Università degli Studi dell'Insubria

DIPARTIMENTO DI SCIENZA E ALTA TECNOLOGIA
Corso di Studio in Matematica e Fisica

Analisi Matematica 2

Richiami di Teoria ed Esercizi con Svolgimento

Docente: *E. G. Casini* Dottorando: *M. Tarsia*[*]

Anno Accademico 2018–2019
04/07/2019

Calcolo differenziale per funzioni di più variabili

Richiami di Teoria

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2_{(x,y)}$ un insieme a parte interna non vuota, ovvero con $\operatorname{int}\Omega \neq \emptyset$, sia $(x_0, y_0) \in \operatorname{int}\Omega$ e sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione scalare definita su Ω. La funzione f è *continua nel punto* (x_0, y_0) se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

o equivalentemente se, per ogni $\vartheta \in [0, 2\pi[$, risulta $\lim_{\rho\downarrow 0} f(x_0 + \rho\cos\vartheta, y_0 + \rho\sin\vartheta) = f(x_0, y_0)$.

La funzione f ammette *derivata parziale rispetto alla x nel punto* (x_0, y_0) se esiste finito il limite

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \equiv f_x(x_0,y_0) \doteq \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0+s,y_0)-f(x_0,y_0)}{s} \equiv \frac{d}{dx} f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$$

e, analogamente, f ammette *derivata parziale rispetto alla y nel punto* (x_0, y_0) se esiste finito il limite

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \equiv f_y(x_0,y_0) \doteq \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t} \equiv \frac{d}{dy} f(x_0,y)\Big|_{y=y_0}$$

ed in tal caso *il gradiente di f nel punto* (x_0, y_0) è il vettore $\mathrm{D}f(x_0, y_0)$ di $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^{2\times 1}$ dato da

$$\mathrm{D}f(x_0,y_0) \equiv \nabla f(x_0,y_0) \doteq \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Big)^{\mathsf{T}}.$$

Più in generale, assegnati $\vartheta \in [0, 2\pi[$ ed il corrispondente versore $\boldsymbol{v} \equiv (u, v)^{\mathsf{T}} \equiv (\cos\vartheta, \sin\vartheta)^{\mathsf{T}}$ di $\mathbb{R}^2$, f ammette *derivata in direzione $\boldsymbol{v}$ nel punto* (x_0, y_0) se esiste finito il limite

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(x_0,y_0) \doteq \lim_{r\to 0} \frac{f(x_0+ru,y_0+rv)-f(x_0,y_0)}{r} \equiv \lim_{r\to 0} \frac{f(x_0+r\cos\vartheta,y_0+r\sin\vartheta)-f(x_0,y_0)}{r}$$

e così, considerati $\boldsymbol{e}^1 \equiv (1,0)^{\mathsf{T}}$ e $\boldsymbol{e}^2 \equiv (0,1)^{\mathsf{T}}$, è $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}^1}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

La funzione f *è differenziabile nel punto* (x_0, y_0) se esiste un funzionale lineare $L \equiv L_{f,(x_0,y_0)}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ chiamato *differenziale di f nel punto* (x_0, y_0) tale che, per $(s,t) \to 0 \coloneqq (0,0)$,

$$f(x_0+s,y_0+t) = f(x_0,y_0) + L(s,t) + o\big(\|(s,t)^{\mathsf{T}}\|_2\big)$$

[*]E-mail: mtarsia1@uninsubria.it. Pagina web: https://www.uninsubria.it/hpp/marco.tarsia.

cioè se risulta

$$\lim_{(s,t)\to 0} \frac{f(x_0+s, y_0+t) - f(x_0,y_0) - L(s,t)}{\sqrt{s^2+t^2}} = 0$$

(l'identità $\alpha(s,t) = o\big(\beta(s,t)\big)$ per $(s,t) \to (s_0,t_0)$ sta a significare infatti $\frac{\alpha(s,t)}{\beta(s,t)} \to 0$ per $(s,t) \to (s_0,t_0)$).

Se f è differenziabile nel punto (x_0,y_0), allora un funzionale L siffatto è unico e viene denotato

$$L \equiv \mathrm{d}f(x_0,y_0).$$

Inoltre nel punto (x_0,y_0) la funzione f è continua ed ammette entrambe le derivate parziali, e la matrice-vettore 1×2 associata a $\mathrm{d}f(x_0,y_0)$ rispetto alla base canonica $\{\, \boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2 \,\}$ di $\mathbb{R}^2$ coincide con $\operatorname{grad} f(x_0,y_0) \doteq \mathrm{D}f(x_0,y_0)^{\mathsf{T}}$: pertanto, la condizione di differenziabilità di f nel punto (x_0,y_0) diventa

$$\lim_{(s,t)\to 0} \frac{f(x_0+s, y_0+t) - f(x_0,y_0) - s\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - t\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\sqrt{s^2+t^2}} = 0.$$

Sempre se f è differenziabile nel punto (x_0,y_0), allora f ammette ogni derivata direzionale in (x_0,y_0) e più precisamente, per ogni versore $\boldsymbol{v} \equiv (u,v)^{\mathsf{T}} \equiv (\cos\vartheta, \sin\vartheta)^{\mathsf{T}}$ di $\mathbb{R}^2$, dove $\vartheta \in [0,2\pi[$,

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(x_0,y_0) = \mathrm{D}f(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{v} = u\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + v\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \equiv \cos\vartheta\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \sin\vartheta\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Se Ω è aperto in $\mathbb{R}^2$, allora: f è *continua su* Ω se f è continua in ogni punto (x_0,y_0) di Ω; f *ammette derivate parziali su* Ω se f ammette le due derivate parziali in ogni punto (x_0,y_0) di Ω; f è *differenziabile su* Ω se f è differenziabile in ogni punto (x_0,y_0) di Ω.

Se f ammette derivate parziali su tutto un intorno aperto $A \subseteq \Omega$ del punto (x_0,y_0) e se queste sono continue in (x_0,y_0), allora f è differenziabile in (x_0,y_0) stesso (teorema del differenziale totale).

Se ancora f ammette derivate parziali su un intorno aperto $A \subseteq \Omega$ di (x_0,y_0) e se queste ammettono a loro volta derivate parziali su tutto un intorno aperto $U \subseteq A$ di (x_0,y_0), allora vengono ivi denotate

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \doteq \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \doteq \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \doteq \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \doteq \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big).$$

Se poi $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sono continue in (x_0,y_0), allora esse coincidono in (x_0,y_0) (teorema di Schwartz):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0).$$

Più in generale, dato $k \in \mathbb{N}$, f può ammettere le derivate parziali in (x_0,y_0) fino all'ordine k ed in tale situazione, se Ω è aperto in $\mathbb{R}^2$ e se su tutto Ω la funzione f è continua ed è derivabile con continuità fino all'ordine k, allora f *è di classe* $C^k \equiv C^k(\Omega;\mathbb{R})$ ed inoltre vien posto $C^\infty \equiv C^\infty(\Omega;\mathbb{R}) \doteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\Omega;\mathbb{R})$.

Per funzioni aventi più di due variabili reali e a valori reali, o quindi a valori vettoriali, tutto questo può esser generalizzato nel modo naturale e ben noto.

Calcolo differenziale per funzioni di più variabili

Esercizi con Svolgimento

Esercizio 1. Trovare una funzione scalare definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ma non continua in alcun punto.

Svolgimento. Basta considerare la seguente estensione della funzione di Dirichlet: per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}^2}(x,y) \equiv \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \text{ e } y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \text{ o } y \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

□

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{\, 0 \,\} \to \mathbb{R}$ *omogenea di grado zero* nel senso che, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\, 0 \,\}$ e per ogni $\lambda \in \,]0, +\infty[$,

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y).$$

Dimostrare che, se f non è costante, allora non può esistere il limite di $f(x, y)$ per $(x, y) \to 0$.

Svolgimento. Supponiamo che esista il limite di $f(x, y)$ per $(x, y) \to 0$. Allora, per ogni $\lambda \in \,]0, +\infty[$ ed ogni $\vartheta \in [0, 2\pi[$, è $f(\rho \cos\vartheta, \rho \sin\vartheta) = f(\lambda \cos\vartheta, \lambda \sin\vartheta)$ per ogni $\rho \in \,]0, +\infty[$ grazie all'ipotesi e quindi

$$\lim_{(x,y)\to 0} f(x, y) = \lim_{\rho \downarrow 0} f(\rho \cos\vartheta, \rho \sin\vartheta) = f(\lambda \cos\vartheta, \lambda \sin\vartheta)$$

da cui necessariamente f dev'esser costante su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{\, 0 \,\}$. □

Esercizio 3. Mostrare che, per funzioni scalari di due variabli reali che siano sufficientemente lisce, sussiste l'ortogonalità del proprio gradiente rispetto alle proprie curve di livello regolari.

