $\forall \varphi \in C^1_c(I)$, è

$$\int_I u_n'\varphi\,dt = -\int_I u_n\varphi'\,dt$$ (e siamo in realtà su un compatto in I)

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_I v\varphi\,dt \qquad -\int_I u\varphi'\,dt$$

. □]

▶ $C^1_c(I) \subseteq W^{1,p}(I)$ (ok); se I è limitato, allora $W^{1,q}(I) < W^{1,p}(I)$ $\forall q \ge p$. (ok)

Se $\psi \in C^1_c(I)$ e se $u \in W^{1,p}(I)$, allora $\psi u \in W^{1,p}(I)$ con $(\psi u)' = \psi' u + \psi u'$.

[Infatti ψu, $\psi' u$ e $\psi u'$ sono tutte in $L^p(I)$, e, $\forall \varphi \in C^1_c(I)$, $\int_I(\psi' u + \psi u')\varphi\,dt = -\int_I (\psi u)\varphi'\,dt$ in quanto $\int_I u' \underbrace{\psi\varphi}_{\in C^1_c(I)}\,dt = -\int_I u(\psi\varphi)'\,dt = -\int_I u(\psi'\varphi + \psi\varphi')\,dt$. □]

▶ Se $u \in W^{1,p}(I)$, allora (se $p' = \frac{p}{p-1}$ coniugato a p)

(1) $u \in L^p(I)$ e $\exists C>0$ tale che, $\forall \varphi \in C^1_0(I)$, $\int_I u\varphi'\,dt \le C|\varphi|_{p'}$;

(2) $u \in L^p(I)$ e, se $I \doteq (a,b)$, $|h| \neq 0$ ma $\ll 1$ e se $I_h \doteq (a+|h|, b-|h|)$ $(\subseteq I)$

allora $\exists C'>0$ tale che $|\tau_h u - u|_{L^p(I_h)} \le C'|h|$ $\quad ((\tau_h(u))(x) \doteq u(x+h))$;

(3) $\exists \tilde{u} \in C^0(I)$ tale che $\tilde{u} = u$ q.o. e, $\forall x \le y$ in I,

$$\tilde{u}(y) - \tilde{u}(x) = \int_x^y u'(t)\,dt \quad (\to = u(y) - u(x) \text{ se ha senso considerare } u \text{ puntualmente})$$

e più precisamente $\tilde{u}$ è sempre assolutamente continua (in [illegible]), e per $p>1$ è $\frac{1}{p'} = \frac{p-1}{p}$ – hölderiana (per $p=\infty$ è lipschitziana).

[(1) $\int_I u\varphi'\,dt = -\int_I u'\varphi\,dt \overset{\text{(Hölder)}}{\le} |u'|_p\,|\varphi|_{p'}$. ✓

(2) $\boxed{p=\infty}$ $(p'=1)$: $\forall x \in I_h$, $|u(x+h) - u(x)| \overset{(3)}{=} \left|\int_x^{x+h} u'(t)\,dt\right| =$ $\quad (t \doteq x+sh \leadsto dt = h\,ds,\ (x,x+h) \leadsto (0,1))$

$= |h| \left|\int_0^1 u'(x+sh)\,ds\right| \le |h|\,\|u'\|_\infty$. ✓

$\boxed{p<\infty}$ $(p'>1)$: $\int_{I_h} |u(x+h)-u(x)|^p\,dx \overset{(3)}{=} \int_{I_h} \left|\int_x^{x+h} u'(t)\,dt\right|^p dx =$

$= |h|^p \int_{I_h} \left|\int_0^1 u'(x+sh)\,ds\right|^p dx \overset{\text{(Jensen)}}{\le} |h|^p \int_{I_h} \left(\int_0^1 |u'(x+sh)|^p\,ds\right) dx \overset{\text{(Fubini...!)}}{=}$

$= |h|^p \int_0^1 \Big(\underbrace{\int_{I_h} |u'(x+sh)|^p\,dx}_{\le |u'|_p^p} \Big) ds \le (|h| \cdot |u'|_p)^p$. ✓

(3) Se ad esempio $I = (a,b)$, allora sia $\hat{u}(x) \doteq \int_a^x u'(t)\,dt$ $\forall x \in I$: non solo $\hat{u} \in C^0(I)$, ma vale che $\forall x \le y$ in I $|\hat{u}(y) - \hat{u}(x)| \le \int_x^y \underbrace{|u'(t)|}_{\in L^p}\,dt \overset{(H.)}{\le} |u'|_p (y-x)^{1/p'}$,

da cui se $p=1$ $(p'=\infty)$ allora $\hat{u}$ è assolutamente continua, mentre per $p>1$ $(p'<\infty)$ è $\frac{1}{p'}$ – hölderiana.

