$$\left.\begin{array}{l}|a_n - a| \\ |b_n - b|\end{array}\right\} \le |c_n - c| \le |a_n - a| + |b_n - b|$$

$\Leftarrow$ Conv. conf. per conf.

$\Rightarrow$ Conf.

ANALISI COMPLESSA

$\boxed{\sum c_n}$ $\quad |c_n + \dots + c_{n+m}| \le |c_n| + \dots + |c_{n+m}| \le M_n + \dots + M_{n+m}$

$(|c_n| \le)$

$(|c_k| \le M_k, \ \sum_{k \ge 0} M_k \text{ conv})$

Conf. $\Rightarrow$ ass. conv. $\Rightarrow$ Conv. $\nLeftarrow$ $(c_n \to 0)$

(CAUCHY!)

$f = g + ih$ in $\mathbb{C}$ $\quad \begin{matrix}(X) & & (\mathbb{C}) & (\text{OMEO}) & (\mathbb{R}^2) \\ x & \mapsto & (g+ih)(x) & \longleftrightarrow & (g,h)(x)\end{matrix}$ $\quad ; \quad \begin{cases} g = \dfrac{f + \bar{f}}{2} \\ h = \dfrac{f - \bar{f}}{2i} \end{cases}$

Confronto

Conv. TOT $\Rightarrow$ Conv. UNIF. $\Rightarrow$ Conv. (punt.) :

$|f_n(x)| \le M_n \quad , \quad \sum_{n \ge 0} M_n$ Conv. !

Conv. punt., tot. unif. , Eq. nelle conf.!

---

f_n cont. $\xrightarrow{\text{UNIF.}}$ f $\Rightarrow$ f cont (ld non gu.h!)

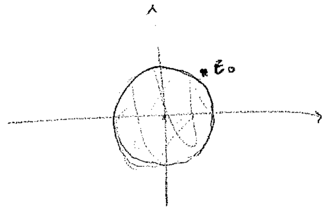
$f_n = g_n + ih_n$, $f = g + ih$

$(f_n$ cont. $, \sum_{n \ge 0} f_n$ conv. unif $\Rightarrow \sum_{n \ge 0} f_n$ cont.!$)$

Colonne in un effetto)

$\sum^!_{i\geq 0\,(\cap\,\mathbb{C})} k_i z^i$ sia convergente in $\Delta \ni 0$; se $\Delta\setminus\{0\}\neq\emptyset$ (*), allora

$\left.\begin{array}{l} z_0\in\Delta\setminus\{0\} \\ r<|z_0| \end{array}\right\} \Rightarrow$ la serie conv. TOT. su $\overline{B_r}$!



$\Big[\ |k_i z^i| = \underbrace{|k_i||z_0^i|}_{\substack{\text{conv}\\ \leq M}} \underbrace{\frac{|z^i|}{|z_0^i|}}_{= \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^i} \overset{(\text{su } \overline{B_r})}{\leq} M \underbrace{\left(\frac{r}{|z_0|}\right)}_{<1!\ (i>0)}{}^{i}\ .\Big]$ Perciò (*) :

(1) se $\rho := \sup_{z_0\in\Delta}|z_0|$, $(*\Leftrightarrow \rho>0)$ allora $B_\rho \subseteq \Delta$, $\subseteq \overline{B_\rho}$, $\overset{(\mathring{\overline{B_\rho}})=B_\rho}{\Rightarrow}$

$B_\rho = \mathring{\Delta} =: D$;

(2) $f(z) := \sum^!_{i\geq 0} k_i z^i$ è continua su D $\Big[$ lo è in ogni $z_1 \in D$: se $|z_1|<r<\rho$, visto che $f(z)$ conv. unif. su $(\overline{B_r})$, è ivi continua . $\Big]$;

(3) $\frac{1}{\rho} = \limsup_n |k_n|^{1/n}$, o $\rho = \lim_n \frac{|k_n|}{|k_{n+1}|}$ se esiste (e $k_i\neq 0$) !

$\Big[\ \sum^!_{i\geq 0} k_i z^i$ e $\sum^!_{i\geq 0} |k_i| x^i$ hanno $\rho = r$:

(—) $z\in\mathbb{C}$ t.c. $|z|<r$ $\Rightarrow$ $\sum^!_{i\geq 0} k_i z^i$ conv. TOT : dunque $r\leq\rho$;

(—) $x\in\mathbb{R}$ con $|x|<\rho$ è comunque un el. di $\mathbb{C}$, per cui so che $\sum^!_{i\geq 0} k_i x^i$ conv. TOT. , ossia che $\sum^!_{i\geq 0} |k_i| x^i$: dunque $\rho\leq r$. $\Big]$

Serie di potenze formali: quella cost. con 1, dom. int. e con inv. $\Leftrightarrow a_0 \neq 0$ (A); occhio alle somme formali delle serie formali rispetto alle somme delle serie! Stesso vale per le serie di potenze 1. "convergenti", con (A) rimuovendo), e similmente derivata/somma/prod. di serie di p. conv. è la serie der./somma/p. !

(almeno dove convergono entrambe le serie)

---

iso. di quelli tra s.d.p.f. conv. e f. olomorfe analitiche:

$$\sum_{i\geq 0} n_i x^i \neq \sum_{i\geq 0} n_i^* x^i \Rightarrow \sum_{i\geq 0} n_i z^i \neq \sum_{i\geq 0} n_i^* z^i$$ in tutto un intorno di 0, meno lo 0 (nel dom. di conv. più piccolo).

[$\left(\sum_{i\geq 0} n_i z^i\right) - \left(\sum_{i\geq 0} n_i^* z^i\right) = \sum_{i\geq 0} (n_i - n_i^*) z^i =: D(z)$ è conv. almeno nel dom. di conv. più piccolo, e c'è ivi certamente almeno un $i\geq 0$ tale che $n_i \neq n_i^*$: consideriamo allora $i_0 = \min\{i\geq 0 \mid n_i \neq n_i^*\}$; quindi $D(z) =$

$$= \sum_{i\geq i_0} (n_i - n_i^*) z^i, = z^{i_0} \underbrace{\left(\sum_{i\geq i_0} (n_i - n_i^*) z^{i-i_0}\right)}_{=: D^*(z)}$$ (nel suddetto dominio),

e $D^*(0) = n_{i_0} - n^*_{i_0} \neq 0 \overset{(cont.)}{\Rightarrow} D^* \neq 0$ in tutto un intorno di 0, per cui $D(z) = z^{i_0} D^*(z)$ è $\neq 0$ in tutto un intorno di 0 meno 0 (e meno che $i_0 = 0$)!]

Le funzioni analitiche (come i polinomi) sono continue, e anzi formano un sottoanello di queste; in più: f, g analitiche, $g \neq 0 \Rightarrow f/g$ analitica!

(OSS.: $g(z_0) \neq 0 \Leftrightarrow$ l'elem. analitico di centro z_0 „associato a g" (in un intorno di z_0) è invertibile (rispetto el. an.)!)

D aperto connesso („dominio") ($\neq \emptyset$) di $\mathbb{C}$, $f: D \to \mathbb{C}$ analitica $\Rightarrow$ o $f \equiv 0$ oppure f non ha punti di D che siano di accumulazione per i suoi zeri (quindi gli zeri di f sono isolati!).

[$N \doteq f^{-1}(0)$, $N' \doteq$ i punti di D che sono di acc. di punti di N $(\subseteq N)$ $\Rightarrow$ N' chiuso di D (compl. aperto!); è anche aperto: $\forall z_0 \in N'$, se $f(z) = \sum_{i \geq 0} k_i (z-z_0)^i$ in un intorno di z_0, allora è chiaro che $f(z) = 0$ in tutto un intorno di z_0 (per „unicità" el. an.!).]

---

1 ▶ $U \subseteq D$ (dominio di $\mathbb{C}$), U con dentro un p. di acc. in D, $f: U \to \mathbb{C}$: esiste allora al più una $F: D \to \mathbb{C}$ analitica tale che $F_{|U} = f$.

---

2 ▶ Le funz. analitiche su un dominio D formano un dom. d'integrità.

[$f, g: D \to \mathbb{C}$ an. non identicam. nulle, ossia N_f, N_g fatti di punti isolati: allora così è per $N_{fg} = N_f \cup N_g$.]

---

f „complessa" definita in tutto un intorno di z_0 :

$$f \text{ DER.} \iff f \text{ DIFF.} \quad \left(\Rightarrow f \text{ CONT.} \right).$$

$\left(\exists \lim_{\substack{z\to z_0 \\ (z\neq z_0)}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =: f'(z_0) \right)$

$\Big(\exists L \in \mathbb{C}$, $\exists\, \alpha(z)$ complessa tale (def. in un int. di z_0) che $\lim_{z\to z_0} \alpha(z) \to 0$; e $f(z)-f(z_0) = L(z-z_0) + \alpha(z)|z-z_0| \Big)$

[$\Leftarrow$: $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - L = \alpha(z)\frac{|z-z_0|}{(z-z_0)}$;

$\Rightarrow$: $\beta(z) := \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0) \xrightarrow[z\to z_0]{} 0$ ed è tale che

$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0) + \beta(z)$, onde $f(z)-f(z_0) = f'(z_0)(z-z_0) +$

$+ \beta(z)(z-z_0)$; basta $\alpha(z) := \beta(z)\frac{(z-z_0)}{|z-z_0|}$.]

Valgono le solite regole di derivazione.