Svolgimento. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto non vuoto e sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione che ammette derivate parziali su Ω. Sia $c \in \mathbb{R}$ e supponiamo che la curva di livello c di f coincida col sostegno di una curva regolare $\varphi \in C^1(]a, b[; \mathbb{R}^2)$ (per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$): in simboli, $\varphi'(t) \neq 0$ per ogni $t \in \,]a, b[$ e

$$\varphi(]a, b[) = f^{-1}(c) \equiv \{\, (x, y) \in \Omega \mid f(x, y) = c \,\}\,.$$

Allora $(f \circ \varphi)\big|_{]a,b[} \in C^1(]a, b[; \mathbb{R})$ in quanto anzi vale identicamente c e così, per ogni $t \in \,]a, b[$,

$$0 = \frac{d}{dt} f(\varphi(t)) \equiv \mathrm{D}f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

ovvero appunto $\mathrm{D}f(\varphi(t))$ e $\varphi'(t)$ sono ortogonali in $\mathbb{R}^2$. □

Esercizio 4. Sia $g \in C^1(]0, +\infty[; \mathbb{R})$ e sia $f \equiv f_g\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{\, 0 \,\} \to \mathbb{R}$ la funzione radiale corrispondente definita ponendo, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\, 0 \,\}$,

$$f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}\,).$$

Dimostrare che:

(1) f è di classe C^1 e, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\, 0 \,\}$,

$$\mathrm{D}f(x, y) = \frac{g'(\sqrt{x^2 + y^2}\,)}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x, y)^{\mathsf{T}};$$

(2) se $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, allora $\mathrm{D}f(x, y) = -\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} (x, y)^{\mathsf{T}}$;

(3) se $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$, allora $\mathrm{D}f(x, y) = \frac{2}{x^2+y^2} (x, y)^{\mathsf{T}}$.

Svolgimento. **(1)** Se $h\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{\, 0 \,\} \to \,]0, +\infty[$ è la funzione definita ponendo, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\, 0 \,\}$, $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, allora h è di classe C^1, tale che $f = g \circ h$ ed inoltre, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\, 0 \,\}$,

$$\mathrm{D}h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x, y)^{\mathsf{T}}.$$

(2) Se in particolare, per ogni $\rho > 0$, $g(\rho) = \frac{1}{\rho}$, allora $g'(\rho) = -\frac{1}{\rho^2}$.
(3) Se in particolare, per ogni $\rho > 0$, $g(\rho) = \log \rho^2 \equiv 2 \log \rho$, allora $g'(\rho) = \frac{2}{\rho}$. □

Esercizio 5. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione di classe C^∞ definita ponendo, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = 1 + e^x \sin y.$$

Per ogni $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, scrivere:

(1) il gradiente di f in (x_0,y_0);

(2) la derivata in direzione $\boldsymbol{v} \equiv (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})^\mathsf{T}$ in (x_0,y_0) e, quindi, particolarizzarla per $(x_0,y_0) = (1,\pi)$;

(3) l'equazione del *piano tangente alla superficie grafico* di $z = f(x,y)$ nel punto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0)) \in \mathbb{R}^3$ e, quindi, particolarizzarla per $(x_0,y_0) = (1,\pi)$.

Svolgimento. **(1)** $\mathrm{D}f(x_0,y_0) = e^{x_0}(\sin y_0, \cos y_0)^\mathsf{T}$.
(2) $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(x_0,y_0) = \mathrm{D}f(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{v} = \frac{3}{5}e^{x_0}\sin y_0 + \frac{4}{5}e^{x_0}\cos y_0$ e, quindi, $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(1,\pi) = -\frac{4}{5}e$.
(3) $z = f(x_0,y_0) + \mathrm{D}f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0)^\mathsf{T} = 1 + e^{x_0}\sin y_0 + e^{x_0}\sin y_0\,(x-x_0) + e^{x_0}\cos y_0\,(y-y_0)$ e quindi, per $(x_0,y_0) = (1,\pi)$, $z = 1 + e(\pi - y)$. □

Esercizio 6. **(a)** Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right)^2, & \text{se } (x,y) \neq 0,\\ 0, & \text{se } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Verificare che f non è continua nell'origine ma che vi ammette ogni derivata direzionale.

(b) Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq 0,\\ 0, & \text{se } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Verificare che nell'origine f è continua ed ammette ogni derivata direzionale ma che, per ogni versore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\, \boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2 \,\}$, risulta $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(0,0) \neq \mathrm{D}f(0,0)\cdot\boldsymbol{v}$.

Svolgimento. **(a)** La f non è continua nell'origine ad esempio perché, per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{\,0\,\}$, $f(x,x^2) \equiv \frac{1}{4}$, ma vi ammette ogni derivata direzionale perché, per ogni versore $\boldsymbol{v} \equiv (u,v)^\mathsf{T}$ di $\mathbb{R}^2$ e per ogni $r \in \mathbb{R}\setminus\{\,0\,\}$,

$$\frac{f(ru,rv)}{r} = \frac{ru^4v^2}{(r^2u^4+v^2)^2} \to 0 \equiv \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(0,0) \quad \text{per } r \to 0.$$

(b) La f è continua nell'origine ad esempio perché, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $x \neq 0$ e $y \neq 0$,

$$|f(x,y)| \leq \frac{x^2|y|}{|xy|} = |x| \to 0 \quad \text{per } (x,y) \to 0$$

e vi ammette ogni derivata direzionale perché, per ogni versore $\boldsymbol{v} \equiv (u,v)^\mathsf{T}$ di $\mathbb{R}^2$ e per ogni $r \in \mathbb{R}\setminus\{\,0\,\}$,

$$\frac{f(ru,rv)}{r} \equiv u^2 v \equiv \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(0,0)$$

ma quindi, in particolare, $\mathrm{D}f(0,0) = 0$. □

Esercizio 7. **(a)** Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia $u_0 \in C^1(\mathbb{R}_x;\mathbb{R})$. Dimostrare che esiste una ed una sola funzione $u \equiv u_{c,u_0} \in C^1(\mathbb{R}^2_{(t,x)};\mathbb{R})$ con $u(0,\cdot) = u_0(\cdot)$ che sia soluzione dell'*equazione del trasporto*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2,$$

e che precisamente, per ogni $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, $u(t,x) = u_0(x - ct)$.

(b) Sia $u\colon \mathbb{R}^2_{(x,y)} \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$u(x, y) = e^x \sin y + \cos x \sinh y + 1.$$

Verificare che u è una *funzione armonica* nel senso che u è di classe C^2 e soddisfa l'*equazione di Laplace*

$$\Delta u(x, y) \doteq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(c) Sia $u\colon]0, +\infty[_t \times \mathbb{R}_x \to \mathbb{R}$ il *nucleo di Green* definito ponendo, per ogni $(t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$,

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4t}\Big).$$

Dimostrare che u verifica l'*equazione del calore* (o *di Fourier*)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}.$$

(d) Siano $c \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in C^2(\mathbb{R}_x; \mathbb{R})$ e sia $u \equiv u_{c,\alpha,\beta} \in C^2(\mathbb{R}^2_{(t,x)}; \mathbb{R})$ definita ponendo, per ogni $(t, x) \in \mathbb{R}^2$,

$$u(t, x) = \alpha(x - ct) + \beta(x + ct).$$

Dimostrare che u verifica l'*equazione delle onde* (o *di D'Alembert*)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Svolgimento. **(a)** Sia $u \equiv u_{c,u_0}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, $u(t, x) = u_0(x - ct)$. Allora chiaramente u è di classe C^1 con $u(0, \cdot\,) = u_0(\,\cdot\,)$ e tale che, per ogni $(t, x) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = -cu_0'(x - ct) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = u_0'(x - ct). \end{cases}$$

Viceversa, sia $u \equiv u_{c,u_0} \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ una soluzione del sistema differenziale del prim'ordine

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Di conseguenza, considerato il versore $\boldsymbol{v} := \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}(1, c)^\mathsf{T}$ di $\mathbb{R}^2$ abbiamo che, per ogni $(t, x) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{v}}(t, x) = \mathrm{D}u(t, x) \cdot \frac{(1, c)^\mathsf{T}}{\sqrt{1 + c^2}} = 0$$

o equivalentemente, per ogni $q \in \mathbb{R}$, la funzione u è costante su tutta la retta $\{\, (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x = ct + q \,\}$ e cioè esiste una funzione $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, $u(t, x) = v(x - ct)$. A questo punto u è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ se e solo se v è di classe C^1 su $\mathbb{R}$ ed infine, necessariamente, $v = u_0$.

(b) Basta dimostrare che le due funzioni $u_1, u_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ definite ponendo, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$u_1(x, y) = e^x \sin y \quad \text{e} \quad u_2(x, y) = \cos x \sinh y$$

soddisfino separatamente l'equazione di Laplace. Ma infatti $\mathrm{D}u_1(x, y) = e^x(\sin y, \cos y)^\mathsf{T}$ e quindi

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(x, y) = e^x \sin y \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}(x, y) = -e^x \sin y \end{cases}$$

così come $\mathrm{D}u_2(x,y) = (-\sin x \sinh y, \cos x \cosh y)^\mathsf{T}$ e quindi

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(x,y) = -\cos x \sinh y \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}(x,y) = \cos x \sinh y. \end{cases}$$

(c) Per ogni $(t,x) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}$, $\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = -\frac{x}{2t}u(t,x)$ e quindi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \left[\frac{x^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right]u(t,x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x).$$

(d) Per ogni $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{D}u(t,x) = \big(c[-\alpha'(x-ct) + \beta'(x+ct)], \alpha'(x-ct) + \beta'(x+ct)\big)^\mathsf{T}$ e quindi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2[\alpha''(x-ct) + \beta''(x+ct)] = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x). \qquad \square$$

Esercizio 8. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 + xy - xy^2}{|x| + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{se } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Verificare che f è continua su $\mathbb{R}^2$.

Svolgimento. La funzione f è ben definita ed inoltre è continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{ 0 \}$, dunque la tesi è che f sia continua nell'origine. Dimostriamo dunque che, per ogni $\vartheta \in [0, 2\pi[$,

$$\lim_{\rho \downarrow 0} f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) = 0.$$

Visto che $f(0,\cdot)\big|_{\mathbb{R}} \equiv 0$, possiamo supporre $\vartheta \notin \{ \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \}$ e così

$$\begin{aligned} f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) &= \frac{\rho\cos\vartheta\big[\rho^2\cos^3\vartheta + \sin\vartheta(1-\rho\sin\vartheta)\big]}{|\cos\vartheta| + \rho\sin^2\vartheta} \\ &= \frac{\rho\big[\rho^2\cos^3\vartheta + \sin\vartheta(1-\rho\sin\vartheta)\big]}{\operatorname{sgn}(\cos\vartheta) + \rho\sin^2\vartheta/\cos\vartheta} \to 0 \quad \text{per } \rho \downarrow 0. \end{aligned} \qquad \square$$

Esercizio 9. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(1-\cos\sqrt[3]{xy})\log(1+|xy|)}{x^2+xy+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{se } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Verificare che nell'origine f è continua, ammette derivate parziali ed è differenziabile.