Ora basta provare che $\hat{u}' = u'$ (per cui $u \overset{\text{q.o.}}{=} \hat{u} + \text{costante} =: \tilde{u}$) $(\to \hat{u} \in W^{1,1}(I))$: ma infatti

$\forall \varphi \in C^1_0(I)$, $\int_I \hat{u}\varphi'\,dx = \int_I \left[\int_a^x u'(t)\,dt\right] \varphi'(x)\,dx \overset{\text{(Fubini)}}{=} \int_I \Big[\underbrace{\int_t^b \varphi'(x)\,dx}_{-\varphi(t)}\Big] u'(t)\,dt =$

$= -\int_I u'\varphi\,dt$. □]

Viceversa, una $u \in L^p(I)$ è $u \in W^{1,p}(I)$ se $\boxed{p>1}$ $(p'<\infty)$ e se

(1) $\exists\, C>0$ tale che, $\forall \varphi \in C^1_c(I)$, $\int_I u\varphi'\,dt \le C|\varphi|_{p'}$;

(2) $\exists\, C'>0$ tale che $|\tau_h u - u|_{L^p(I_h)} \le C'|h|$;
(per $u \in L^\infty(I)$ lipschitziana (q.o.) $\not\Rightarrow u \in W^{1,\infty}(I)$)

(3) $\exists\, (u_n)_{n\ge1}$ in $W^{1,p}(I)$ tale che $u_n \xrightarrow{L^p} u$ e $(u_n)_{n\ge1}$ limitata in $W^{1,p}(I)$.

[(1) $T : C^1_c(I) \subset L^{p'}(I) \to \mathbb{R}$, $T(\varphi) := \int_I u\varphi'\,dt$, è ben definito e lineare $(u\in L^p(I))$, nonché continuo per ipotesi, ossia $T \in (C^1_c(I))'$ in $(L^{p'}(I))' \overset{(p'\neq\infty)}{=} L^p(I)$: per H.B., e per densità di $C^1_c(I)$ in $L^{p'}(I)$ essendo $p'<\infty$, $\exists!$ estensione di T a tutto $L^{p'}(I)$ (che mantiene la norma); ovvero, senza cambiare notazione per T, $\exists!\, v \in L^p(I)$ tale che, $\forall \varphi \in L^{p'}(I)$, è $T(\varphi) = \int_I v\varphi\,dt$. In particolare, $\forall \varphi \in C^1_c(I)$, $\int_I u\varphi'\,dt = T(\varphi) = \int_I v\varphi$: allora $u' = -v$.

(2) $$\underbrace{\int_{I_h} \big(u(x+h)-u(x)\big)\varphi(x)\,dx}_{\|} \overset{(H.)}{\le} |\tau_h u - u|_{L^p(I_h)} |\varphi|_{L^{p'}(I_h)} \le C'|h|\,|\varphi|_{p'}$$

$$= \int_{I_h} u(x+h)\varphi(x)\,dx - \int_{I_h} u(x)\varphi(x)\,dx = \int_{I_h} [\varphi(x-h)-\varphi(x)]u(x)\,dx,$$ da cui $(\forall \varphi \in C^1_c(I))$

$\left(= \int_{I_h} u(x)\varphi(x-h)\,dx\right)$

$$\underbrace{\int_{I_h} \frac{\varphi(x-h)-\varphi(x)}{|h|}u(x)\,dx}_{\xrightarrow[h\to 0]{} \int_I u\varphi'\,dx \text{ (Lebesgue)}} \le C'|\varphi|_{p'}$$ e concludiamo per il punto (1).