$z = x+iy$, $z_0 = x_0+iy_0$, $f(z) = g(x,y) + i\,h(x,y)$ $\Rightarrow$

(1) $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{g(x,y)-g(x_0,y_0)}{(x-x_0)+i(y-y_0)} + i\,\frac{h(x,y)-h(x_0,y_0)}{(x-x_0)+i(y-y_0)}$;

(2) $f(z)-f(z_0) = L(z-z_0) + \alpha(z)|z-z_0| \iff$ $\{(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)\}$

$$\begin{cases} g(x,y)-g(x_0,y_0) = \mathrm{Re}(L)(x-x_0) - \mathrm{Im}(L)(y-y_0) + \mathrm{Re}(\alpha(z))\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \\ h(x,y)-h(x_0,y_0) = \mathrm{Re}(L)(y-y_0) + \mathrm{Im}(L)(x-x_0) + \mathrm{Im}(\alpha(z))\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \end{cases} ;$$

allora f deriv. in z_0 $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $f'(z_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)$ $\left(\to z_0 \leftarrow \right)$

e meglio: f, h hanno der. parz. in (x_0, y_0) che stanno nelle relazioni

("di Cauchy–Riemann") $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases}$, allora

precisamente $(2) \Rightarrow f, h$ DIFF. in (x_0,y_0) ! In realtà vale anche il

viceversa: f, h DIFF. in (x_0,y_0) con der. parz. che soddisfano C.–R. $\Rightarrow f$

deriv. in z_0. $\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial h}{\partial x}\right)(x-x_0) + \underbrace{\left(-\frac{\partial h}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial x}\right)}_{= i\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial h}{\partial x}\right)!}(y-y_0) \ldots \right]$

---

f olomorfa su un dominio D con $f' = 0 \Rightarrow f$ costante su D.

$\left[\underset{(C.-R.)}{\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ e } \frac{\partial h}{\partial x} = 0} \text{, ma anche } \frac{\partial h}{\partial y} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y} \text{, e } D \text{ è connesso.} \right]$

Le funzioni analitiche sono olomorfe sul (loro dominio (aperto) di def.).

[Non solo basta (eq.) dim. che lo sono per elem. analitici: basta che tali siano analitici in 0 ! Precisamente la tesi è che per ogni

$f(z) = \sum_{n\geq 0} k_n z^n$ con $\rho > 0$, e per ogni z_0 con $|z_0| < \rho$, esiste

$f'(z_0) = \sum_{n\geq 1} n k_n z_0^{n-1}$. Dove $f'(z) \doteq \sum_{n\geq 1} n k_n z^{n-1}$ ha $\rho' = \rho$.

$\boxed{\text{I}}$ Non può essere $\rho < \rho'$: altrimenti $\rho < r < \rho' \Rightarrow \sum_{n\geq 1} n|k_n| r^{n-1} < +\infty$,

ma definitivamente $|k_n| r^n \leq n |k_n| r^{n-1}$! Non può neanche essere

$\rho' < \rho$: altrimenti $\rho' < r < r' < \rho \Rightarrow |k_n|(r')^n \leq M$, e allora

$n|k_n| r^{n-1} = n|k_n|(r')^{n-1}\left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{M}{r'}\right) n \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}$! , $\frac{r}{r'} < 1$

$\boxed{II}$ Se $|z_0| < r < \rho$, allora $z = \underbrace{(z - z_0)}_{=: h} + z_0$ con z_0 anche tale che $|h| < r - |z_0|$ implica $|z| < r$: consider $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) =$

$$= \frac{1}{h}\Big[\underbrace{f(z_0 + h) - f(z_0)}_{= \sum_{n \geq 1} k_n \left[\underbrace{(z_0+h)^n - (z_0)^n}_{= h\left[\underbrace{(z_0+h)^{n-1} + (z_0+h)^{n-2} \cdot z_0 + \dots + (z_0)^{n-1}}_{n \text{ termini}}\right]}\right]}\Big] - \underbrace{f'(z_0)}_{= \sum_{n \geq 1} n k_n z_0^{n-1}} =$$

$$= \sum_{n \geq 1} k_n \left((z_0+h)^{n-1} + \dots + (z_0)^{n-1} - n z_0^{n-1}\right) \text{ ; ma } |k_n| \, | \dots | \leq$$

$$\leq |k_n| \left[n \cdot r^{n-1} + n r^{n-1} \right] = 2 |k_n| n r^{n-1} \quad \left(r < \rho \overset{(I)}{=} \rho'\right) \Rightarrow \text{ la serie soddisfa il t. conv.}$$

Dunque da un certo $n_0 \geq 1$ in poi il "resto n_0-esimo" è piccolo a piacere (in modulo): $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| \leq \left| \sum_{n \geq 1}^{n_0} k_n [\dots] \right| + \frac{\varepsilon}{2}$; concludo osservando che, $\forall n$ tra 1 e n_0, il termine n-esimo della serie è un polinomio in h tende in 0 se $h \to 0$: per h abb. piccolo anche la serie (in modulo) è $< \frac{\varepsilon}{2}$.]

$\boxed{\text{OSS}}$: le f. analitiche sono C^∞! (con derivate analitiche)

$\boxed{\text{NOTA}}$: in particolare, se $T \in \mathbb{R}$, $f(T) \doteq g(T) + i h(T)$ derivabile se $f'(T) = g'(T) + i h'(T)$!

Sia $[a,b]$ intervallo (orientato) reale : $\int_a^b f(\tau) d\tau \doteq \int_a^b g(\tau) d\tau + i \int_a^b h(\tau) d\tau$,

se esiste ; valgono le solite "prime proprietà di linearità e orientamento",

più f C^1 a tratti $\Rightarrow$ $\int_a^b f'(\tau) d\tau = [f(\tau)]_{\tau = a}^{\tau = b} \doteq f(b) - f(a)$!

(derivabile con derivata cont. a tratti)

OSS: $f:[a,b]$ comp $\to \mathbb{C}$ T2 cont. è chiusa!

Per f continue (e tratti), grazie alle somme di Cauchy vale che $\left|\int_a^b f(\tau)d\tau\right| \leq \int_a^b |f(\tau)|d\tau$!

Sia $z(\tau):[a,b]\to\mathbb{C}$ un "arco", ossia un cammino C^1 a tratti semplice (iniettivo), ma possibilmente chiuso ($z(a)=z(b)$), con derivata $\neq 0$ (destra, sinistra e intermedie); se lo indichiamo simbolicamente con "γ", allora $|\gamma| := z([a,b])$ è il "sostegno" dell'arco; inoltre $|\gamma|$ è dotato di due orientamenti naturali: $z(\tau)$ tale che $z([a,b])=|\gamma|$, con $a<b$, determina quello "positivo". Ricordiamo allora che un arco γ è "rettificabile", ossia che esiste finita la sua lunghezza $l(\gamma)$ calcolabile con la spezzata (dunque dipendente solo da $|\gamma|$), o anche con $\int_a^b |z'(\tau)|d\tau$!

---

f (complessa) continua (e tratti) definita su $|\gamma|$:

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(z(\tau))\,\underbrace{z'(\tau)}_{\substack{\text{cont. a tratti}\\ \Rightarrow \text{integr.!}}}d\tau \quad , \in \mathbb{C} \text{ e quindi}$$

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_a^b |f(z(\tau))||z'(\tau)|d\tau \leq \left(\max_{|\gamma|}|f|\right)\cdot l(\gamma)$$

; valgono le solite proprietà di linearità, ma anche di orientamento: precisamente tale integrale NON dipende dalla parametrizzazione positiva di $|\gamma|$, mentre cambia segno considerando una par. negativa! [grazie alle somme di Cauchy: approssimo $z'(s_i)(c_{i+1}-c_i)$ con Lagrange (in x e y), quindi con $z(c_{i+1})-z(c_i)$.] ($\Leftarrow$ entrambe $\int_a^b f(\tau)d\tau$!)

$\boxed{\text{OSS.}}$: $z=x+iy$ ($z(\tau)=x(\tau)+iy(\tau)$) e $f(z)=g(x,y)+ih(x,y)$ $\Rightarrow \int_\gamma f(z)dz =$

$$=\int_a^b f(z(\tau))z'(\tau)d\tau = \int_a^b \left\{\left[g(x(\tau),y(\tau))x'(\tau)-h(x(\tau),y(\tau))y'(\tau)\right]+i\left[g(x(\tau),y(\tau))y'(\tau)+h(x(\tau),y(\tau))x'(\tau)\right]\right\}d\tau$$

$$=: \int_\gamma [g(x,y)dx - h(x,y)dy] + i\int_\gamma [h(x,y)dx + g(x,y)dy] \;!$$

(da cui potremo dedurre l'ultimo fatto!)

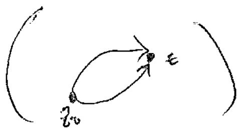
f_n continue su $|\gamma|$ $\xrightarrow{\text{UNIF.}}$ f (cont.!) $\Rightarrow$ $\int_\gamma f_n(z)dz \to \int_\gamma f(z)dz$!

$$\left[\ \left|\int_\gamma (f(z)-f_n(z))dz\right| \le \int_\gamma |f(z)-f_n(z)|dz \le \underbrace{\left(\max_{|\gamma|} |f-f_n|\right)}_{\to 0\,!} \cdot l(\gamma)\ \right]$$

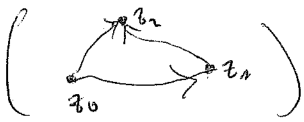
$\boxed{D \text{ dominio}}$ di $\mathbb{C}$, $f: D \to \mathbb{C}$ continua; f ha "primitiva" F se, $\forall z_1, z_2 \in D$ e $\forall \gamma \doteq \gamma(z_1,z_2) \in \Omega(D, z_1, z_2)$ arco, è

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

("$f(z)dz$ esatta"); allora $f(z)dz$ risulta "chiusa", cioè $\int_\gamma f(z)dz = 0$ $\forall \gamma$ chiuso: vale anche il viceversa! [Infatti così è ben def. $F(z) \doteq \int_{\gamma(z_0,z)} f(z)dz$ ($\forall z_0 \in D$ scelto)



, ed è anche primitiva



!] Poi:

(a) tutte e sole le primitive di f sono F + costante;

(1) F olomorfa su D (compl.) con $f \doteq F'$ continua (su D) $\Rightarrow$ f ha primitiva F.

$$\left[\ \int_{\gamma(z_1,z_2)} f(z)dz \doteq \int_a^b f(z(\tau))\, z'(\tau)\,d\tau = \int_a^b F'_{(z)}(z(\tau))\, z'(\tau)\,d\tau = \int_a^b \left(F(z(\tau))\right)'_{(\tau)} d\tau =\right.$$

$$\left. = \left[F(z(\tau))\right]_{\tau=a}^{\tau=b} = F(z_2) - F(z_1)\ \right] \Rightarrow \int_{\gamma(z_1,z_2)} dz = z_2 - z_1 \,!$$

($F(z) = z$ è olom. con $F'(z) \equiv 1$)

(2) f ha primitiva F $\Rightarrow$ F olomorfa e $f = F'$!