Svolgimento. Osserviamo anzitutto che $f \geq 0$ su tutto $\mathbb{R}^2$ e che, per $(x,y) \to 0$,

$$\begin{aligned} (1-\cos\sqrt[3]{xy})\log(1+|xy|) &= \Big(\frac{1}{2}(xy)^{\frac{2}{3}} + o(xy)\Big)\big(|xy| + o(xy)\big) \\ &= \frac{1}{2}(xy)^{\frac{2}{3}}|xy| + o\big((xy)^{\frac{5}{3}}\big). \end{aligned}$$

Quindi f è continua in 0 poiché, sempre per $(x,y) \to 0$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x,y) \\ &\leq \frac{(xy)^{\frac{2}{3}}|xy| + o\big((xy)^{\frac{5}{3}}\big)}{xy} \\ &= (xy)^{\frac{2}{3}}\operatorname{sgn}(xy) + o\big((xy)^{\frac{2}{3}}\big) \\ &\leq (xy)^{\frac{2}{3}} + o\big((xy)^{\frac{2}{3}}\big) \to 0 \quad \text{per } (x,y) \to 0. \end{aligned}$$

La derivabilità parziale di f in 0 risulta immediata dal fatto che $f(\,\cdot\,,0)\big|_{\mathbb{R}} = f(0,\cdot\,)\big|_{\mathbb{R}} \equiv 0$ da cui

$$\mathrm{D}f(0,0) = 0$$

e pertanto la differenziabilità di f in 0 si riduce a dimostrare che

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Con questo scopo basta scrivere che, per ogni $(x,y) = (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)$ dove $\rho \downarrow 0$ e $\vartheta \in [0,2\pi[$,

$$\begin{aligned} 0 &\le \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\le \frac{(xy)^{\frac{2}{3}} + o\big((xy)^{\frac{2}{3}}\big)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{\rho^{\frac{4}{3}}(\cos\vartheta\sin\vartheta)^{\frac{2}{3}} + o\big(\rho^{\frac{4}{3}}\big)}{\rho} \\ &= \rho^{\frac{1}{3}}(\cos\vartheta\sin\vartheta)^{\frac{2}{3}} + o\big(\rho^{\frac{1}{3}}\big) \to 0 \quad \text{per } \rho\downarrow 0. \end{aligned}$$

In alternativa, senza passare alle coordinate polari,

$$0 \le \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{(xy)^{\frac{2}{3}} + o\big((xy)^{\frac{2}{3}}\big)}{\sqrt{|xy|}} = |xy|^{\frac{1}{6}} + o\big(|xy|^{\frac{1}{6}}\big) \to 0 \quad \text{per } (x,y)\to 0.$$ □

Esercizio 10. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo, per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\exp\left((x+y)^2\right)}{x+y^2}, & \text{se } x \neq -y^2, \\ 0, & \text{se } x = -y^2. \end{cases}$$

Verificare che f non è continua nell'origine (nonostante vi ammetta le due derivate parziali).

Svolgimento. Per ogni $\rho\downarrow 0$ e $\vartheta \in [0,2\pi[$ tali che $\cos\vartheta + \rho\sin^2\vartheta \neq 0$,

$$\begin{aligned} f(\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta) &= \frac{1-\exp\big(\rho^2(1+2\cos\vartheta\sin\vartheta)\big)}{\rho(\cos\vartheta+\rho\sin^2\vartheta)} \\ &= \frac{-\rho(1+2\cos\vartheta\sin\vartheta)+o(\rho)}{\cos\vartheta+\rho\sin^2\vartheta} \end{aligned}$$

e così, se $\vartheta \in \left\{\, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \,\right\}$, allora $f(0,\rho\sin\vartheta) = -\frac{1}{\sin^2\vartheta} + o(1) = -1 + o(1) \to -1 \neq 0$ per $\rho\downarrow 0$.

Osserviamo in effetti che, procedendo in modo equivalente ma più diretto,

$$f(0,y) = \frac{1-e^{y^2}}{y^2} \xrightarrow[y\to 0]{} -1.$$ □

Esercizio 11. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo, per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x-y}\exp\left(-\left|\frac{x}{x-y}\right|\right), & \text{se } x \neq y, \\ 0, & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Verificare che nell'origine f è continua ed ammette derivate parziali, ma che non è differenziabile.

Svolgimento. La continuità di f in 0 è immediata in quanto, per ogni $\rho \downarrow 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi[\setminus \{ \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \}$,

$$f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) = \rho \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta}{\cos \vartheta - \sin \vartheta} \exp\left(-\left|\frac{\cos \vartheta}{\cos \vartheta - \sin \vartheta}\right|\right) \xrightarrow[\rho\downarrow 0]{} 0$$

e pure la derivabilità di f in 0, visto che $f(\,\cdot\,, 0)\big|_{\mathbb{R}} = f(0, \cdot\,)\big|_{\mathbb{R}} \equiv 0$, da cui

$$\mathrm{D}f(0,0) = 0.$$

A riguardo infine della differenziabilità di f in 0, tuttavia, per ogni $\rho \downarrow 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi[\setminus \{ \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \}$,

$$\frac{1}{\rho} f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \equiv \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta}{\cos \vartheta - \sin \vartheta} \exp\left(-\left|\frac{\cos \vartheta}{\cos \vartheta - \sin \vartheta}\right|\right)$$

il quale è $\neq 0$ in generale. □

Esercizio 12. Sia $g \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ e sia $f \equiv f_g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x^2 - \sin y^2}{x-y}, & \text{se } x \neq y, \\ g(x), & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Dimostrare che:

(1) f è continua nell'origine se e solo se $g(0) = 0$;

(2) f è continua su $\mathbb{R}^2$ se e solo se $g(x) = 2x \cos x^2$, $x \in \mathbb{R}$;

(3) f ammette derivate parziali nell'origine, ma in generale non è ivi differenziabile.

Svolgimento. **(1)** Basta calcolare che, per ogni $(x, y) \to 0$ con $x \neq y$,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{\big(x^2 + o(x^2)\big) - \big(y^2 + o(y^2)\big)}{x - y} \\ &= x + y + \frac{o(x^2) + o(y^2)}{x-y} \to 0 \quad \text{per } (x,y) \to 0. \end{aligned}$$

(2) Fissati $h \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ e $a \in \mathbb{R}$, e per ogni $(x, y) \to 0$ con $x \neq y$,

$$\begin{aligned} \frac{h(a+x) - h(a+y)}{(a+x) - (a+y)} &= \frac{h'(a+y)(x-y) + o(|x-y|)}{x-y} \\ &= h'(a+y) + \frac{o(|x-y|)}{x-y} \to h'(a) \quad \text{per } (x,y) \to 0 \end{aligned}$$

e così, per ogni $a \in \mathbb{R}$, $f(a+x, a+y) \to g(a)$ per $(x, y) \to 0$ se e solo se $g(a) = h'(a)$ dove $h(a) \coloneqq \sin a^2$.
(3) Per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$, $f(x, 0) = \frac{\sin x^2}{x}$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \equiv \frac{d}{dx} f(x,0)\big|_{x=0} = 1$. Analogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$ e tuttavia, pur supponendo che $g(0) = 0$, non esiste in generale il $\lim_{(x,y)\to 0} \frac{f(x,y)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Infatti, per ogni $(x, y) \to 0$ con $x \neq y$,

$$\frac{f(x,y) - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{o(x^2) + o(y^2)}{(x-y)\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \quad \text{per } (x,y) \to 0$$

mentre invece non è affatto detto che $\frac{g(x)-2x}{\sqrt{2x^2}} \to 0$, cioè che $g(x)/|x| - 2\,\mathrm{sgn}(x) \to 0$, per $x \to 0$. □

Esercizio 13. Sia $\alpha \in]0, +\infty[$ e sia $f_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{\exp(|xy|^\alpha)-1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{se } (x, y) = 0. \end{cases}$$

Discutere continuità, derivabilità e differenziabilità di f_α nell'origine al variare di α.

Svolgimento. Per ogni $\rho \downarrow 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi[$,

$$f_\alpha(\rho \cos\vartheta, \rho \sin\vartheta) = \rho^{2\alpha-1} |\cos\vartheta \sin\vartheta|^\alpha + o(\rho^{2\alpha-1})$$

tende allo zero per $\rho \downarrow 0$ se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$, ovvero f_α è continua nell'origine se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.

La derivabilità di f_α in 0 sussiste invece per ogni α, visto che $f_\alpha(\,\cdot\,, 0)\big|_{\mathbb{R}} = f_\alpha(0, \cdot\,)\big|_{\mathbb{R}} \equiv 0$ e quindi $\mathrm{D}f_\alpha(0, 0) = 0$. Infine, di nuovo per ogni $\rho \downarrow 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi[$,

$$\frac{1}{\rho}\, f_\alpha(\rho \cos\vartheta, \rho \sin\vartheta) = \rho^{2(\alpha-1)} |\cos\vartheta \sin\vartheta|^\alpha + o(\rho^{2(\alpha-1)})$$

ed allora f_α è differenziabile nell'origine se e solo se $\alpha > 1$. □

Massimi relativi, minimi relativi e punti stazionari

Richiami di Teoria

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ non vuoto, sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ e sia $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$. Il punto (x_0, y_0) è di *massimo relativo* per f se esiste un intorno $U \subseteq \mathbb{R}^2$ di (x_0, y_0) tale che, per ogni $(x, y) \in U \cap \Omega$, risulti $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$.