(3) $(u_n')_{n\ge1}$ sono in $L^p(I)$ ed ivi limitata, e $p'<\infty \Rightarrow L^p(I) = (L^{p'}(I))'$ è di Banach riflesso se e solo se $p'>1$, ma comunque è duale di un separabile e per ciò ha le palle debole* sequenzialmente compatte : $\exists\, u'_{n_k} \xrightarrow[*]{L^p(I)} v$, per cui, $\forall \varphi \in C^1_c(I) \subset L^{p'}(I)$,

$$\int_I u'_{n_k}\varphi\,dt \to \int_I v\varphi\,dt \Rightarrow u' = v. \quad \square$$

$$\| \qquad -\int_I u_{n_k}\varphi'\,dt \to -\int_I u\varphi'\,dt$$

$\boxed{Ex}$ Siano $I \doteq (a,b)$, α,β reali con $\alpha \neq 0$, e $I_{\alpha,\beta} \doteq \left(\frac{a-\beta}{\alpha}, \frac{b-\beta}{\alpha}\right)$: $u \in W^{1,p}(I)$ se e solo se $u(\alpha x+\beta) \in W^{1,p}(I_{\alpha,\beta})$ con $(u(\alpha x+\beta))' = \alpha u'(\alpha x+\beta)$.

[Sostituendo $\int_{I_{\alpha,\beta}} |u(\alpha x+\beta)|^p dx = \frac{1}{\alpha}\int_I |u(x)|^p dx$ per $p<\infty$ mostra che $u \in L^p(I)$ (u') $\Rightarrow u(\alpha x+\beta) \in L^p(I_{\alpha,\beta})$ $(u'(\alpha x+\beta)\alpha)$ (mentre il caso $p=\infty$ è ovvio); infine, $\forall \varphi \in C^1_c(I_{\alpha,\beta})$,

$$\int_{I_{\alpha,\beta}} \alpha u'(\alpha x+\beta)\varphi(x)\,dx = \int_I u'(x)\underbrace{\varphi\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)}_{(\in C^1_c((a,b))!)}dx = -\int_I u(x)\frac{1}{\alpha}\varphi'\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)dx = -\int_{I_{\alpha,\beta}} u(\alpha x+\beta)\varphi'(x)\,dx \Big]$$
□

Teorema (di estensione)*: esiste un operatore di estensione lineare e continuo

$T : W^{1,p}(I) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$ tale che, $\forall u \in W^{1,p}(I)$, $(Tu)\big|_I = u$.

[Per capire l'idea, immaginiamo $I \doteq (a,\infty)$ e poniamo, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in W^{1,p}(I)$ ($\subseteq W^{1,p}(\bar{I})$!),

$$(Tu)(x) \doteq \begin{cases} u(x) & \text{se } x>a \\ u(2a-x) & \text{se } x \le a \end{cases} \quad (\text{q.o.})$$
(riflessione pari di u rispetto a $x=a$) : allora

T è ben definito e a valori in $L^p(\mathbb{R})$ (chiaramente $|Tu|_p = 2|u|_p$), oltre ad esser palesemente lineare, ed è anzi in $W^{1,p}(\mathbb{R})$ avendo

$$(Tu)'(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{se } x>a \\ -u'(2a-x) & \text{se } x \le a \end{cases}$$
($\Rightarrow |Tu|_{1,p} = 2|u|_{1,p}$ per cui T è continuo!) : infatti,

$\forall \varphi \in C^1_c(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} (Tu)\varphi'\,dx = \int_a^\infty \underbrace{u(x)}_{W^{1,p}((a,\infty))}\varphi'(x)\,dx + \int_{-\infty}^a \underbrace{u(2a-x)}_{W^{1,p}((-\infty,a))}\varphi'(x)\,dx$ ($\le$ cost $|\varphi|_{L^{p'}(a,\infty)}$ ... $\le$ cost $|\varphi|_{L^{p'}(-\infty,a)}$ ... $\le C|\varphi|_{L^{p'}(\mathbb{R})}$ implicherebbe che $Tu \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ per $p>1$) $=$

$$= -\int_a^\infty u'(x)\varphi(x)\,dx + \int_{-\infty}^a -u'(2a-x)\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} (Tu)'\varphi\,dx.$$
✓ Più in generale,

sia $I \doteq (a,b) \doteq (0,1)$: per riflettere sia a sinistra di 0 che a destra di $b=1$, prendiamo $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $([0,1])$ tale che, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \le \frac{1}{4} \\ 0 & \text{per } x \ge \frac{3}{4} \end{cases}$ e $\eta \in C^1(\mathbb{R})$