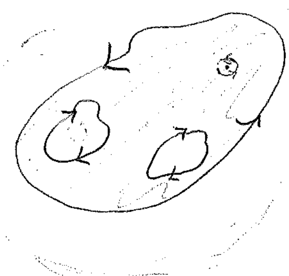
$\left[\ \dfrac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - f(z_0) \xrightarrow[z \to z_0]{} 0\right.$: sia infatti $z_0 \in D$ e $z \in D$ abb. vicino a z_0 affinché $\gamma \doteq$ il segmento di estremi z_0, z sia tutto contenuto in D, ossia $z = \underbrace{(z-z_0)}_{=:h} + z_0$ con h "abb. piccolo"; allora $\dfrac{F(z_0+h)-F(z_0)}{h} =$

$= \frac{1}{h}\int_\gamma f(z_0)dz$; dalla fatto $\int_\gamma dz = h \Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{h}\int_\gamma f(z_0)dz$)

per cui voglio $\left|\frac{1}{h}\int_\gamma (f(z)-f(z_0))dz\right| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$: ma infatti

$|\ldots| \le \cancel{\frac{1}{|h|}} \cdot \max_{z\in|\gamma|}|f(z)-f(z_0)| \cdot \underbrace{\cancel{\ell(\gamma)}}_{(=|h|!)} \xrightarrow[z\to z_0]{} 0$.]

$\boxed{D \text{ dominio regolare (con bordo) di } \mathbb{C}}$, U aperto $\supseteq \overline{D}$,



$f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa ; TEO. INTEGRALE DI CAUCHY:

$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$!

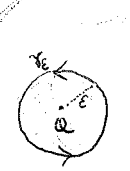
[Supponiamo f' continua (su U) , così (se $f=g+ih$) $g,h \in C^1(U,\mathbb{R})$: ricordando allora che per $p(x,y), q(x,y)$ "come g,h" vale $\int_{\partial D}[p(x,y)dx+q(x,y)dy] \overset{(STOKES)}{=} \iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy$, ho

$Re\left(\int_{\partial D} f(z)dz\right) = \int_{\partial D}[g(x,y)dx - h(x,y)dy] \overset{S.}{=} -\iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\right)}_{=0 \ (C.-R.)}dxdy = 0$

$Im\left(\int_{\partial D} f(z)dz\right) = \int_{\partial D}[h(x,y)dx + g(x,y)dy] \overset{S.}{=} \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial h}{\partial y}\right)}_{=0}dxdy = 0$.]

FORMULA INTEGRALE DI CAUCHY $\Longrightarrow$ $\forall \omega\in D$, $f(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{z-\omega}dz$!

[Chiaramente (TEO.I) $\underbrace{\int_{\partial D}\frac{f(z)}{z-\omega}dz = \int_{\gamma_\varepsilon}\frac{f(z)}{z-\omega}dz}_{(cont.!)}$, dove $\varepsilon>0$ è tale che



$\overline{B_\varepsilon(\omega)} \subseteq D$ e $|\gamma_\varepsilon| = \partial B_\varepsilon(\omega)$ è orientato (positivamente) in senso antiorario ,

parametrizzato ad es. da $z(t) := \varepsilon e^{it}+\omega$ per $t\in[0,2\pi]$ ($z'(t) = i\varepsilon e^{it}$) ; allora

$$\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{f(z)}{z-e}\,dz = \int_{\gamma_\varepsilon}\frac{f(e)}{z-e}\,dz + \int_{\gamma_\varepsilon}\frac{f(z)-f(e)}{z-e}\,dz \quad , \text{ dove}$$

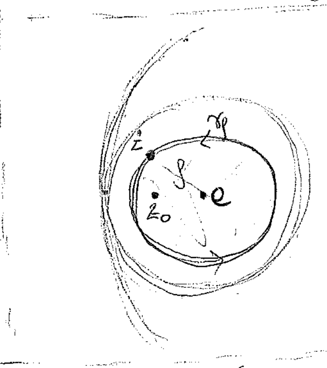
$$\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{1}{z-e}\,dz = \int_0^{2\pi}\frac{1}{z(\tau)-e}\,z'(\tau)\,d\tau = 2\pi i \quad , \text{ quindi } (\Rightarrow) \int_{\gamma_\varepsilon}\frac{f(e)}{z-e}\,dz = (2\pi i)\,f(e) ,$$

mentre $$\left|\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{f(z)-f(e)}{z-e}\,dz\right| \le \max_{z\in|\gamma_\varepsilon|}\left|\frac{f(z)-f(e)}{\underbrace{z-e}_{=\varepsilon}}\right| \cdot \underbrace{l(\gamma_\varepsilon)}_{(2\pi\varepsilon)} =$$

$$= 2\pi \cdot \max_{z\in|\gamma_\varepsilon|}|f(z)-f(e)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{(\text{cont.})} 0$$: tale integrale deve essere 0,

per cui effettivamente $$\int_{\partial D}\frac{f(z)}{z-e}\,dz = (2\pi i)\,f(e) \quad . \Big]$$

D aperto di $\mathbb{C}$ ($\neq\emptyset$), $f: D\to\mathbb{C}$ olomorfa $\Rightarrow$ f analitica, perché più precisamente, $\forall e\in D$, se $d\doteq \mathrm{dist}(e,\partial D)$ (>0!) allora f coincide con un elemento analitico di centro e su tutto $B_d(e)$ ("cioè" ovvio fino al bordo!)!



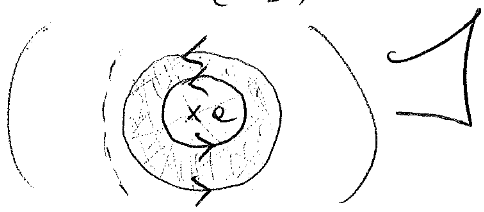
$\Big[$ $\forall z_0\in B_d(e)$, sia $\rho>0$ tale che $|z_0-e|<\rho<d$, e sia $\partial B_\rho(e)$ ($\doteq|\gamma_\rho|$) parametrizzato in modo regolare: allora per Cauchy $$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$; ma per ogni z tale che $|z-e|=\rho$ è $$\frac{1}{z-z_0}=\frac{1}{z-e}\cdot\frac{1}{1-\frac{z_0-e}{z-e}} \overset{\left(\left|\frac{z_0-e}{z-e}\right|<1\right)}{=}$$

$$= \frac{1}{z-e}\underbrace{\sum_{n\ge 0}\left(\frac{z_0-e}{z-e}\right)^n}_{(\text{conv. TOT}, \Rightarrow \text{UNIF, su } |\gamma_\rho|)} \overset{\left(\left|\frac{1}{z-e}\right|=\frac{1}{\rho}\right)}{=} \sum_{n\ge 0}\frac{(z_0-e)^n}{(z-e)^{n+1}}$$, e dato che f (continua) è limitata in modulo nel compatto $|\gamma_\rho|$, è pure $\frac{f(z)}{z-z_0} =$

$$= \sum_{n\ge 0} \left[\frac{(z_0-e)^n}{(z-e)^{n+1}} f(z)\right]$$, da cui effettuo (e sempre per unif. conv.)

$$\boxed{f(z_0) = \sum_{n\ge 0} (z_0-e)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-e)^{n+1}}\,dz}_{=:\, c_n(\rho)}}$$: basta ora osservare che in realtà

$c_n(\rho) = c_n$, ossia che non dipende da ρ $(<d)$; ma infatti $(n\in\mathbb{Z})$

$\frac{f(z)}{(z-e)^n}$ è certamente olomorfa in $D\setminus\{e\}$! 

DUNQUE $f(z) = \sum_{n\ge 0} c_n (z-e)^n \quad \forall z \in B_d(e)$, $\Longrightarrow$

(1) se D era già un disco aperto $(\ne\emptyset)$ di centro e, allora f olomorfa è un elem. analitico con centro in e e raggio di convergenza almeno quello di D ;

(2) in $B_d(e)$ f è C^∞ con, $\forall n\ge 0$, $f^{(n)}(e) = n!\cdot c_n$, ossia

$$f^{(n)}(e) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-e)^{n+1}}\,dz \quad \left(= \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-e)^{n+1}}\,dz \right.$$ SE

D è un dominio regolare !) ,

$\Longrightarrow$ per $f: D\to\mathbb{C}$ olomorfa ($f\in C^\infty(D)$ e anzi) vale lo sviluppo in serie di Taylor, con

centro in $e\in D$ e raggio d, $f(z) = \sum_{n\ge 0} \frac{f^{(n)}(e)}{n!}(z-e)^n$!

($\boxed{\text{NOTA}}$: f olomorfa $\Rightarrow$ f' continua (condizione olomorfa (analitica)) , e anzi ($f=g+ih$) $g, h \in C^\infty$!)

(3) Ogni elem. analitico, essendo olomorfo, è funzione analitica!

(4) $f: \underset{\text{(aperto)}}{D} \to \mathbb{C}$ analitica $\neq 0$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{f} : D \setminus f^{-1}(0) \to \mathbb{C}$ analitica!