Analogamente (x_0, y_0) è un punto di *minimo relativo* per f se esiste un intorno $V \subseteq \mathbb{R}^2$ di (x_0, y_0) tale che, per ogni $(x, y) \in V \cap \Omega$, risulti $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$.

Supponiamo che $(x_0, y_0) \in \operatorname{int}\Omega$ e che f sia differenziabile in (x_0, y_0). Se (x_0, y_0) è un punto di massimo o di minimo relativo per f, allora è un *punto stazionario* o *critico* per f (teorema di Fermat):

$$\mathrm{D}f(x_0, y_0) = 0.$$

Supponiamo anzi che Ω sia aperto in $\mathbb{R}^2$ e che f sia di classe $C^2 \equiv C^2(\Omega; \mathbb{R})$. Per ogni $(x, y) \in \Omega$, la *matrice hessiana di f in (x, y)* è la matrice $\mathrm{D}^2 f(x, y)$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ data da

$$\mathrm{D}^2 f(x, y) \equiv \mathrm{H}_f(x, y) \doteq \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$$

dove in verità $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (teorema di Schwartz). In particolare, per ogni $(x, y) \in \Omega$, $\mathrm{D}^2 f(x, y)$ è una matrice quadrata reale e simmetrica e di conseguenza i suoi due autovalori sono reali.

Osserviamo a margine che dunque $\mathrm{D}^2 f(x, y) = \mathrm{J}_{\mathrm{D}f}(x, y)^\mathsf{T} \equiv \mathrm{J}_{\mathrm{D}f}(x, y)$ se $\mathrm{J}_{\mathrm{D}f}(x, y)$ denota la *matrice jacobiana* di $\mathrm{D}f$ in (x, y), identificando $\mathrm{D}f(\,\cdot\,, \cdot\,)$ con la mappa $\Omega \to \mathbb{R}^2$ tale che $(u, v) \mapsto \mathrm{D}f(u, v)$.

Se (x_0, y_0) è un punto stazionario per f, allora valgono a proposito le due seguenti proposizioni.

- Se (x_0, y_0) è un punto di massimo risp. minimo relativo per f, allora la matrice $\mathrm{D}^2 f(x_0, y_0)$ è semi-definita negativa risp. positiva (i suoi due autovalori sono non positivi risp. non negativi).

- Se la matrice $\mathrm{D}^2 f(x_0, y_0)$ è definita negativa risp. positiva (i suoi due autovalori sono negativi risp. positivi), allora (x_0, y_0) è un punto di massimo risp. minimo relativo per f.

Se infine la matrice $\mathrm{D}^2 f(x_0, y_0)$ è indefinita (i suoi due autovalori sono non nulli e discordi), allora (x_0, y_0) è un *punto di sella* per f. Riassumendo, se $\lambda_- \le \lambda_+$ sono i due autovalori di $\mathrm{D}^2 f(x_0, y_0)$, ossia

$$\det\left(\mathrm{D}^2 f(x_0, y_0) - \lambda I_2\right) \equiv \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} \mathrm{D}^2 f(x_0, y_0) + \det \mathrm{D}^2 f(x_0, y_0) = (\lambda - \lambda_-)(\lambda - \lambda_+), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

allora è possibile ricondurre il tutto al segno di $\det \mathrm{D}^2 f(x_0, y_0)$ e di $\operatorname{tr} \mathrm{D}^2 f(x_0, y_0)$, perché appunto

$$\begin{cases} \det \mathrm{D}^2 f(x_0, y_0) = \lambda_- \cdot \lambda_+ \\ \operatorname{tr} \mathrm{D}^2 f(x_0, y_0) = \lambda_- + \lambda_+ . \end{cases}$$

Per funzioni scalari aventi più di due variabili reali tutto questo può esser generalizzato nel modo naturale e ben noto. Per lo studio del segno degli autovalori della matrice hessiana, senz'altro più laborioso, conviene tener presente il seguente corollario della regola di Cartesio oppure, equivalentemente, il cosiddetto criterio di Sylvester enunciato subito dopo.

(Ca) Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$, sia $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ e sia p_n il corrispondente polinomio monico di grado n:

$$p_n(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda^{n-k}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Supponiamo che le n radici di p_n siano tutte reali e denotiamole $\lambda_{\min} \le \cdots \le \lambda_{\max}$. Allora:

($-$) $\lambda_{\max} < 0$ se e solo se, per ogni $k = 1, \ldots, n$, è $a_k > 0$;

($+$) $\lambda_{\min} > 0$ se e solo se, per ogni $k = 1, \ldots, n$, è $(-1)^k a_k > 0$ ($a_1 < 0$, $a_2 > 0$, $\ldots$).

(Sy) Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$, sia $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e, per ogni $k = 1, \ldots, n$, sia $A_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ la sottomatrice principale k-dimensionale di nord-ovest di A:

$$A_k = (a_{i,j})_{i,j=1}^k.$$

Supponiamo che gli n autovalori di A siano tutti reali e denotiamoli $\lambda_{\min} \le \cdots \le \lambda_{\max}$. Allora:

($-$) $\lambda_{\max} < 0$ se e solo se, per ogni $k = 1, \ldots, n$, è $(-1)^k \det A_k > 0$ ($a_{1,1} < 0$, $\det A_2 > 0$, $\ldots$);

($+$) $\lambda_{\min} > 0$ se e solo se, per ogni $k = 1, \ldots, n$, è $\det A_k > 0$.

Massimi relativi, minimi relativi e punti stazionari

Esercizi con Svolgimento

Esercizio 14. Sia $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ simmetrica e sia $f \equiv f_A \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{ 0 \} \to \mathbb{R}$ la funzione di classe C^∞ definita ponendo, per ogni $\boldsymbol{x} \equiv (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ 0 \}$,

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}^\mathsf{T} A \, \boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_2^2}.$$

Dimostrare che, per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ 0 \}$, sono equivalenti:

(a) (x_0, y_0) è un punto stazionario per f;

(b) $(x_0, y_0)^\mathsf{T}$ è un autovettore di A relativo all'autovalore $f(x_0, y_0)$.

Svolgimento. Siano a, b e c in $\mathbb{R}$ tali che $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right]$. Allora, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ 0 \}$,

$$f(x,y) = \frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \mathrm{D}f(x,y) = \frac{2}{x^2+y^2}\big((ax+by) - f(x,y)x, (bx+cy) - f(x,y)y\big)^{\mathsf{T}}.$$

Dunque, per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ 0 \}$, $\mathrm{D}f(x_0, y_0) = 0$ se e solo se

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 = f(x_0,y_0)x_0 \\ bx_0 + cy_0 = f(x_0,y_0)y_0 \end{cases}$$

o equivalentemente, in forma più compatta, $A\left[\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right] = f(x_0,y_0)\left[\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right]$. □

Esercizio 15. Siano f_1, f_2 e f_3 le funzioni di classe C^∞ definite ponendo, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f_1(x,y) = x^4 + y^4, \qquad f_2(x,y) = -(x^4 + y^4), \qquad f_3(x,y) = x^4 - y^4.$$

Per ogni $j \in \{ 1, 2, 3 \}$, determinare tutti i punti di massimo o di minimo relativo per f_j.

Svolgimento. Anzitutto abbiamo che, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{D}f_1(x,y) = 4\,(x^3, y^3)^{\mathsf{T}}, \qquad \mathrm{D}f_2(x,y) = -4\,(x^3, y^3)^{\mathsf{T}}, \qquad \mathrm{D}f_3(x,y) = 4\,(x^3, -y^3)^{\mathsf{T}}.$$

Dunque, per ogni $j \in \{ 1, 2, 3 \}$, $(0, 0)$ è il solo punto stazionario per f_j e, nonostante la matrice hessiana di f_j in $(0, 0)$ sia chiaramente la matrice nulla (quindi definita né positiva né negativa), vediamo che:

- l'origine è punto di minimo relativo per f_1, anzi assoluto, perché $f_1(\,\cdot\,,\cdot\,) \geq 0 = f_1(0,0)$;
- l'origine è punto di massimo relativo per f_2, anzi assoluto, perché $f_2(\,\cdot\,,\cdot\,) \leq 0 = f_2(0,0)$;
- l'origine è punto di sella per f_3, dunque né di massimo né di minimo relativo per f_3, perché

$$\begin{cases} f_3(x,0) = x^4 \geq 0 = f_3(0,0), & x \in \mathbb{R}, \\ f_3(0,y) = -y^4 \leq 0 = f_3(0,0), & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

□

Esercizio 16. Sia $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione di classe C^∞ definita ponendo, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = x^2 + y^3 - xy.$$

Trovare i punti stazionari per f e determinare quali siano punti di massimo o di minimo relativo per f.

Svolgimento. Un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è stazionario per f se e solo se $\mathrm{D}f(x_0, y_0) = 0$, ovvero

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 2x_0 - y_0 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 3{y_0}^2 - x_0 = 0 \end{cases}$$

da cui subito che $y_0(3y_0 - 1/2) = 0$ e che, pertanto, i punti stazionari per f sono $(0, 0)$ e $(\frac{1}{12}, \frac{1}{6})$.