(η è 1 vicino a 0, mentre è 0 vicino a 1 e $1-\eta$ il contrario)

e poniamo $\forall u \in W^{1,p}(I)$ e $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(Tu)(x) \doteq \begin{cases} u(x) & \text{se } 0<x<1 \\ u(-x)\eta(-x) & \text{se } x \le 0 \quad (\text{q.o.}) \\ u(2-x)(1-\eta)(2-x) & \text{se } x \ge 1 \quad (\text{q.o.}) \end{cases}$$
(qui è comodo $\eta \in C^1_c$!)

allora T è lineare in $L^p(\mathbb{R})$ ed è immediato rendersi conto che ($|Tu|_p \le 3|u|_p$)

$$(Tu)'(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{se } 0<x<1 \\ -[u'(x)\underbrace{\eta(-x)}_{\le 1} + u(-x)\underbrace{\eta'(-x)}_{\le C}] & \text{se } x\le 0 \\ -u'(2-x)\underbrace{(1-\eta)(2-x)}_{\le 1} + u(2-x)\underbrace{\eta'(2-x)}_{\le C} & \text{se } x \ge 1\end{cases}$$, da cui chiaramente

$\|Tu\|_{1,p\,(\mathbb{R})} \le \mathrm{Cost}(I)\cdot \|u\|_{1,p\,(I)}$. □]

<u>Teorema (di densità)</u>*: se $p<\infty$, allora in $C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\forall u\in W^{1,p}(I)$, esiste $(u_n)_{n\ge1}$ tale che $u_n|_I \xrightarrow{W^{1,p}(I)} u$ $\quad (\Rightarrow u_n|_I \xrightarrow{L^\infty(I)} u)$

[Possiamo anzitutto supporre che $I=\mathbb{R}$, in questo allora considereremo T di estensione avendo $(u_n)_{n\ge1}$ in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che $u_n \xrightarrow{W^{1,p}(\mathbb{R})} Tu$, da cui ovviamente $u_n|_I \xrightarrow{W^{1,p}(I)} (Tu)|_I = u$; ✓ ma allora basta regolarizzare per convoluzione : più precisamente, $\forall u\in L^p(I)$ con $u'\in L^p(I)$, se $(\rho_n)_{n\ge1}$ successione di convoluzione allora $u_n := u*\rho_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ e sono tale che $u_n \xrightarrow{L^p(\mathbb{R})} u$, e analogamente sarebbe $u_n' \xrightarrow{L^p(\mathbb{R})} u'$ se valesse $u_n' = u'*\rho_n$ (ossia $\underset{\text{(def.)}}{u'*\rho_n} = \underset{\text{(class.)}}{u*\rho_n'}$). Ciò infatti è vero, perché $\forall \varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\int_\mathbb{R} (u'*\rho_n)\varphi\,dx = \int_\mathbb{R} u'(\check\rho_n*\varphi)\,dx =$

$= -\int_\mathbb{R} u(\check\rho_n*\varphi')\,dx = -\int_\mathbb{R}(u*\rho_n)\varphi'\,dx$. □] (non è detto che u' sia continua!)

<u>Teorema (di immersione)</u>*: l'immersione $W^{1,p}(I)\hookrightarrow L^\infty(I)$ è continua, e se I è limitato e $\boxed{p>1}$ $(p'<\infty)$ allora è pure compatta.

[Supponiamo sia $p<\infty$ $\quad (|\cdot|_\infty \le |\cdot|_{1,\infty})$, e inoltre sia $I=\mathbb{R}$: infatti allora $|u|_\infty = \|Tu|_I\|_\infty \le \|Tu\|_\infty \le C\|Tu\|_{1,p\,(\mathbb{R})} \le C\|T\|\,|u|_{1,p\,(I)}$. ✓ Inoltre posso supporre $u\in C_c^1(\mathbb{R})$: infatti allora, per u qualsiasi, $|u|_\infty \le |u-u_n|_\infty + |u_n|_\infty \le$ (se $u_n\in C_c^1 \xrightarrow{W^{1,p}} u$)