[f analitica è certamente olomorfa, dunque $1/f$ così definita è olomorfa.]

(5) Ogni elem. analitico invertibile ha serie (di potenze) inversa un elem. analitico (con convergenza e non nullo!).

[Sia $f(z)$ un elem. analitico con centro in 0 e con $f(0) \neq 0$: allora f è $\neq 0$ in tutto un disco aperto D di centro in 0 ; $1/f$ è dunque ivi definita e analitica (perché olomorfa) : coincide localmente con un elem. analitico con centro in 0 il cui raggio di convergenza è almeno quello di D.] (f,g analitiche, $g \neq 0 \Rightarrow f/g$ analitica!) (in effetti...!)

D aperto di $\mathbb{C}$ $(\neq \emptyset)$: per $f: D \to \mathbb{C}$ (continua) sono equivalenti (1) f analitica, (2) f olomorfa, (3) f ammette localmente una primitiva!

[Devo vedere (2) $\Leftrightarrow$ (3), per cui posso direttamente supporre D dominio.

($\Leftarrow$) MORERA : $f: D$ dominio $\to \mathbb{C}$ ammette primitiva $\Rightarrow$ f olomorfa ; infatti semplicemente F primitiva di f $\Rightarrow$ F olomorfa e $F' = f$.

($\Rightarrow$) Posso supporre anche D semplicemente connesso, cosicché in effetti $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ per ogni arco chiuso γ in D : infatti

$D' =$ la parte interna della regione racchiusa da $|\gamma|$ $\Rightarrow$ è un connesso tale che (Jordan) $\overline{D'} \subseteq D$ e $\partial D' = |\gamma|$, per cui uso il TEO. int. di Cauchy.

Vediamo altre conseguenze di Cauchy: visto che per $f: D$ aperto $\to \mathbb{C}$ olomorfa vale
$$f^{(n)}(c) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}\,dz \qquad \forall c \in D,\ \forall n \geq 0$$
e $\forall r>0$ tale che $\overline{B_r(c)} \subseteq D$ con $\partial B_r(c)$ percorrendo dall'arco γ_r,

vale le DIS. DI CAUCHY $|f^{(n)}(c)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|\gamma_r|} |f|$.

$$\boxed{|f^{(n)}(c)| \leq \frac{n!}{2\pi} \max_{z \in |\gamma_r|} \Bigg| \frac{f(z)}{\underbrace{(z-c)^{n+1}}_{r^{n+1}}} \Bigg| \cdot \underbrace{l(\gamma_r)}_{2\pi r} = \dots \quad \blacksquare} \text{ vale dato}$$

$\boxed{\text{LIOUVILLE}}$: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa limitata (in modulo) è costante.

$\boxed{f}$ non solo è analitica: essendo definita su tutto $\mathbb{C}$, coincide con la propria serie di Taylor in un centro arbitrario (e raggio $+\infty$)! Allo sviluppo in 0: $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$; essendo limitata (in modulo), $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n > 0$, da cui $f(z) = f(0)$. $\blacksquare$

Continuiamo, è (in particolare) $f(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-c)}\,dz$, $\overset{(z(t)=c+re^{it},\ t\in[0,2\pi])}{=}$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z(t))}{z(t)-c}\,z'(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(c+re^{it})\,dt \quad (\text{"TEO. MEDIA"}),$$

da cui in 0 ho $((\mathrm{Re} f)(a) =) \mathrm{Re}(f(a)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\mathrm{Re}(f(a+re^{i\sigma}))}_{((\mathrm{Re} f)(a+re^{i\sigma}))} d\sigma$!

TEO. MASSIMO MODULO: $f: D$ dominio $\to \mathbb{C}$ olomorfa NON costante non ha in modulo massimi relativi su D.

[Sia per assurdo $a \in D$ tale che $|f(a)| \geq |f(z)|$ $\forall z \in U$, U intorno di a in D; poiché f olomorfa è analitica, e che f non è costante, è $f(a) \neq 0$ di certo: basta allora provare che però per massimi relativi $f(a)$ reali > 0! (per f generale con max. rel. in a $(\neq 0!)$ considero $f(z) \cdot \frac{f(a)}{|f(a)|}$ (fenomeno evidente)). Dunque $|f(a)| = \mathrm{Re}(f(a))$ (>0); sia ora $r>0$ tale che $\overline{B_r(a)} \subseteq U$ e γ ~~è~~ ed è solo γ che percorre $\partial B_r(a)$: ovviamente è allora $\mathrm{Re}(f(a+re^{i\sigma})) \leq |f(a+re^{i\sigma})| \leq |f(a)| = \mathrm{Re}(f(a))$; se ci fosse anche solo un $\sigma \in [0, 2\pi]$ per il quale valga il $<$, allora per continuità sarebbe $\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(f(a+re^{i\sigma}))d\sigma < \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(f(a))d\sigma =$
$= 2\pi \, \mathrm{Re}(f(a))$, che contraddice quanto trovato sopra! Dunque $\forall \sigma \in [0, 2\pi]$ $\mathrm{Re}(f(a+re^{i\sigma})) = |f(a+re^{i\sigma})| = \underset{(>0)}{|f(a)|}$, quindi $f(a+re^{i\sigma}) = f(a)$, ed f analitica sarebbe dunque costante su tutto $B_r(a)$: assurdo, perché $f \neq$ cost.]

⟹ TEO. MINIMO MODULO: $f: D$ connesso $\to \mathbb{C}$ olomorfa NON costante E MAI NULLA non ha in modulo minimo relativo in D.

[$1/f : D \to \mathbb{C}$ è olomorfa non costante su un connesso, quindi non ha in modulo max. rel.]

Dunque, nel caso D sia connesso LIMITATO e $f: \overline{D} \to \mathbb{C}$ olomorfa (o continua in $\overline{D}$, ma olomorfa in D), $|f|$ assume $M = \max_{\overline{D}} |f|$ solo su ∂D!

TEO. WEIERSTRASS: D connesso, $f_i : D \to \mathbb{C}$ olomorfe che convergono uniformemente sui compatti di D a f $\Rightarrow$ f olomorfa, e inoltre $f_i^{(n)}$ tende alla stessa cosa di $f^{(n)}$.

AD. ES. quando D è anche limitato, e le f_i non continue su tutto $\overline{D}$ che converge uniform. su ∂D!!

[Infatti $\int f(z)dz$ è valutato chiuso: $\forall z_0 \in D$, e considerato $r>0$ tale che $B_r(z_0) \subseteq D$, se γ è un arco chiuso in $B_r(z_0)$ allora ovviamente anche la parte interna della regione racchiusa da $|\gamma|$ sta in D (più del resto), come f_i è olomorfa, quindi $\int_\gamma f_i(z)dz = 0$ (Cauchy); inoltre $|\gamma|$ è compatto, quindi $f_i \xrightarrow[|\gamma|]{\text{unif}} f$ $\Rightarrow$ $\int_\gamma f_i(z)dz \to \int_\gamma f(z)dz$ $(0!)$ $\forall \gamma$.

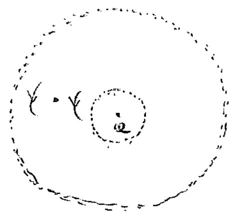
Sia inoltre K compatto $\subset D$; se $r = \mathrm{dist}(K, \partial D)$ $(>0!)$, allora sia K^* un compatto che contiene tutte le palle $\overline{B_{r/2}(a)}$ al variare di $a \in K$: vale $\forall a \in K$ (e $\forall n \geq 0$)

$$|f_i^{(n)}(a) - f^{(n)}(a)| = |(f_i - f)^{(n)}(a)| \underset{(f_i - f \text{ olomorfa!})}{\overset{(C.)}{\leq}} \frac{n!}{(r/2)^n} \cdot \max_{\partial B_{r/2}(a)} |f_i - f| \leq$$

$$\leq \frac{n!}{(r/2)^n} \cdot \max_{K^*} |f_i - f| \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$$ indip. da $a \in K$!]

Sia f olomorfa nella corona circolare $r_1 < |z-a| < r_2$, $r_1 \geq 0$:

allora ivi $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$, nel senso che



$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z-a)^n + \underbrace{\sum_{n \geq 1} c_{-n} (z-a)^{-n}}_{(\text{"la parte principale dello sviluppo"})}$ in senso

uniforme (sviluppo in "serie di Laurent"); un tale

sviluppo è unico, ed inoltre f è somma puntuale e totale.