Calcolato a questo punto che, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la matrice hessiana di f in (x, y) è

$$\mathrm{D}^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6y \end{bmatrix}$$

scopriamo in particolare che $\mathrm{D}^2 f(0,0) = \left[\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ e che $\mathrm{D}^2 f(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}) = \left[\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. In conclusione:

- il punto $(0,0)$ è né di massimo né di minimo relativo per f, in quanto piuttosto punto di sella per f:
$$\det \mathrm{D}^2 f(0,0) = -1 < 0$$
(in effetti, per ogni $y \in \mathbb{R}$, $f(0,y) = y^3$);
- il punto $(\frac{1}{12}, \frac{1}{6})$ è invece di minimo relativo per f (ma non assoluto), semplicemente perché
$$\begin{cases} \det \mathrm{D}^2 f(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}) = 1 > 0 \\ \operatorname{tr} \mathrm{D}^2 f(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}) = 3 > 0. \end{cases}$$
Esplicitamente, infatti, il polinomio caratteristico di $\mathrm{D}^2 f(\frac{1}{12}, \frac{1}{6})$ nella variabile $\lambda \in \mathbb{R}$ è
$$\det\left(\mathrm{D}^2 f(\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{6}) - \lambda I_2\right) \equiv \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - \operatorname{tr} \mathrm{D}^2 f(\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{6})\,\lambda + \det \mathrm{D}^2 f(\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{6}) = \lambda^2 - 3\lambda + 1$$
il quale dunque ha radici positive $\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)$ (i due autovalori di $\mathrm{D}^2 f(\frac{1}{12}, \frac{1}{6})$). □

Esercizio 17. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione di classe C^∞ definita ponendo, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$f(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4.$$
Mostrare che non esistono punti di massimo o di minimo relativo per f.

Svolgimento. Un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è stazionario per f se e solo se
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = x_0({x_0}^2 - 3{y_0}^2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = y_0({y_0}^2 - 3{x_0}^2) = 0 \end{cases}$$
per cui esiste uno ed un solo punto stazionario per f ed è $(0,0)$. Adesso, la matrice hessiana di f in $(0,0)$ coincide con la matrice nulla, però dal fatto che ad esempio, per ogni $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} f(x,0) = x^4 \geq 0 = f(0,0) \\ f(x,x) = -4x^4 \leq 0 = f(0,0) \end{cases}$$
deduciamo comunque che l'origine è un punto di sella per f, e ciò conclude. □

Esercizio 18. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione di classe C^∞ definita ponendo, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$f(x,y) = x^3y - 3x^2 - y^2.$$
Individuare i punti di massimo o di minimo relativo per f.

Svolgimento. Per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, vale che
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 3{x_0}^2 y_0 - 6x_0 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = {x_0}^3 - 2y_0 = 0 \end{cases}$$
se e solo se (x_0, y_0) coincide con uno tra i punti $(0,0)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $-(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ i quali per ciò sono tutti e soli i punti stazionari per f. Adesso, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la matrice hessiana di f in (x,y) è
$$\mathrm{D}^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 6(xy-1) & 3x^2 \\ 3x^2 & -2 \end{bmatrix}$$
dunque $\mathrm{D}^2 f(0,0) = \left[\begin{smallmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right]$ mentre $\mathrm{D}^2 f(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}) = \left[\begin{smallmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -2 \end{smallmatrix}\right]$ e, in definitiva, $(0,0)$ è un punto di massimo relativo per f (ma non assoluto) mentre $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ sono entrambi punti di sella per f. □

Esercizio 19. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione di classe C^∞ definita ponendo, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = xy^2 \exp(-x^4 - y^2).$$

Studiare i punti di massimo e di minimo relativo per f.

Svolgimento. Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{D}f(x,y) = y\exp(-x^4 - y^2)\big(y(1-4x^4), 2x(1-y^2)\big)^\mathsf{T}$$

e quindi esistono infiniti punti stazionari per f: $(x_0, 0)$ al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm 1)$ e $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm 1)$.

A riguardo dei punti sulla retta $\{\, (x,0) \mid x \in \mathbb{R} \,\}$ osserviamo subito che, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) \begin{cases} < 0 & \text{se e solo se } x < 0 \\ = 0 & \text{se e solo se } x = 0 \text{ oppure } y = 0 \\ > 0 & \text{se e solo se } x > 0 \end{cases}$$

e di conseguenza:

- per ogni $x_0 < 0$, $(x_0, 0)$ è di massimo relativo per f (non assoluto);
- per ogni $x_0 > 0$, $(x_0, 0)$ è di minimo relativo per f (non assoluto);
- $(0,0)$ è né di massimo né di minimo relativo per f (né di sella).

A riguardo degli altri quattro punti stazionari per f abbiamo che, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{D}^2 f(x,y) = 2\exp(-x^4 - y^2) \begin{bmatrix} 2x^3y^2(4x^4 - 5) & y(1-4x^4)(1-y^2) \\ y(1-4x^4)(1-y^2) & x(1 - 5y^2 + 2y^4) \end{bmatrix}$$

e così, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{D}^2 f(x_0, \pm 1) = 2\exp(-x_0^4 - 1)\left[\begin{smallmatrix} 2x_0^3(4x_0^4 - 5) & 0 \\ 0 & -2x_0 \end{smallmatrix}\right]$ da cui in conclusione $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm 1)$ sono punti di massimo relativo per f mentre $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm 1)$ sono punti di minimo relativo per f. □

Esercizio 20. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione di classe C^∞ definita ponendo, per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^2 - xy - xz.$$

Trovare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo per f.

Svolgimento. Per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\mathrm{D}f(x,y,z) = (2x - y - z, -x + 3y^2, -x + 2z)^\mathsf{T}$ e dunque tutti e soli i punti stazionari per f sono l'origine e $(\frac{4}{27}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27})$. Mentre l'origine risulta chiaramente né un punto di massimo né un punto di minimo relativo per f (ad esempio perché, per ogni $y \in \mathbb{R}$, $f(0,y,0) = y^3$), a riguardo dell'altro punto osserviamo che, per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathrm{D}^2 f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 6y & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ammette come tre sottomatrici principali di nord-ovest 2, $\left[\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6y \end{smallmatrix}\right]$ e $\mathrm{D}^2 f(x,y,z)$ stessa le quali hanno determinante rispettivamente 2, $12y - 1$ e $2(9y-1)$ e pertanto, in virtù del criterio di Sylvester prendendo $y \equiv \frac{2}{9}$, scopriamo che $(\frac{4}{27}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27})$ è un punto di minimo relativo per f (non assoluto).

Notiamo comunque che saremmo giunti alla medesima conclusione anche grazie al criterio di Cartesio una volta calcolato che, per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\det\big(\mathrm{D}^2 f(x,y,z) - \lambda I_3\big) = -\lambda^3 + 2(3y+2)\lambda^2 - 2(12y+1)\lambda + 2(9y-1).$$ □

Esercizio 21. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la funzione di classe C^∞ definita ponendo, per ogni $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$,

$$f(x, y, z, w) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2w^2 + yz - 2xw.$$

Trovare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo per f.

Svolgimento. Per ogni $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, $\mathrm{D}f(x, y, z, w) = \big(2(x-w), 4y+z, y+2z, 2(-x+2w)\big)^\mathsf{T}$ e quindi l'origine è l'unico punto stazionario per f. A questo punto, per ogni $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$,

$$\mathrm{D}^2 f(x, y, z, w) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \equiv \mathrm{D}^2 f(0, 0, 0, 0)$$

ammette come quattro sottomatrici principali di nord-ovest 2, $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ e $\mathrm{D}^2 f(x, y, z)$ stessa le quali hanno determinante rispettivamente 2, 8, 14 e 28 e pertanto, in virtù del criterio di Sylvester, l'origine è un punto di minimo relativo per f, ed anzi assoluto: in effetti, per ogni $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$,

$$f(x, y, z, w) = \big((x-w)^2 + w^2\big) + \big(z^2 + yz + 2y^2\big) \geq 0 \equiv f(0, 0, 0, 0).$$

Notiamo comunque che saremmo giunti alla medesima conclusione anche grazie al criterio di Cartesio una volta calcolato che, per ogni $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\det\big(\mathrm{D}^2 f(x, y, z, w) - \lambda I_4\big) = \lambda^4 - 12\lambda^3 + 47\lambda^2 - 66\lambda + 28. \qquad \square$$

Funzioni implicite

Richiami di Teoria

Teorema (delle funzioni implicite (o di Dini))**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto non vuoto, e sia $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ per la quale denotiamo $Z_f \doteq f^{-1}(0) \equiv \{\, (x, y) \in \Omega \mid f(x, y) = 0 \,\}$. Supponiamo che esista un punto $(x_0, y_0) \in Z_f$ tale per cui $\mathrm{D}f(x_0, y_0) \neq 0$. Allora esiste un intorno aperto di (x_0, y_0) in Z_f che coincide col sostegno di una curva regolare semplice. Più precisamente, infatti, vale quanto segue.*

(y) *Se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, allora esistono due intorni aperti I di x_0 e J di y_0 tali che, per ogni $x \in I$, esista uno ed un solo $y \equiv y(x) \in J$ tale per cui $(x, y(x)) \in Z_f$ (in particolare, $y_0 = y(x_0)$) e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \neq 0$. Inoltre tale funzione implicita $y\colon I \to J$, $x \mapsto y(x)$, è di classe C^1 e, per ogni $x \in I$,*

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))}.$$

(x) *Se $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, allora esistono due intorni aperti J di y_0 e I di x_0 tali che, per ogni $y \in J$, esista uno ed un solo $x \equiv x(y) \in I$ tale per cui $(x(y), y) \in Z_f$ (in particolare, $x_0 = x(y_0)$) e $\frac{\partial f}{\partial x}(x(y), y) \neq 0$. Inoltre tale funzione implicita $x\colon J \to I$, $y \mapsto x(y)$, è di classe C^1 e, per ogni $y \in J$,*

$$x'(y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x(y), y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x(y), y)}.$$

Infine, se esiste $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, tale per cui f sia di classe C^k su Ω, allora vale quanto segue.