$\le |u-u_n|_\infty + C|u_n|_{1,p} \to C|u|_{1,p}$. ✓ Adesso, se effettivamente $u\in W^{1,p}(\mathbb{R})$, allora

da $\frac{\partial}{\partial x}|u(x)|^p = p\,u(x)|u(x)|^{p-2}u'(x)$ ho $|u(x)|^p \underset{\text{(T.F.C.)}}{=} \int_{-\infty}^x p\,\underbrace{u|u|^{p-2}}_{\in L^{p'}}\underbrace{u'}_{\in L^p}\,dt \overset{H}{\le} p|u'|_p|u|_p^{p-1}$,

cioè $|u(x)| \le \underbrace{p^{1/p}}_{\text{limitato}\,\le C(\le 2)}|u'|_p^{1/p}|u|_p^{1/p'} \overset{\text{(Young)}}{\le} C\left(\frac{|u'|_p}{p} + \frac{|u|_p}{p'}\right) \le C|u|_{1,p}$. ✓

Infine, se I è limitato e $p>1$, e se $(u_n)_{n\ge1}$ è in $W^{1,p}(I)$ con $(u_n)_{n\ge1}$ ivi limitata da una C, allora $\forall n\ge1$ $|u_n|_\infty \le 2|u_n|_{1,p} \le 2C$, per cui sono equilimitate in $L^\infty(I)$; inoltre q.o. $|u_n(y)-u_n(x)| \le \int_x^y |u_n'(t)|dt \le$ $(p<\infty)$

$\le |u_n'|_p\,|y-x|^{1/p'} \le \mu(I)^{1/p'}\,|u_n|_{1,p} \le \mu(I)^{1/p'}\cdot C$, per cui sono anche $(<\infty!)$

equicontinue in $L^\infty(I)$ e allora ammettono una sottosuccessione ivi convergente (per A.-A.). □]

(Corollario) ▶ Se $(u_n)_{n\ge1}$ è limitata in $W^{1,p}(I)$ con I limitato e $p>1$, allora $\exists$ (L^∞ è completo)

$$u_{n_k} \xrightarrow[k]{L^\infty} u \;!$$

(Mentre, per $p<\infty$ (ma I anche non limitato), il fatto che L^p sia (di Banach) riflessivo implica solo $\exists\, u_{n_k}' \xrightarrow[k]{L^p} u'$.)

(*) ▶ Se $q\ge p$ $(p<\infty)$, allora $W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^q(I)$ e con continuità.

[$\forall u\in W^{1,p}(I)$, $|u|_q = \left\{\int_I |u|^q dt\right\}^{1/q} = \left\{\int_I |u|^{q-p}|u|^p dt\right\}^{1/q} \le |u|_\infty^{1-\frac{p}{q}}\,|u|_p^{\frac{p}{q}} \le$

$\le \text{cost}\cdot|u|_{1,p}$. □] (Se I è limitato, allora $L^\infty(I)\subset L^q(I)$ e l'immersione è compatta!)

(**) ▶ Se $u\in W^{1,p}((0,\infty))$ $(=:I)$ e $p<\infty$, allora $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$.

[Dato che $p<\infty$, $\exists\, (u_n)_{n\ge1}$ in $C_c^1(\mathbb{R})$ tale che $u_n|_I \xrightarrow{W^{1,p}(I)} u$; d'altra parte allora $u_n|_I \xrightarrow{L^\infty(I)} u$, e $\lim_{x\to\infty} u_n(x)=0$ permette di concludere osservando che

$\lim_{x\to\infty} u(x) = \lim_{x\to\infty}[(u(x)-u_n(x))+u_n(x)]$. □]

▶ (a) Se $u,w\in W^{1,p}(I)$, allora pure $u\cdot w\in W^{1,p}(I)$ con $(uw)'=u'w+uw'$.

(b) Se $u\in W^{1,p}(I)$ e se $g\in C^1(\mathbb{R})$, allora nei casi I limitato o $g(0)=0$ è $g(u)\in W^{1,p}(I)$ con $g(u)'=g'(u)u'$.