[Se $0 \leq \rho_1 < \rho_2$ sono tali che $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$, allora f è olomorfa in un aperto contenente la chiusura del dominio $\rho_1 < |z-a| < \rho_2$:

(parametrizzando $|z-a| = \rho_i$ al solito modo), ho per Cauchy che

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \quad \forall \rho_1 < |z_0 - a| < \rho_2;$$

ora $z \in |\gamma_2|$, ossia $|z-a| = \rho_2$, $\Rightarrow \left| \frac{z_0-a}{z-a} \right| < 1$, per cui $\forall z \in |\gamma_2|$ (conv. tot., quindi unif., in z)

ho $\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_0-a}{z-a}} = \frac{1}{z-a} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z_0-a}{z-a} \right)^n =$

$= \sum_{n \geq 0} \frac{(z_0-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$, da cui sempre per convergenza uniforme

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \sum_{n \geq 0} (z_0-a)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz}_{=: c_n}$$, dove (effettivamente)

c_n non dipende da $\rho_2 > r_1$ ($\rho < r_2$), e così da z_0, e

lo scriviamo come $\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz}$ con $|\gamma| = \partial B_r(a)$, $r_1 < r < r_2$;

(param. al solito modo)

Analogamente, per qui $z \in |\gamma_1|$, ossia con $|z-c| = \rho_1$, $\left|\frac{z_0-c}{z-c}\right| > 1$, ossia

$\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right| < 1$: $\frac{1}{z-z_0} = \frac{-1}{z_0-c} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-c}{z_0-c}} =$

$$= -\sum_{n\geq 0} \frac{(z-c)^n}{(z_0-c)^{n+1}} \Rightarrow \frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(z_0-c)^{n+1}} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(z)(z-c)^n\,dz$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} (z_0-c)^{-n} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{(z-c)^{-n+1}}\,dz}_{(= c_{-n}\ !)}$$; la sottrazione resta

così verificata, e la convergenza uniforme deriva dal fatto che, $\forall n \in \mathbb{Z}$, c_n NON dipende da z_0! Se d'altra parte $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z-c)^n$,

allora $\forall n \in \mathbb{Z}$ $$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m (z-c)^{m-n-1}\,dz =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\gamma (z-c)^{m-n-1}\,dz$$, $= b_n$ poiché $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\int_\gamma (z-c)^k\,dz = \begin{cases} 2\pi i & k=-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, = (2\pi i)\delta_{k,-1}$$: infatti è $=$ $(z(t) = c + re^{it},\ t \in [0,2\pi])$

$$= \int_0^{2\pi} (re^{it})^k \cdot ire^{it}\,dt = r^{k+1} \cdot i \cdot \int_0^{2\pi} e^{it(k+1)}\,dt$$, dove $e^{it(k+1)}$ è

2π-periodica, e tranne che $k=-1$ quando è $\equiv 1$.

Infine lo scambio serie e termine a termine è per Weierstrass, avendo una succ. (di somme parziali) di funzioni olomorfe su un dominio che converge UNIF. sui suoi compatti, comunque ovunque. $\square$

Sia f olomorfa su $U\setminus\{e\}$, U intorno di e; f è prolungabile a $F: U \to \mathbb{C}$ olomorfa è equivalente a come definire f in e (altro ancora una funzione analitica), per cui posso immaginare U come $|z-e|<r_2$ (e poi $r_1=0$):

f è definibile in e $\iff$ $c_n = 0 \quad \forall n<0$.
(in riferimento allo sviluppo in serie di L. su $0<|z-e|<r_2$)

[($\Leftarrow$) $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n (z-e)^n$: pongo $f(e) := c_0$, nel senso che considero su tutto $|z-e|<r_2$ $F(z) := \sum_{n\geq 0} c_n (z-e)^n$.

($\Rightarrow$) F olomorfa su $|z-e|<r_2$ è un elemento analitico di centro e (e raggio almeno r_2) $F(z) = \sum_{n\geq 0} c_n (z-e)^n$; inoltre $\forall\, 0<|z-e|<r_2$ è $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n (z-e)^n$ (in senso unificato), da cui la tesi.]

Per f vale dunque la seguente casistica:

(1) $c_n = 0 \quad \forall n<0$: e "punto regolare" per f;

(2) $c_n \neq 0$ per un n° finito di $n<0$: se $p>0$ è il più grande intero per il quale $c_{-p}\neq 0$, e è "polo di ordine p" per f; (p-polo)

(3) $c_n \neq 0$ per infiniti $n<0$: e è "singolarità essenziale" per f.

Vale che (1) e punto regolare per f $\iff$ $|f|$ limitato vicino ad e;
(2) e polo per f $\iff$ $\lim_{z\to e} |f(z)| = +\infty$;
(3) e singolarità essenziale per f $\iff$ $\overline{f(V\setminus\{e\})} = \mathbb{C}$ per ogni intorno V di e.

{In realtà, in (3), accade Picard: $f(V\setminus\{e\}) \supseteq \mathbb{C}\setminus\{R\}$!}

Chiaramente basta provare che "⇒". (1) $f(z)=\sum_{n\geq 0} c_n (z-a)^n$.

(2) $f(z)=\sum_{n=-p}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n\geq 0} c_{n-p}(z-a)^{n-p} \overset{\text{(c. unif.)}}{=} \frac{1}{(z-a)^p}\underbrace{\sum_{n\geq 0} c_{n-p}(z-a)^n}_{\text{in } a \text{ vale } c_{-p}\neq 0\,!}$

che $|f(z)| \xrightarrow[z\to a]{} +\infty \cdot \underbrace{|c_{-p}|}_{\neq 0} = +\infty$.

(3) Siano per assurdo $k\in\mathbb{C}$, $\delta>0$ ed $\varepsilon>0$ tali che $|f(z)-k|\geq\varepsilon$ anche se $0<|z-a|<\delta$; allora $g(z)\doteq\frac{1}{f(z)-k}$ è olomorfa nella corona $0<|z-a|<\delta$: $g(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} d_n (z-a)^n$ dove

$d_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{(f(z)-k)(z-a)^{n+1}}\,dz$, che ha

$|d_n| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot \max_{z\in(\gamma)} \frac{1}{|f(z)-k|\cdot\underbrace{|z-a|^{n+1}}_{r^{n+1}}}\cdot \underbrace{\ell(\gamma)}_{2\pi r} \leq \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{r^n}$, che,

poiché r deve essere arbitr. ed r, $\Rightarrow d_n=0 \;\forall n<0$, da cui

$g(z)=\sum_{n\geq 0} d_n (z-a)^n$; se ora p è il minimo $n\geq 0$ tale che

$d_p\neq 0$, allora $g(z)=\sum_{n=p} d_n (z-a)^n = \sum_{n\geq 0} d_{n+p}(z-a)^{n+p} =$

$=(z-a)^p\cdot\sum_{n\geq 0} d_{n+p}(z-a)^n$: essendo $d_{0+p}=d_p\neq 0$, $\sum_{n\geq 0} d_{n+p}(z-a)^n$

è invertibile in $|z-a|<\delta'\leq\delta$ con inverso un altro elem. analitico con centro in a, per cui $f(z)-k=\frac{1}{(z-a)^p}\cdot\left[\sum_{n\geq 0} d_{n+p}(z-a)^n\right]^{-1}$ infine

$\begin{cases} p=0 \Rightarrow f(z) \text{ elem. an. con centro in } a \text{ (e raggio almeno } \delta'>0\text{), che dunque è regolare} \\ p>0 \Rightarrow f(z) \text{ ha } p\text{-polo in } a \end{cases}$

D dominio di $\mathbb{C}$ e $g: D \to \mathbb{C}$ olomorfa $\not\equiv 0$: allora gli zeri di g sono isolati, e altri non si accumulano in D; $\forall e \in D$, se $g(z) = \sum_{n \geq 0} b_n (z-e)^n$ è lo sviluppo di Taylor di g con centro in e (su un'opportuna palla aperta di centro e $(\subseteq D)$), allora esiste $q \doteq$ il minimo $n \geq 0$ tale che $b_n \neq 0$, tale che $q = 0 \Leftrightarrow g(e) \neq 0$: q è l'ordine di e come zero di g; <u>diciamo quindi</u> $f: D \to \mathbb{C}$ olomorfa, $e \in D$ tale che $g(e) \neq 0$ e U intorno di e $(\subseteq D)$ della forma $|z-e| < r$ senza altri zeri di g: $m(z) \doteq \frac{f(z)}{g(z)} : U \setminus \{e\} \to \mathbb{C}$ è olomorfa su $0 < |z-e| < r$, per cui secondo le considerazioni svolte per $z \to e$ o ammette limite finito o lo ammette infinito o non lo ammette (in modulo). Non solo lo ammette, ossia e è una singolarità polare per m: infatti possiamo supporre $f \not\equiv 0$, per cui esiste l'ordine di e, sia p, anche come zero di f; dunque in U

$$f(z) = \sum_{n \geq p} a_n (z-e)^n = \sum_{n \geq 0} a_{n+p} (z-e)^{n+p} = (z-e)^p \sum_{n \geq 0} a_{n+p} (z-e)^n \quad (a_p \neq 0),$$

e analogamente $g(z) = (z-e)^q \sum_{n \geq 0} b_{n+q} (z-e)^n$ $(b_q \neq 0)$, dunque a meno di "prolungamenti"

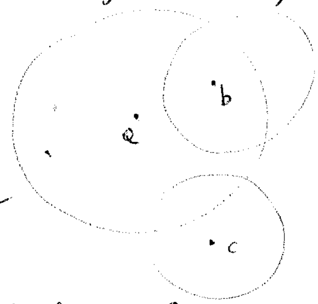
$$m(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = (z-e)^{p-q} \cdot \underbrace{\left[\sum_{n \geq 0} a_{n+p} (z-e)^n\right] \cdot \left[\sum_{n \geq 0} b_{n+q} (z-e)^n\right]^{-1}}_{\text{è analitica di centro in } e \text{ con } 1^\circ \text{ coeff } a_p/b_q \neq 0!} :$$

e è regolare per $m \Leftrightarrow p \geq q$, altrimenti è un $q-p$-polo per m!

$\boxed{\text{NOTA}}$ ~~: uno zero di ordine $n \geq 1$ implica l'esistenza di altri $(n-1)$-zeri (di ordine ≥ 1)~~ ! ~~(nella formula di Taylor)~~

Sia ora D aperto di $\mathbb{C}$; una funzione m per la quale esiste $N \subseteq D$ fatto di punti isolati tale che m sia olomorfa su $D \setminus N$ e che m presenti singolarità polari in N e che m sia "localmente" il quoziente di due funzioni olomorfe" è detta funzione **MEROMORFA**.