(y) *Se* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, *allora tale funzione implicita* $y(\,\cdot\,)$ *è di classe* C^k *su* I *e, per ogni* $x \in I$,

$$y''(x) = -\left.\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}\right|_{(x,y)=(x,y(x))}.$$

(x) *Se* $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, *allora tale funzione implicita* $x(\,\cdot\,)$ *è di classe* C^k *su* J *e, per ogni* $y \in J$,

$$x''(y) = -\left.\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^3}\right|_{(x,y)=(x(y),y)}.$$

Per funzioni aventi più di due variabili reali e a valori reali, o quindi a valori vettoriali, tutto questo può esser generalizzato nel modo naturale e ben noto.

Funzioni implicite

Esercizi con Svolgimento

Esercizio 22. Mostrare che l'insieme degli zeri o curva di livello zero di una generica funzione scalare di due variabili reali, anche altamente regolare, potrebbe esser né una curva né una curva regolare.

Svolgimento. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto non vuoto, sia $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ e sia $(x_0, y_0) \in Z_f \equiv f^{-1}(0)$. L'idea è che in generale senza la condizione $\mathrm{D}f(x_0, y_0) \neq 0$ non sussista per f la tesi del teorema di Dini. Supponiamo infatti, ad esempio, che esistano due intorni aperti I di x_0 e J di y_0 tali che esista una funzione $y(\,\cdot\,) \in C^1(I; J)$ con $y(x_0) = y_0$ e tale che, per ogni $x \in I$, $(x, y(x)) \in Z_f$. Allora chiaramente $f(\,\cdot\,, y(\,\cdot\,))\big|_I \equiv 0$ e così, per ogni $x \in I$,

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x)) = \mathrm{D}f(x, y(x)) \cdot (1, y'(x))^{\mathsf{T}} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) y'(x)$$

ovvero $y'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))$ e quindi, se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, allora $y(\,\cdot\,)$ potrebbe non esistere.

Proponiamo a proposito i seguenti controesempi al teorema, per i quali addirittura $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$.

- $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ ha $Z_f = \emptyset$.
- $f(x, y) = x^2 + y^2$ ha $Z_f = \{\, 0 \,\}$.
- $f(x, y) = x^2 - y^2$ ha $Z_f = \left\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = \pm x \,\right\}$.
- $f(x, y) = x^3 - y^2$ ha $Z_f = \left\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0,\, y = \pm x^{3/2} \,\right\}$. □

Esercizio 23. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione di classe C^∞ definita ponendo, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = xe^y - y.$$

Verificare che l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione scalare $y(\,\cdot\,)$ di classe C^∞ su un intorno aperto di $x_0 \equiv 0$ il cui sviluppo di Taylor al terz'ordine in 0 è, per $x \to 0$,

$$y(x) = x + x^2 + \frac{3}{2}x^3 + o(x^3).$$

Svolgimento. Anzitutto vediamo che $f(0,0)=0$ e che, per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{D}f(x,y)=(e^y, xe^y-1)^{\mathsf{T}} \quad \text{e} \quad \mathrm{D}^2 f(x,y)=\begin{bmatrix} 0 & e^y \\ e^y & xe^y \end{bmatrix}.$$

In particolare $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1\neq 0$ e così, in virtù del teorema di Dini, esistono due intorni aperti I e J dello zero tali che esista una funzione $y(\,\cdot\,)\in C^\infty(I;J)$ con $y(0)=0$ e tale che, per ogni $x\in I$, $f(x,y(x))=0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\neq 0$. Inoltre conosciamo le espressioni delle derivate $y'(\,\cdot\,)$ e $y''(\,\cdot\,)$ su I, in particolare nello zero, e pertanto lo sviluppo di Taylor al terz'ordine di $y(\,\cdot\,)$ in 0 è, per $x\to 0$,

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2}x^2+\frac{y'''(0)}{6}x^3+o(x^3)=x+x^2+\frac{y'''(0)}{6}x^3+o(x^3).$$

Non resta quindi che calcolare $y'''(x)\big|_{x=0}$. Con questo scopo, consideriamo la seguente proposizione.

► Sia $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ un aperto non vuoto, sia $f\in C^3(\Omega;\mathbb{R})$ e sia $(x_0,y_0)\in\Omega$ con $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. Supponiamo che, per ogni $(x,y)\in\Omega$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=0$, e che $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0,y_0)=0$. Siano quindi I un intorno aperto di x_0 e J un intorno aperto di y_0 tali che esista $y(\,\cdot\,)\in C^3(I;J)$ con $y(x_0)=y_0$ e tale che, per ogni $x\in I$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\neq 0$ e $y'(x)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))}$. Allora, per ogni $x\in I$,

$$y''(x)=\left.\frac{2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}\right|_{(x,y)=(x,y(x))} \quad \text{e} \quad y'''(x_0)=-3\left.\frac{\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)}.$$

Ebbene, applicando il tutto nella nostra situazione dove in particolare abbiamo, per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y)=e^y$, otteniamo appunto che $y'''(0)=9$. □

Esercizio 24. Sia $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la funzione di classe C^∞ definita ponendo, per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y)=e^{x-y}+x^2-y^2-e(x+1)+1.$$

Verificare che l'equazione $f(x,y)=0$ definisce implicitamente una funzione scalare $y(\,\cdot\,)$ di classe C^∞ su un intorno aperto di $x_0\equiv 0$ con $y(0)=-1$ e tale che lo zero sia un punto di minimo per $y(\,\cdot\,)$ (nonostante il punto $(0,-1)$ sia neanche stazionario per f).

Svolgimento. Per cominciare vediamo che $f(0,-1)=0$ e che, per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{D}f(x,y)=(e^{x-y}+2x-e, -e^{x-y}-2y)^{\mathsf{T}} \quad \text{e} \quad \mathrm{D}^2 f(x,y)=\begin{bmatrix} e^{x-y}+2 & -e^{x-y} \\ -e^{x-y} & e^{x-y}-2 \end{bmatrix}.$$

In particolare $\frac{\partial f}{\partial y}(0,-1)=2-e\neq 0$ e così, in virtù del teorema di Dini, esistono un intorno aperto I dello zero ed un intorno aperto J di -1 tali che esista una funzione $y(\,\cdot\,)\in C^\infty(I;J)$ con $y(0)=-1$ e tale che, per ogni $x\in I$, $f(x,y(x))=0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\neq 0$. Inoltre $\frac{\partial f}{\partial x}(0,-1)=0$ e, pertanto, in primo luogo $y'(0)=0$ mentre in secondo luogo

$$y''(0)=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,-1)}=-\frac{2+e}{2-e}>0. \qquad \square$$

Esercizio 25. Sia $c\in\mathbb{R}$ e sia $f_c\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la funzione di classe C^∞ data da, per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f_c(x,y)=x^3+y^3-3xy-c.$$

Dimostrare che, per ogni $c\notin\{\,-1,0\,\}$, l'equazione $f_c(x,y)=0$ definisce implicitamente una funzione scalare di classe C^∞ della variabile x oppure della variabile y.

Svolgimento. Grazie al teorema di Dini ci basta dimostrare che, per ogni $c \in \mathbb{R} \setminus \{ -1, 0 \}$ e per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, se $f_c(x_0, y_0) = 0$ allora $\mathrm{D}f_c(x_0, y_0) \neq 0$. Ma infatti, per ogni $c \in \mathbb{R}$ ed ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{D}f_c(x_0, y_0) = 0$ se e solo se

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 3({x_0}^2 - y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 3({y_0}^2 - x_0) = 0 \end{cases}$$

o cioè $(x_0, y_0) = (0, 0)$ oppure $(x_0, y_0) = (1, 1)$, punti in corrispondenza dei quali rispettivamente $f_c(0, 0) = -c$ e $f_c(1, 1) = -(c + 1)$. In conclusione appunto, per ogni $c \notin \{ -1, 0 \}$ e per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, o $f_c(x_0, y_0) = 0$ o $\mathrm{D}f_c(x_0, y_0) = 0$ (se uno dei due è nullo, l'altro non lo è). □

Esercizio 26. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione di classe C^∞ definita ponendo, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \left(y - x^2\right)^2 - x^5.$$

Dimostrare che, per tutti e soli gli $x_0 \in \,]0, +\infty[$, l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione scalare $y(\,\cdot\,)$ di classe C^∞ su un intorno aperto di x_0.