[(a) Anzitutto $uw\in L^p(I)$ ad esempio perché $u\in L^p(I)$ e $w\in L^\infty(I)$; analogamente $u'w$ e uw' sono in $L^p(I)$ e quindi non resta che provare l'uguaglianza della derivata debole $\forall \varphi\in C_c^1(I)$, per cui inoltre possiamo supporre $p<\infty$: allora $\exists\,(u_n)_{n\ge1}$ in $C_c^1(\mathbb{R})$ tale che "$u_n = u_n|_I$" $\xrightarrow{W^{1,p}(I)\cap L^\infty(I)} u$, e per queste sappiamo già che $u_n w\in W^{1,p}(I)$ con $(u_n w)' = u_n' w + u_n w'$. Adesso le convergenze

$$\begin{cases} u_n\varphi \xrightarrow{L^1(I)} u\varphi & (u_n \xrightarrow{L^\infty(I)} u \text{ e } \varphi\in L^\infty(I)) \\ u_n'\varphi \xrightarrow{L^1(I)} u'\varphi & (\text{modo analogo!}) \\ u_n\varphi' \xrightarrow{L^1(I)} u\varphi' & (u_n \xrightarrow{L^\infty(I)} u \text{ e } \varphi'\in L^1(I)) \end{cases}$$

implicano che, $\forall\psi\in C_c^1(I)$, $\int_I (u_n'\varphi+u_n\varphi')\psi\, dt = -\int_I u_n\varphi\psi'\, dt$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_I (u'\varphi+u\varphi')\psi\, dt \qquad -\int_I u\varphi\psi'\, dt$$

[b] $u\in L^\infty(I)$, $g'\in C^0$ e $u'\in L^1(I)$ $\Rightarrow$ $g'(u)u'\in L^1(I)$; $g\in C^0 \Rightarrow g(u)\in L^1(I)$ se I è limitato, altrimenti $g(0)=0 \Rightarrow \forall x$ (in un limitato), $|g(x)|\le C|x|$, e in particolare $|g(u)|\le C|u|$ "in" $[-|u|_\infty, |u|_\infty]$: basta provare la formula, e ciò per $p<\infty$. Se quindi $(u_n)_{n\ge1}$ sono in $C_c^1(\mathbb{R})$ tali che $u_n \xrightarrow{W^{1,1}(I)\cap L^\infty(I)} u$, allora ovviamente $(g(u_n))' = g'(u_n)u_n'$ $\forall n\ge1$, e inoltre le convergenze

$$\begin{cases} g(u_n) \xrightarrow{L^1(I)} g(u) & (g \text{ unif. cont. sui compatti e } u_n \xrightarrow{L^\infty(I)} u) \\ g'(u_n) \xrightarrow{L^\infty(I)} g'(u) & (\text{modo analogo}) \\ u_n' \xrightarrow{L^1(I)} u' \end{cases}$$

implicano che, $\forall\varphi\in C_c^1(I)$,

$$\int_I g'(u_n)u_n'\varphi\, dt = -\int_I g(u_n)\varphi'\, dt$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_I g'(u)u'\varphi\, dt \qquad -\int_I g(u)\varphi'\, dt \quad .\ ]$$

Consideriamo ora $W_0^{1,p}(I) \doteq \overline{C_c^1(I)}^{W^{1,p}(I)} \subseteq \{u\in W^{1,p}(I) \mid u|_{\partial I}=0\} < W^{1,p}(I)$ avente solo lo zero come costante. In realtà è vero che

▶ $W_0^{1,p}(I) = \{u\in W^{1,p}(I) \mid u|_{\partial I}=0\}$.

[Se infatti $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è tale che $g(x)=\begin{cases} x & \text{per } x\ge 2 \\ 0 & \text{per } x\le 1\end{cases}$ con raccordo C^1, allora g è $C^1(\mathbb{R})$ con $g(0)=0$ tale che sia nulla vicino a zero e sia l'identità verso $\pm\infty$: segue quindi che, $\forall n\ge1$, $u_n \doteq \frac{g(nu)}{n} \in W^{1,p}(I)$ $\forall u\in W^{1,p}(I)$, e $u_n' = g'(nu)u'$, e chiaramente u_n è definitivamente u mentre u_n' è definitivamente u' quando $u\neq0$, mentre quando $u=0$ anche $u_n=u_n'=0$ $\forall n\ge1$, dunque certamente

$u_n \xrightarrow{W^{1,1}(I)} u$. Se ora $u|_{\partial I}=0$, allora le u_n non è supposto compatto in I e basta considerare $\tilde{u}_n := u_n + f_n$. $\square$

(DIS. DI POINCARÉ) $\longrightarrow$ Se I è limitato, allora $\exists\, C>0$ tale che, $\forall u \in W_0^{1,p}(I)$, sia

$|u|_p \leq C\,|u'|_p$ (su $W_0^{1,p}(I)$, $|u|_{1,p} \sim |u'|_p$!).