Più precisamente voglio ~~che~~ che, $\forall a \in D$, $\exists$ intorno $U_a \subseteq D$ di a ed $\exists$ $h_a, g_a : U_a \to \mathbb{C}$ olomorfe tale che $g_a \not\equiv 0$ e, $\forall b \in D$, su $U_a \cap U_b$ valga $h_a g_b = h_b g_a$, assieme



$N = \bigcup_{a \in D} N_a$, N_a = gli zeri (in U_a) di g_a e m sia

univocamente determinata in modo naturale da h_a/g_a su un'opportuna corona (quale che sia $a \in D$) circolare aperta ~~di~~ in U_a, $\Rightarrow$ N è fatto di punti isolati! Anzi (e il resto è ok) che nemmeno si accumulano in D: $\forall a \in D$, $a \in U_a$ non è di acc. per gli zeri di g_a! Il bello è che vale il viceversa:

m funzione con $N \subseteq D$ senza punti di acc. in D tale che m sia olomorfa su $D \setminus N$ e che abbia sing. polari in N $\Rightarrow$ m meromorfa!

$\forall a \in D \setminus N$: $\forall z \in D \setminus N$ (aperto!), $m(z) = \frac{m(z)}{1}$!

$\forall a \in N$: in una opportuna corona circolare con centro in a, non vi sono altri punti di N, per cui m è lì olomorfa e ammette Laurent sviluppo

$$m(z) = \sum_{n=-p}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n \geq 0} c_{n-p} (z-a)^{n-p} = \frac{\sum_{n \geq 0} c_{n-p}(z-a)^n}{(z-a)^p}$$

f olomorfa intorno ad e, ovvero su $0 < |z-e| < r_2$, dove questa è $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-e)^n$; $\forall\ 0 < r < r_2$, parametrizzando $\partial B_r(e)$ col solito arco γ ho $\int_\gamma f(z)dz = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \underbrace{\int_\gamma (z-e)^n dz}_{=(2\pi i)\cdot\delta_{n,-1}} =$

$= (2\pi i) c_{-1}$, $=: (2\pi i)\ \mathrm{Res}(f, e)$ ("RESIDUO DI f IN e"),

valore che in effetti NON cambia circondando e con un altro arco chiuso (antiorario).

$\boxed{\text{TEO. DEI RESIDUI}}$: U aperto, D dominio regolare, $U \supseteq \overline{D}$, f olomorfa su U tranne al più in $e_1, \dots, e_s \in D$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} f(z)dz = \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Res}(f, e_j) \ !$$

Sia $r > 0$ abb. piccolo affinché gli e_j siano interni in D delle $B_r(e_j)$, e siano $\partial B_r(e_j)$ parametrizzati coi soliti archi γ_j: allora, per il teo. di Cauchy, $\int_{\partial D} f(z)dz = \sum_{j=1}^{s} \int_{\gamma_j} f(z)dz$! ∎

$\boxed{\text{OSS.}}$: siccome che il teo. di C. vale anche per f olomorfa su D e continua su $\overline{D}$, il teo. dei res. vale per f olomorfa su $D \setminus \{e_1, \dots, e_s\}$ e continua su $\overline{D} \setminus \{e_1, \dots, e_s\}$!

Dunque per gli integrali m'interessano i residui, che però e differenza dei coeff. delle serie di Taylor non sono calcolabili immediatamente ... Ma in certi casi sì: sia ad es. $f(z)$ olomorfa intorno ad un suo p-polo e,

$p \geq 1$, per cui si ha $m(z) = \sum_{n=-p}^{+\infty} c_n (z-e)^n = (z-e)^{-p} \sum_{n\geq 0} c_{n-p} (z-e)^n$;

allora $h(z) \doteq (z-e)^p m(z) = \sum_{n\geq 0} c_{n-p} (z-e)^n$ è la derivata con sviluppo in serie di Taylor in e scritto : $\forall n \geq 0$, $c_{n-p} = \frac{h^{(n)}(e)}{n!}$, e in particolare $\mathrm{Res}(m, e) = \frac{h^{(p-1)}(e)}{(p-1)!}$! In particolare se $p=1$ allora $\mathrm{Res}(m,e) = h(e)$. Dunque nel caso già accennato $m(z) \doteq \frac{f(z)}{g(z)}$ con f, g derivabili $\not\equiv 0$ vicino a e, anzi anche in e ma con $g(e) = 0$, se e è un p-zero per f ed un q-zero per g con $q > p$, allora e è un $(q-p)$-polo per m : se $q = p+1$ (e se a_n, b_n sono i coeff. di Laurent in e di f e g risp.) allora chiaramente $\mathrm{Res}(f/g, e) = \frac{a_p}{b_{p+1}}$!

---

f derivabile intorno ad e è tale che f' sia derivabile in quello stesso intorno, e tale che avvicinandosi per $z \to e$ il modulo di $|f'(z)|$ sia dello stesso tipo di $|f(z)|$, e anzi hanno gli stessi punti singolari ; Dunque, se gli zeri di f sono isolati, allora f'/f ha come punti singolari tali zeri più i punti singolari di f! Sia, ad es., e un p-polo per f, con $p \in \mathbb{Z}$ intendendo per "$(-|p|)$-polo di f" un $(+|p|)$-zero per f, e in effetti posso scrivere (nei casi) $f(z) = \sum_{n=-p}^{+\infty} c_n (z-e)^n$ $(c_{-p} \neq 0)$, $= (z-e)^{-p} \sum_{n\geq 0} c_{n-p} (z-e)^n$, per cui $f'(z) = \sum_{n=-p}^{+\infty} n c_n (z-e)^{n-1}$, $= (z-e)^{-p-1} \sum_{n\geq 0} (n-p) c_{n-p} (z-e)^n$, $\Rightarrow$

(forse rending.) $\Rightarrow \dfrac{f'(z)}{f(z)} = (z-a)^{-1} \left[\sum_{n\geq 0} (n-p) c_{n-p} (z-a)^n \right] \cdot \left[\sum_{n\geq 0} c_{n-p} (z-a)^n \right]$, da cui

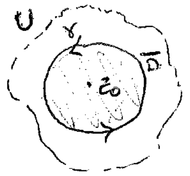
$$\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = -p .$$

<u>FORMULA INDICATORE LOGARITMICO</u>: D dominio regolare, U aperto $\supseteq \overline{D}$, f meromorfa in U <u>ma</u> olomorfa e mai nulla in ∂D; se $a_1, \dots, a_s$ sono i poli di f in D, di ordini $p_1, \dots, p_s$ risp., e se ($\nexists$ f' olomorfa forse!?) (mai in D) $b_1, \dots, b_r$ sono gli zeri di f in D, di ordini $m_1, \dots, m_r$ risp., allora $P \doteq \sum_{j=1}^{s} p_j$ e $N \doteq \sum_{h=1}^{r} m_h$ sono tali che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P .$$

$\Big[$ f'/f è olomorfa in $D \setminus \{a_j, b_h\}$ ed è continua in $\overline{D} \setminus \{\dots\}$, quindi per il teo. dei res. $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{s} \underbrace{\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, a_j\right)}_{-p_j} + \sum_{h=1}^{r} \underbrace{\mathrm{Res}(f'/f, b_h)}_{m_h}$. $\Big]$

$\boxed{\text{OSS.}}$: segue imm. (?) (eq.) che, nelle medesime ipotesi TRANNE $f \neq k$ (EC) su tutto ∂D e i b_h tutti e soli i punti di D dove $f(b_h) = k$ con $m_h^{(k)}$ i loro ordini per $f - k$, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)-k} dz = N_k - P$.

OSS. → Nel caso particolare che U e D siano tipo , le formule si riduce a $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-k}\,dz = N_k - P$, $= N_k$ se per giunta f è olomorfa su tutto $\underset{(\bar D)}{U}$ ($f \neq k$ su tutto $|\gamma|$); in ogni caso tale "$\oint$" è a valori interi, quindi è costante nelle comp. conn. dell'aperto A dove varia $k \in A$!

Se $F(z,k)$ è (continua in $z \in |\gamma|$ e) continua in $k \in A$, allora pure $\oint_\gamma F(z,k)\,dz$ è continua in $k \in A$: $\left|\oint_\gamma [F(z,k_0) - F(z,k)]\,dz\right| \le$ $(\forall k, k_0 \in A)$

$$\le \ell(\gamma) \cdot \underbrace{\max_{z \in |\gamma|}}_{(\text{raggiunto per } \bar z \in |\gamma|)} |F(z,k_0) - F(z,k)| = \ell(\gamma) \cdot |F(\bar z,k_0) - F(\bar z,k)| \xrightarrow[k \to k_0\ (A)]{} 0 .$$

(Infine $f: X$ sp. top. (lo. conn. per archi) $\to \mathbb{Z}$ (top. discr.) è continua $\Leftrightarrow$ è cost. nelle c.c. di X.);

TEO: $f: D$ dominio $\to \mathbb{C}$ olomorfa non costante è aperta.

Basta $f(D)$ aperto, ossia interno di ogni proprio punto $w_0 = f(z_0)$, $z_0 \in D$; $f(z) - w_0$ è olomorfa non costante nel dominio D, per cui ha zeri isolati in D: così è per il suo zero z_0, che è di ordine $m \ge 1$, per cui esiste $r > 0$ tale che $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$ e tale che lì non vi siano altri zeri per $f - w_0$; in particolare $f(z) \neq w_0$ $\forall z \in |\gamma|$, se γ è il solito arco che percorre $\partial B_r(z_0)$, quindi $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w_0}\,dz = m$ per questa oss. sopra! Precisamente

$\delta \doteq \min_{|\gamma|} |f-w_0| > 0$, dunque $\forall w\in\mathbb{C}$ con $|w-w_0|<\delta$,

ossia $w\in B_\delta(w_0)$, è $\forall z\in|\gamma|$ $|f(z)-w| \geq$

$\geq |f(z)-w_0| - |w_0-w| \geq \delta - |w_0-w| > 0$, per cui è anche $f(z)\neq w$ su tutto $|\gamma|$: vale che

$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz = n^\circ$ (complessivo!) zeri di $f-w$ in $B_r(z_0)$;

ma, ancora per la oss. prec., tale numero intero è costante su $B_\delta(w_0)$, ossia vale proprio m, che è ≥ 1: segue che $\exists z\in B_r(z_0)$ tale che $f(z)=w$, ossia $B_\delta(w_0)\subseteq f(B_r(z_0))$ $(\subseteq f(D))$!