Svolgimento. Chiaramente $Z_f \equiv f^{-1}(0) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0,\ y = x^2 \pm x^{5/2} \right\}$ e dunque $Z_f \setminus \{ 0 \}$ è sostegno di una curva C^∞ semplice. In effetti, volendo applicare anche il teorema di Dini vediamo che, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{D}f(x, y) = \left(- x[4(y - x^2) + 5x^3], 2(y - x^2) \right)^{\mathsf{T}}$$

e così, per ogni $(x, y) \in Z_f$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ se e solo se $x = 0$ (e $y = 0$). □

Esercizio 27. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione di classe C^∞ definita ponendo, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = e^{x+y} - xy - 1.$$

Dimostrare che:

(1) per ogni $x_0 \in \,]-\infty, 0]$, esiste unico $y_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0, y_0) = 0$ ed inoltre l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione scalare $y(\,\cdot\,)$ di classe C^∞ su un intorno aperto di x_0 con $y(x_0) = y_0$ e, come conseguenza, l'insieme $Z_f \equiv f^{-1}(0)$ non è limitato in $\mathbb{R}^2$;

(2) se $x_0 = 0$, allora lo sviluppo di Taylor al second'ordine di tale $y(\,\cdot\,)$ in 0 è, per $x \to 0$,

$$y(x) = -x - x^2 + o(x^2).$$

Svolgimento. Innanzitutto, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{D}f(x, y) = \left(e^{x+y} - y, e^{x+y} - x\right)^{\mathsf{T}} \quad \text{e} \quad \mathrm{D}^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} - 1 \\ e^{x+y} - 1 & e^{x+y} \end{bmatrix}$$

ed in particolare, per ogni $x_0 \in \,]-\infty, 0]$, vale $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = e^{x_0 + y} - x_0 > -x_0 \geq 0$ quale che sia $y \in \mathbb{R}$.
(1) Infatti, per ogni $q \in \,]-\infty, 0]$, Z_f interseca la semiretta $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \leq 0,\ y = -x + q \right\}$ soltanto nel punto $(x(q), y(q))$ di ordinata $y(q) = -x(q) + q$ e di ascissa $x(q)$ data da

$$x(q) = \frac{1}{2}\left\{q - \sqrt{q^2 + 4(1 - e^q)}\right\}$$

ed inoltre la corrispondente mappa $]-\infty, 0] \to \,]-\infty, 0]$, $q \to x(q)$, è biunivoca in quanto continua e strettamente crescente con $x(0) = 0$ e tale che $\lim_{q \downarrow -\infty} x(q) = -\infty$: in conclusione, per ogni $x_0 \in \,]-\infty, 0]$, consideriamo quell'unico $q \in \,]-\infty, 0]$ tale che $x_0 = x(q)$ e poniamo $y_0 = -x_0 + q$.
(2) Se $x_0 = 0$, allora dev'essere $y(0) = 0$ e, usando che $\mathrm{D}f(0, 0) = (1, 1)^{\mathsf{T}}$ e che $\mathrm{D}^2 f(0, 0) = I_2 \equiv \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, è immediato ottenere $y'(0) = -1$ e $y''(0) = -2$. □

Esercizio 28. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto, sia $f \in C^1(\Omega;\mathbb{R})$ e sia $(x_0, y_0, z_0) \in Z_f \equiv f^{-1}(0)$. Dimostrare che, se $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, allora esiste un intorno aperto di (x_0, y_0, z_0) in Z_f che coincide col sostegno di una superficie regolare di rappresentazione parametrica $z = z(x, y)$ con $z(x_0, y_0) = z_0$, tale che $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z(x, y)) \neq 0$ ed il cui versore normale a tale superficie nel punto $(x, y, z(x, y))$ risulti

$$\operatorname{sgn}\Big(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z(x, y))\Big)\frac{\mathrm{D}f(x, y, z(x, y))}{\|\mathrm{D}f(x, y, z(x, y))\|_2}.$$

Svolgimento. Grazie al teorema di Dini, esistono due intorni aperti U di (x_0, y_0) in $\mathbb{R}^2$ e V di z_0 in $\mathbb{R}$ tali che esista una funzione scalare $z(\,\cdot\,,\cdot\,) \in C^1(U;V)$ con $z(x_0, y_0) = z_0$ e tale che, per ogni $(x, y) \in U$, $f(x, y, z(x, y)) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z(x, y)) \neq 0$; inoltre,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z(x, y))} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z(x, y))}.$$

A questo punto basta ricordare la formula generale per il versore normale $\nu(\,\cdot\,)$ alla superficie regolare di rappresentazione parametrica $z = z(x, y)$ nel punto $(x, y, z(x, y))$, $(x, y) \in U$, ovvero

$$\nu(x, y, z(x, y)) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\mathrm{D}z(x, y)\|_2^{\,2}}}\Big(-\frac{\partial z}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial z}{\partial y}(x, y), 1\Big)^{\mathsf{T}}. \qquad \square$$

Esercizio 29. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione di classe C^∞ definita ponendo, per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) = \arctan z + xy^2 + xz - y^3 - 1.$$

Verificare che l'equazione $f(x, y, z) = 0$ definisce implicitamente una funzione scalare $z(\,\cdot\,,\cdot\,)$ di classe C^∞ su un intorno aperto di $(x_0, y_0) \equiv (0, -1)$ con $z(0, -1) = 0$ e scriverne l'equazione del piano tangente alla propria superficie grafico nel punto $(0, -1, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Svolgimento. Abbiamo che $f(0, -1, 0) = 0$ e che, per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathrm{D}f(x, y, z) = \Big(y^2 + z, 2xy - 3y^2, \frac{1}{1 + z^2} + x\Big)^{\mathsf{T}}.$$

In particolare $\frac{\partial f}{\partial z}(0, -1, 0) = 1 \neq 0$ e così, in virtù del teorema di Dini, esistono due intorni aperti U di $(0, -1)$ in $\mathbb{R}^2$ e V dello zero in $\mathbb{R}$ tali che esista una funzione scalare $z(\,\cdot\,,\cdot\,) \in C^\infty(U;V)$ con $z(0, -1) = 0$ e tale che, per ogni $(x, y) \in U$, $f(x, y, z(x, y)) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z(x, y)) \neq 0$; inoltre,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z(x, y))} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z(x, y))}.$$

Pertanto $\frac{\partial z}{\partial x}(0, -1) = -1$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(0, -1) = 3$ ed in conclusione l'equazione del piano tangente alla superficie grafico di $z = z(x, y)$ nel punto $(0, -1, 0)$ è $z = -x + 3y + 3$. $\square$

Massimi e minimi vincolati

Richiami di Teoria

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \equiv (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ non vuoto e limitato, per il quale denotiamo $K \coloneqq \overline{\Omega} \equiv \operatorname{int}\Omega \cup \partial\Omega$, e sia $f\colon K \to \mathbb{R}$ continua. Sappiamo che esistono valor massimo $M \in \mathbb{R}$ e valor minimo $m \in \mathbb{R}$ assoluti per f (teorema di Weierstrass): esistono cioè (x_M, y_M) e (x_m, y_m) in K tali che, per ogni $(x, y) \in K$,

$$M = f(x_M, y_M) \geq f(x, y) \geq f(x_m, y_m) = m.$$

Supponiamo comunque che f sia di classe C^2 su tutto un insieme aperto A di $\mathbb{R}^2$ che contenga K. Allora, per individuare tali punti (x_M, y_M) e (x_m, y_m), conviene analizzare separatamente $f\big|_{\operatorname{int}\Omega}$ e $f\big|_{\partial\Omega}$.

$\boldsymbol{f}\big|_{\mathbf{int}\,\boldsymbol{\Omega}}$ L'insieme $\operatorname{int}\Omega$ è un aperto di $\mathbb{R}^2$ e quindi, se non vuoto, si tratta di risolvere un problema di ottimizzazione libera passando per lo studio prima dei punti stazionari per f, e poi della matrice hessiana di f valutata in ciascuno di essi, nella maniera già richiamata in precedenza.

$\boldsymbol{f}\big|_{\boldsymbol{\partial\Omega}}$ L'insieme $\partial\Omega$, detto in questo contesto *vincolo per* f, è un compatto non vuoto di $\mathbb{R}^2$ e così, nuovamente, f ammette punti di massimo e di minimo assoluti in $\partial\Omega$. Per trovare tali punti e confrontarli infine con quelli eventualmente trovati per f su $\operatorname{int}\Omega$ usiamo il fatto che, se $\partial\Omega$ risulta sufficientemente liscio, allora la derivata direzionale di f lungo la tangente a $\partial\Omega$ stesso calcolata in suddetti punti dev'esser nulla. Più precisamente, distinguiamo due situazioni notevoli.

- Il vincolo $\partial\Omega$ coincide col sostegno di una curva semplice e regolare $\varphi \in C^1(I; A)$ dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo (non vuoto): in simboli, $\partial\Omega = \varphi(I)$. Se $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ è un punto di massimo o di minimo per $f\big|_{\partial\Omega}$ e se esiste $t_0 \in \operatorname{int}(I)$ tale che $\varphi(t_0) = (x_0, y_0)$, allora t_0 è un punto stazionario per la funzione $(f \circ \varphi)\big|_{\operatorname{int}(I)}$ (teorema di Fermat): $\frac{d}{dt} f(\varphi(t))\big|_{t=t_0} = 0$, ovvero

  $$\mathrm{D}f(x_0, y_0) \cdot \varphi'(t) = 0.$$

  Per terminare occorre dunque confrontare successivamente il valore $f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ col valore che $f \circ \varphi$ assume su ∂I (cioè sull'estremo o sui due estremi di I).

  Osserviamo infine che, nel caso più generale in cui il vincolo $\partial\Omega$ coincida col sostegno di una curva semplice e regolare a tratti φ, il procedimento appena descritto può esser applicato rispetto a ciascuno di tali tratti per poi confrontare i valori ottenuti con quelli che $f \circ \varphi$ assume su ∂I e pure in corrispondenza di ogni punto singolare per φ.
- Il vincolo $\partial\Omega$ coincide con l'insieme degli zeri di una funzione regolare $g \in C^1(A; \mathbb{R})$: in simboli, $\partial\Omega = Z_g \equiv g^{-1}(0)$. Se $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ è un punto di massimo o di minimo per $f\big|_{\partial\Omega}$, allora esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ chiamato *moltiplicatore di Lagrange* tale che $(x_0, y_0, \lambda_0) \equiv ((x_0, y_0), \lambda_0) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$ sia un punto stazionario per la *funzione lagrangiana* $\mathcal{L} \in C^1(A \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ del problema di ottimizzazione in oggetto definita ponendo, per ogni $(x, y, \lambda) \equiv ((x, y), \lambda) \in A \times \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(x, y, \lambda) \doteq f(x, y) - \lambda g(x, y)$ (teorema dei moltiplicatori di Lagrange): $\mathrm{D}\mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$, ovvero

  $$\begin{cases} \mathrm{D}f(x_0, y_0) = \lambda_0 \, \mathrm{D}g(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Per funzioni scalari aventi più di due variabili reali tutto questo può esser generalizzato nel modo naturale e ben noto.