[Se $I = (a,b)$ e se $u \in W_0^{1,p}(I)$, allora $u(a)=0 \Rightarrow \forall x \in (a,b)$, $|u(x)| \leq$ ($\forall u$)

$\leq \int_a^x |u'(t)|\,dt \leq |u'|_1$, da cui $|u|_\infty \leq |u'|_1$ ($\leq |u'|_\infty \cdot (b-a)$) ($u|_{\partial I}=0$!!)

per cui posso supporre $p<\infty$) : segue che $|u|_p^p = \left|\int_a^b |u(x)|^p dx\right| \leq |u|_\infty^p (b-a) \leq$

$\leq |u'|_1^p (b-a)$, dunque posso anche supporre $p>1$ ($p'<\infty$) ; allora analogamente

$|u'|_1 \overset{H.}{\leq} |u'|_p (b-a)^{1/p'}$, cioè $|u'|_1^p \leq |u'|_p^p (b-a)^{p-1}$, da cui

$|u|_p^p \leq |u'|_p^p (b-a)^p$, cioè $|u|_p \leq (b-a)\,|u'|_p$. $\square$]

$\blacktriangleright$ Nel caso $p<\infty$ ($p'>1$), se $\Lambda \in (W^{1,p}(I))'$ allora $\exists\, \Lambda_0, \Lambda_1 \in L^{p'}(I)$ tale che,

$\forall u \in W^{1,p}(I)$, sia $\Lambda(u) = \int_I (\Lambda_0 u + \Lambda_1 u')\,dt$ e $\|\Lambda\| = |\Lambda_0|_{p'} \vee |\Lambda_1|_{p'}$.

Se invece $\Lambda \in (W_0^{1,p}(I))' =: W^{-1,p'}(I)$ (se I è limitato), allora $\exists\, \Lambda_1 \in L^{p'}(I)$ tale che,

$\forall u \in W_0^{1,p}(I)$, $\Lambda(u) = \int_I \Lambda_1 u'\,dt$ e $\|\Lambda\| = |\Lambda_1|_{p'}$. (è comune!)

[$W^{1,p}(I) \cong \{(u,v) \in L^p(I) \times L^p(I) \mid u \in W^{1,p}(I)$ e $v = u'\} < L^p(I) \times L^p(I)$ con la norma ($u \mapsto (u,u')$)
della somma, per cui $\Lambda \in (W^{1,p}(I))'$ ammette un'estensione $\mathcal{T} \in (L^p(I) \times L^p(I))' =$
$\overset{p<\infty}{=} L^{p'}(I) \times L^{p'}(I)$ (norma del sup) tale che $|\mathcal{T}|_{L^{p'} \times L^{p'}} = \|\Lambda\|$; $\mathcal{T}$ è precisamente
della forma $\mathcal{T} = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ con $\Lambda_0, \Lambda_1 \in L^{p'}(I)$, per cui in effetti $\forall u \in W^{1,p}(I)$
$\Lambda(u) \cong \Lambda(u,u') = \mathcal{T}(u,u') = \Lambda_0(u) + \Lambda_1(u')$. ✓ (Il caso di $W_0^{1,p}(I)$ è
analogo in quanto fatto comune del fatto che $W_0^{1,p}(I) \cong \{v \in L^p(I) \mid v = u'$ per una certa $u \in W_0^{1,p}(I)\}$ ($u \mapsto u'$) $\square$]

(COR.) $p<\infty$ $\rightsquigarrow$ $u_n \xrightarrow{W^{1,p}(I)} u \iff \begin{cases} u_n \xrightarrow{L^p(I)} u \\ u_n' \xrightarrow{L^p(I)} u' \end{cases}$.