Dunque l'equazione (in z) $f(z)-w=0$ al variare di $z\in B_r(z_0)$ e $w\in B_\delta(w_0)$ ha almeno una soluzione: se $w=w_0$, allora è la sola z_0, mentre in generale ($w\neq w_0$) sono al più m (≥ 1) (e tutte $\neq z_0$) (soluzioni di ordine 1); dato che f è olomorfa (!), basterà prendere r abb. piccolo affinché $\boxed{f'\neq 0 \text{ su tutto } B_r(z_0)\setminus\{z_0\}}$ in modo che lo sviluppo di Taylor di f $(-w)$ in un qualsiasi $z\neq z_0$ in $B_r(z_0)$ abbia 1-esimo coeff $\neq 0$: in particolare $f(z)=w$ ($\neq w_0$) varrebbe per m punti distinti $z\in B_r(z_0)\setminus\{z_0\}$!

Dunque $m=1$ (cioè $f'(z_0)\neq 0$) $\Leftrightarrow$ $f: B_r(z_0)\cap f^{-1}(B_\delta(w_0)) \to B_\delta(w_0)$ è bigettiva, ossia (TG) un omeomorfismo!

'*αὐτὰρ ἐγὼ κἀκεῖθι φίλου μεμνήσομ' ἑταίρου*' (*X* 390)

καί

D '*τί σοι πρὸς Ἕκτορ' ἢ γέροντ' εἴπω πόσιν;*' (Eur. Hec. 422).

ἐκ δὲ τούτου παρατροπῆς γενομένης καὶ ὅπλα καὶ σκεύη καὶ ἱμάτια συνήθη τοῖς τεθνηκόσι καὶ ὡς ὁ Μίνως τῷ Γλαύκῳ, 'Κρητικοὺς αὐλοὺς θανοῦσι κῶλα ποικίλης νεβροῦ' (Trag. adesp. 419) *συνθάπτοντες ἥδιον ἔχουσι. κἄν τι δόξωσιν αἰτεῖν καὶ ποθεῖν ἐκείνους, χαίρουσιν ἐπιδιδόντες· ὥσπερ ὁ Περίανδρος τῇ γυναικὶ τὸν κόσμον ὡς δεομένῃ καὶ ῥιγοῦν λεγούσῃ συγκατέκαυσεν. οἱ δ' Αἰακοὶ καὶ Ἀσκάλαφοι καὶ Ἀχέροντες οὐ πάνυ διαταράττουσιν, οἷς γε καὶ χοροὺς καὶ θέατρα καὶ μοῦσαν † ἡδομένοις παντοδαπὴν γενομένου δεδώκασιν. ἀλλ' ἐκεῖνο τοῦ θανά-*
E *του τὸ πρόσωπον ὡς φοβερὸν καὶ σκυθρωπὸν καὶ σκοτεινὸν ἅπαντες ὑποδειμαίνουσι, τὸ τῆς ἀναισθησίας καὶ λήθης καὶ ἀγνοίας· καὶ πρὸς τό 'ἀπόλωλε' καὶ τό 'ἀνῄρηται' καὶ τό 'οὐκ ἔστι' ταράσσονται καὶ δυσανασχετοῦσι τούτων λεγομένων·* (fr. mel. chor. adesp. 16 D.)

'*τὸ ἔπειτα κείσεται βαθυδένδρῳ*
ἐν χθονὶ συμποσίων τε καὶ λυρᾶν ἄμοιρος
ἰαχᾶς τε παντερπέος αὐλῶν·

καί (*I* 408)

'*ἀνδρὸς δὲ ψυχὴ πάλιν ἐλθεῖν οὔτε λεϊστὴ*
οὔθ' ἑλετή, ἐπεὶ ἄρ κεν ἀμείψεται ἕρκος ὀδόντων'

(27). *ἣν καὶ προεπισφάττουσιν οἱ ταυτὶ λέγοντες 'ἅπαξ ἄνθρωποι γεγόναμεν, δὶς δ' οὐκ ἔστι γενέσθαι· δεῖ δὲ τὸν*

25 sqq. Epic. fr. 204 (cf. 1106f)
9 Herod. V 92 || **13** sqq. De lat. viv. 7

1 *ἀτὰρ* X || **6** *θανούσης* Ω corr. Ra. *θανόντι* (ut probab. poeta ipse) Hecker || **8** *ἐκεῖνοι* Si. || **12. 13** *ἡδονῆς παντοδαπῆς γέμουσαν δεδ.* Mez. *ἡδονῆς παντοδαπῆς γενέτειραν ἀποδεδ.?* || **16** *τἀνήρηται* a¹A¹B || **19** dist. Po. ⟨*ὡς*⟩ (Duebn.) vel ⟨*οἷον*⟩ (Re.) *τό ἔπειτα* vulgo | *ἐπιτακήσεται* Ω corr. Duebn. || **25** sic Po. *ἣ* (*ἢ* Wy.) *καὶ προσεπισφάττουσιν* Ω 'animam iam ante mortem morte multant' cf. p. 164, 8 ⟨*πότερον οὖν τὰ τοιοῦτα λύουσιν*⟩ *ἢ καὶ προσεπισφίγγουσιν* Sa.

αἰῶνα μηκέτ' εἶναι.' καὶ γὰρ τὸ παρὸν ὡς μικρὸν μᾶλ- F
λον δὲ μηδ' ὁτιοῦν πρὸς τὸ σύμπαν ἀτιμάσαντες ἀναπόλαυστον προΐενται, καὶ ὀλιγωροῦσιν ἀρετῆς καὶ πράξεως οἷον ἐξαθυμοῦντες καὶ καταφρονοῦντες ἑαυτῶν ὡς ἐφημέρων καὶ ἀβεβαίων καὶ πρὸς οὐθὲν ἀξιόλογον γεγονότων. |
τὸ γάρ 'ἀναισθητεῖν τὸ διαλυθὲν καὶ μηθὲν εἶναι πρὸς 1105
ἡμᾶς τὸ ἀναισθητοῦν' οὐκ ἀναιρεῖ τὸ τοῦ θανάτου δέος ἀλλ' ὥσπερ ἀπόδειξιν αὐτοῦ προστίθησιν. αὐτὸ γὰρ τοῦτ' ἐστὶν ὃ δέδοικεν ἡ φύσις·

'*ἀλλ' ὑμεῖς μὲν πάντες ὕδωρ καὶ γαῖα γένοισθε*' (*H* 99),

τὴν εἰς τὸ μὴ φρονοῦν μηδ' αἰσθανόμενον διάλυσιν τῆς ψυχῆς, ἣν Ἐπίκουρος εἰς κενὸν καὶ ἀτόμους διασπορὰν ποιῶν ἔτι μᾶλλον ἐκκόπτει τὴν ἐλπίδα τῆς ἀφθαρσίας, δι' ἣν ὀλίγου δέω λέγειν πάντας εἶναι καὶ πάσας προθύμους τῷ Κερβέρῳ διαδάκνεσθαι καὶ φορεῖν εἰς τὸν τρητόν, ὅπως ἐν τῷ εἶναι μόνον διαμένωσι μηδ' ἀναιρεθῶσι. καίτοι ταῦτα μέν, ὥσπερ ἔφην, οὐ πάνυ πολλοὶ δεδίασι, μητέρων B
ὄντα καὶ τιτθῶν δόγματα καὶ λόγους μυθώδεις, οἱ δὲ καὶ δεδιότες τελετάς τινας αὖ πάλιν καὶ καθαρμοὺς οἴονται βοηθεῖν, οἷς ἁγνισάμενοι διατελεῖν ἐν Ἅιδου παίζοντες καὶ χορεύοντες ἐν τόποις αὐγὴν καὶ πνεῦμα καθαρὸν καὶ φέγγος ἔχουσιν. ἡ δὲ τοῦ ζῆν στέρησις ἐνοχλεῖ καὶ νέους καὶ γέροντας·

'*δυσέρωτες γὰρ φαινόμεθ' ὄντες*
τοῦδ', ὅ τι τόδε στίλβει κατὰ γῆν'

6—13 Epic. fr. 500 (cf. 1103d) || **6. 7** Epic. *K. δ.* 2
20 De lat. viv. 7

1 *εἶναι* Re. *ἰέναι*, cf. 1106f || **2** *τὸ σύμπαντα* Ω corr. Po. *τὰ σύμπαντα* Duebn. *τὸν σύμπαντα αἰῶνα* Wy. | *ἀτιμήσαντες* Ω corr. Cob. | *ἀναπόλαυστα* Ω corr. Wy. || **6** *ἀναίσθητον καὶ λυθὲν* Ω corr. Gataker Us. cf. p. 163, 27 || **7** *θανάτου* om. X || **8** *αὐτῷ* pro *αὐτοῦ?* || **15** *τρητόν* sc. *πίθον* (cl. Suda *εἰς τὸν τετρημένον*) Ra. *ἄτρητον* || **18** *διηγήματα* Wy. *δείματα* Kron. Wil. || **20** *διατελεῖν* (sc. *οἴονται*)] *διατελοῖεν* Duebn. || **21** *τόποις* Wy. *τοῖς* | *αὐγὴν*] cf. Plato Phaedr. 250c *ἐν αὐγῇ καθαρᾷ* || **22** *φέγγος* Re. (cf. 1130c) *φθόγγον* Ω *ἄφθονον* Kron. || **24** *γὰρ*] *δὴ* Eur. || **25** *τόδε*] *τοῦτο* Eur.

Allora $f: D$ aperto $\to \mathbb{C}$ olomorfa con f' MAI NULLA in D è EQ. con omeomorfismo locale ! (è quindi f' mai nulla è condizione necessaria, ma non sufficiente, per avere f omeomorfismo (cioè TEO. log.!) (con $f(D)$)!)
(e^z)

OSS. : $f: D$ aperto $\to \mathbb{C}$ olomorfa con f' mai nulla in D e biettiva con $D^* = f(D)$ $\Rightarrow$ se $g: D^* \to D$ è l'omeo. inverso di f, allora anche g è olomorfa e, $\forall w_0 = f(z_0) \in D^*$, $(z_0 = g(w_0))$

$$g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

[$\forall w \neq w_0$ in D^*, si ha $w = f(z) \neq f(z_0) = w_0$, per iniettività $g(w) \neq g(w_0)$ $(g(w) = z)$ $(g(w_0) = z_0)$ e $z \neq z_0$, e allora

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{1}{\frac{w - w_0}{g(w) - g(w_0)}} = \frac{1}{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}$$

; infine per continuità di g $z \to z_0$ per $w \to w_0$.]

Che $f: D$ aperto $\to \mathbb{C}$ olomorfa con f' (cont.) mai 0 sia omeo. loc. (quindi biettiva!) segue anche dal teorema della funzione implicita in $\mathbb{R}^n$: infatti, se al solito $z = x + iy$ e $f(z) = g(x,y) + i\,h(x,y)$, allora $g, h : D \to \mathbb{R}$ $(\subseteq \mathbb{R}^2)$ sono C^1 tali che, $\forall (x_0, y_0) \in D$ $(z_0 = x_0 + iy_0)$, $\det \frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)}(x_0,y_0) \neq 0$!
(da cui il teorema della funzione inversa)

$$\left[\ \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2 = |f'(z_0)|^2 \neq 0 \ !\ \right]$$

with $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$

Siano $g, h : D \underset{(\mathbb{R}^2)}{\text{ap. conn.}} \to \mathbb{R}$ C^1, e $(x_0,y_0) \in D$ t.c. $\det\left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)}(x_0,y_0)\right) \neq 0$:

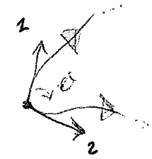
allora, ad esempio, per continuità lo è in tutto un intorno U di (x_0,y_0) (in D),

e, ristretti a V int. ap. conn. $\subseteq U$ di (x_0,y_0) e W int. ap. conn. di $(g,h)(x_0,y_0)$ ($\subseteq (g,h)(D)$)

tali che $f \doteq (g,h) : V \to W$ sia diffeomorfismo (C^1); in particolare

manda archi in V di partenza $z_0 \doteq (x_0,y_0)$ in archi su W di partenza $w_0 \doteq f(x_0,y_0)$:

più precisamente, sia $z(t) \doteq (x(t),y(t))$ arco in V con $t \in [a,b]$ e



$z(0) = (x_0,y_0) = z_0$, e quindi $f(z(t)) = f(x(t),y(t)) =: w(t)$

arco (in W) con $w(0) = w_0$; in particolare $z'(t) = (x'(t),y'(t)) \neq 0$ $\forall t$

e pure $w'(t) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}x' + \frac{\partial g}{\partial y}y' ; \frac{\partial h}{\partial x}x' + \frac{\partial h}{\partial y}y'\right)(t) \neq 0$ $\forall t$:

f è "conforme in $z_0 = (x_0,y_0)$" se "conserva gli angoli (orientati) in z_0 fra gli archi"; ovvero dire che $\forall z_1(t), z_2(t)$ del tipo sopra, preso

$\theta \in [0, 2\pi)$ il solo tale che $\frac{z_2'(0)}{|z_2'(0)|} = e^{i\theta}\frac{z_1'(0)}{|z_1'(0)|}$, e lo stesso

per $w_1(t), w_2(t)$ ma con θ^* tale che $\frac{w_2'(0)}{|w_2'(0)|} = e^{i\theta^*}\frac{w_1'(0)}{|w_1'(0)|}$)

f è conforme significa $\theta^* = \theta$, e cioè

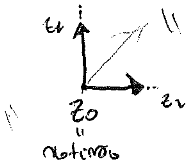
$$\boxed{\frac{w_2'(0)}{w_1'(0)} = \underbrace{\left(\frac{|w_2'(0)|}{|w_1'(0)|}\cdot\frac{|z_1'(0)|}{|z_2'(0)|}\right)}_{=:\, \underset{R_{1,2}}{R}\ (>0)}\frac{z_2'(0)}{z_1'(0)}}$$

. Ovviamente sono confuse notazioni in $\mathbb{R}^2$ con notazione complessa.

$\boxed{\text{TEO.}}$: nelle ipotesi precedenti per g e h, $f \doteq g + ih$ è conforme in z_0 $\Leftrightarrow$ f è $\underbrace{\text{olomorfa in } V}_{(g,h \text{ soddisfano C.-R.})}$ (con $f' \neq 0$)! (da cui, se $\left|\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)}\right| \neq 0$, f conf. $\Leftrightarrow$ f olom. (con $f' \neq 0$))

(⇐) f è conforme in z_0 con $k=1$, semplicemente perché posso derivare w_k in senso complesso in z_0, ottenendo $w_k'(0) = f'(z_k(0))\cdot z_k'(0) = f'(z_0)\, z_k'(0)$!

(⇒) So che
$$k\,\frac{x_2'(0)+i\,y_2'(0)}{x_1'(0)+i\,y_1'(0)} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x}x_2'(0)+\frac{\partial g}{\partial y}y_2'(0)+i\left[\frac{\partial h}{\partial x}x_2'(0)+\frac{\partial h}{\partial y}y_2'(0)\right]}{\frac{\partial g}{\partial x}x_1'(0)+\frac{\partial g}{\partial y}y_1'(0)+i\left[\frac{\partial h}{\partial x}x_1'(0)+\frac{\partial h}{\partial y}y_1'(0)\right]}(0)$$
al variare di possibili archi z_1, z_2; se in particolare



, ossia $z_1(T) \doteq i(y_0+T)$ e $z_2(T) \doteq x_0+T$, allora ho
$$k\cdot i = \frac{\frac{\partial g}{\partial y}+i\,\frac{\partial h}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial x}+i\,\frac{\partial h}{\partial x}},\quad \text{ossia}\quad \begin{cases} k\,\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} \\ k\,\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} \end{cases}$$
: non resta che ottenere $k=1$; ma infatti $z_1(T) \doteq (x_0+T)+i(y_0+T)$ ⇒
$$(1+i)k = \frac{\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+i\left[\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}\right]}{\frac{\partial g}{\partial x}+i\,\frac{\partial h}{\partial x}},$$
cioè
$$\begin{cases} k\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \frac{\partial g}{\partial x}+\underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}}_{-k\,\partial h/\partial x} \\ k\left(\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \frac{\partial h}{\partial x}+\underbrace{\frac{\partial h}{\partial y}}_{k\frac{\partial g}{\partial x}} \end{cases}$$
, ossia (per quanto ora trovato)
$$\begin{cases} k\,\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} \\ k\,\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} \end{cases},$$
e in effetti almeno uno tra g_x e h_x in (x_0,y_0) è $\neq 0$ perché
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$
è la prima colonna di $\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)}(x_0,y_0)$!

SCHWARZ : $D \doteq B_1^{\mathbb{C}}(0)$, $f : D \to \overline{D}$ olomorfa con

$f(0)=0$; allora $\dfrac{f(z)-f(0)}{z-0} = \dfrac{f(z)}{z} \xrightarrow[z \to 0]{} f'(0)$ e

quindi $g(z) \doteq \begin{cases} f(z)/z & z \in D\setminus\{0\} \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$ è olomorfa su D; ora,

$\forall\, 0<r<1$, dato che $|f| \le 1$ ho $\cancel{|g(z)| =}$

$\cancel{= \dfrac{|f(z)|}{|z|} \le \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{r} \quad \forall z \in \partial B_r(0)}$ ~~; quindi~~

$\cancel{|g(z)| \le 1}$ (MAX. MODULO) $\forall |z| \le r \quad |g(z)| \le$

$(|z_r| = r)$

$\le |g(z_r)| = \dfrac{|f(z_r)|}{|z_r|} \le \dfrac{1}{r}$, e dunque ovviamente

$$\boxed{|g(z)| \le 1 \quad \forall z \in D}$$, cioè $\begin{cases} |f(z)| \le |z| \ (\forall z \in D) \\ |f'(0)| \le 1 \end{cases}$!

Otteniamo che oppure $\exists\, z_0 \in D\setminus\{0\}$ t.c. $|f(z_0)| = |z_0|$, oppure se

$|f'(0)| = 1$, allora g è costante su D con $|g| = 1$,

diciamo $g \equiv a$ con $|a| = 1$: $f(z) = az$, $a = f'(0)$.

RIEMANN : $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ non ha una "naturale" struttura algebrica che estende quella di $\mathbb{C}$, mentre però ha una struttura topologica che estende quella di $\mathbb{C}$; ossia quella di $\hat{\mathbb{C}}$, ossia quella di S^2 $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ tramite la proiezione stereografica; precisamente, le coordinate rispetto al polo nord N, e rispetto al polo sud S ma poi ribaltando rispetto all'asse y, cosicché tra $\mathbb{C}_z$, $\mathbb{C}_w$ risp. così ottenute risulta $\boxed{z \cdot w = 1}$ (un bel conto dello stesso!) $\forall z, w \neq N, S$; in particolare l'immagine di un aperto di S^2 è illimitata ovvero di in $\mathbb{C}$ tranne una palla al, il resto al, è vicino a ∞ tutto l'altro! Dunque, è fatto il fatto noto che continuità di funzioni rispetto a z o w è equivalente, una funzione definita sul compatto S^2 è limitata e così continua; inoltre una funzione meromorfa su S^2 ha chiaramente un numero finito di poli, visto che neanche si possono accumulare a "∞", cioè a 0! Segue comunque, per ricordare, che una f. meromorfa su S^2 è una f. razionale.