Massimi e minimi vincolati

Esercizi con Svolgimento

Esercizio 30. Sia $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione di classe C^∞ definita ponendo, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 - xy - y.$$

Posto $K = [0, 1]^2$, determinare i punti di massimo e quelli di minimo assoluti per $f\big|_K$ e calcolare quindi il valor massimo ed il valor minimo assoluti per $f\big|_K$.

Svolgimento. Ragioniamo separatamente per $f\big|_{]0,1[^2}$ e $f\big|_{\partial K}$.

$\boldsymbol{f}\big|_{\mathbf{]0,1[^2}}$ Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{D}f(x, y) = (2x - y, -x + 6y - 1)^\mathsf{T}$ e $\mathrm{D}^2 f(x, y) = \left[\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{smallmatrix}\right]$, dunque $(\frac{1}{11}, \frac{2}{11}) \in\,]0, 1[^2$ è l'unico punto stazionario nonché di minimo assoluto per $f\big|_{]0,1[^2}$ e $f(\frac{1}{11}, \frac{2}{11}) = -\frac{1}{11}$.

$\boldsymbol{f\big|_{\partial K}}$ *Caso* $x = 0$ *e* $y \notin \{0, 1\}$. La funzione $f(0, \cdot)\big|_{]0,1[}$ diventa $y \mapsto f(0, y) = 3y^2 - y$, $y \in]0, 1[$, dunque $\frac{1}{6} \in]0, 1[$ è l'unico punto stazionario nonché di minimo assoluto per $f(0, \cdot)\big|_{]0,1[}$ e $f(0, \frac{1}{6}) = -\frac{1}{12}$.

Caso $y = 1$ *e* $x \notin \{0, 1\}$. La funzione $f(\cdot, 1)\big|_{]0,1[}$ diventa $x \mapsto f(x, 1) = x^2 - x + 2$, $x \in]0, 1[$, dunque $\frac{1}{2} \in]0, 1[$ è l'unico punto stazionario nonché di minimo assoluto per $f(\cdot, 1)\big|_{]0,1[}$ e $f(\frac{1}{2}, 1) = \frac{7}{4}$.

Caso $x = 1$ *e* $y \notin \{0, 1\}$. La funzione $f(1, \cdot)\big|_{]0,1[}$ diventa $y \mapsto f(1, y) = 3y^2 - 2y + 1$, $y \in]0, 1[$, dunque $\frac{1}{3} \in]0, 1[$ è l'unico punto stazionario nonché di minimo assoluto per $f(1, \cdot)\big|_{]0,1[}$ e $f(1, \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$.

Caso $y = 0$ *e* $x \notin \{0, 1\}$. La funzione $f(\cdot, 0)\big|_{]0,1[}$ diventa $x \mapsto f(x, 0) = x^2$, $x \in]0, 1[$, la quale non ammette alcun punto stazionario (in $]0, 1[$).

Caso $x \in \{0, 1\}$ *e* $y \in \{0, 1\}$. Infine $f(0, 0) = 0$, $f(0, 1) = f(1, 1) = 2$ e $f(1, 0) = 1$.

In conclusione esistono due punti di massimo assoluto per $f\big|_K$, che sono $(0, 1)$ e $(1, 1)$, ed il valor massimo assoluto per $f\big|_K$ è $f(0, 1) = f(1, 1) = 2$; ed esiste uno ed un solo punto di minimo assoluto per $f\big|_K$, che è $(\frac{1}{11}, \frac{2}{11})$, ed il valor minimo assoluto di $f\big|_K$ è $f(\frac{1}{11}, \frac{2}{11}) = -\frac{1}{11}$. □

Esercizio 31. Siano $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ le funzioni di classe C^∞ definite ponendo, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = x^2 + 3y \quad \text{e} \quad g(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1.$$

Posto $K = Z_g \equiv g^{-1}(0)$, determinare i punti di massimo e quelli di minimo assoluti per $f\big|_K$ e calcolare il valor massimo ed il valor minimo assoluti per $f\big|_K$.

Svolgimento. L'insieme compatto $K \subseteq \mathbb{R}^2$ è l'ellisse verticale di centro l'origine, di semiasse minore 2 e di semiasse maggiore 3: in particolare, avendo parte interna vuota, K coincide col vincolo per f.

Risolviamo il problema di ottimizzazione in questione con entrambi i metodi richiamati.

Primo metodo: parametrizzazione del vincolo. Sia $\varphi\colon [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ la curva semplice e di classe C^∞ definita ponendo, per ogni $\vartheta \in [0, 2\pi[$,

$$\varphi(\vartheta) = \begin{bmatrix} 2\cos\vartheta \\ 3\sin\vartheta \end{bmatrix}$$

così che $K = \varphi([0, 2\pi[)$. Allora $f(\varphi(\vartheta)) = 4\cos^2\vartheta + 9\sin\vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi[$, dunque $f(\varphi(0)) \equiv f(2, 0) = 4$ e $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ sono i punti stazionari per $(f \circ \varphi)\big|_{]0,2\pi[}$ e $f(\varphi(\frac{\pi}{2})) \equiv f(0, 3) = 9$ mentre $f(\varphi(\frac{3\pi}{2})) \equiv f(0, -3) = -9$.

In conclusione esiste uno ed un solo punto di massimo assoluto per $f\big|_K$, che è $(0, 3)$, ed il valor massimo assoluto di $f\big|_K$ è $f(0, 3) = 9$; ed esiste uno ed un solo punto di minimo assoluto per $f\big|_K$, che è $(0, -3)$, ed il valor minimo assoluto di $f\big|_K$ è $f(0, -3) = -9$.

Secondo metodo: moltiplicatori di Lagrange. La funzione lagrangiana $\mathcal{L} \in C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ del problema di ottimizzazione in oggetto è $\mathcal{L}(x, y, \lambda) \equiv f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^2 + 3y - \lambda(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1)$, $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^3$, quindi il sistema (non-lineare) da risolvere è quello corrispondente a $\mathrm{D}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0$, ovvero

$$\begin{cases} 2x - \frac{\lambda x}{2} = 0 \\ 3 - \frac{2\lambda y}{9} = 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0 \end{cases}$$

per il quale è immediato verificare che debba essere $x = 0$ e, equivalentemente, o $y = 3$ oppure $y = -3$ da cui giustamente la stessa conclusione di sopra. □

Esercizio 32. Siano $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ le funzioni di classe C^∞ definite ponendo, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = xy \quad \text{e} \quad g(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 1.$$

Posto $K = Z_g \equiv g^{-1}(0)$, determinare i punti di massimo e quelli di minimo assoluti per $f\big|_K$ e calcolare il valor massimo ed il valor minimo assoluti per $f\big|_K$.

Svolgimento. L'insieme $K \subseteq \mathbb{R}^2$ è l'ellisse centrata nell'origine con assi nelle direzioni $y = x$ e $y = -x$ di cui il semiasse minore $2\sqrt{\frac{2}{3}}$ ed il semiasse maggiore $2\sqrt{2}$: in particolare, K coincide col vincolo per f.

Risolviamo l'esercizio direttamente col metodo dei moltiplicatori: la lagrangiana $\mathcal{L} \in C^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ del problema di ottimizzazione in oggetto è $\mathcal{L}(x, y, \lambda) \equiv f(x, y) - \lambda g(x, y) = xy - \lambda(x^2 - xy + y^2 - 1)$, $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^3$, quindi il sistema da risolvere è quello corrispondente a $\mathrm{D}\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0$, ovvero

$$\begin{cases} y - \lambda(2x - y) = 0 \\ x - \lambda(2y - x) = 0 \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono le quattro triplette $(1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1)$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ in corrispondenza delle quali $f(1, 1) = f(-1, -1) = 1$ e $f(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{3}$.

In conclusione esistono due punti di massimo assoluto per $f\big|_K$, che sono $(1, 1)$ e $(-1, -1)$, ed il valor massimo assoluto di $f\big|_K$ è $f(1, 1) = f(-1, -1) = 1$; ed esistono due punti di minimo assoluto per $f\big|_K$, che sono $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, ed il valor minimo assoluto di $f\big|_K$ è $f(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{3}$. □

Esercizio 33. Siano $f, g, h \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ le funzioni di classe C^∞ definite ponendo, per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) = x + 3y - z, \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z \quad \text{e} \quad h(x, y, z) = 2x + 4y - z.$$

Posto $K = Z_g \cap Z_h \equiv g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0)$, individuare i punti di massimo e quelli di minimo assoluti per $f\big|_K$ e calcolare il valor massimo ed il valor minimo assoluti per $f\big|_K$.

Svolgimento. Risolviamo il problema di ottimizzazione con entrambi i metodi richiamati.

Primo metodo: parametrizzazione del vincolo. Poiché, per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \in K$ se e solo se

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5 \\ z = 2x + 4y \end{cases}$$

consideriamo la curva semplice $\varphi\colon [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ definita ponendo, per ogni $\vartheta \in [0, 2\pi[$,

$$\varphi(\vartheta) = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{5}\cos\vartheta \\ 2 + \sqrt{5}\sin\vartheta \\ 10 + 2\sqrt{5}(\cos\vartheta + 2\sin\vartheta) \end{bmatrix}$$

così che $K = \varphi([0, 2\pi[)$. Allora $f(\varphi(\vartheta)) = -3 - \sqrt{5}(\cos\vartheta + \sin\vartheta)$, $\vartheta \in [0, 2\pi[$, dunque $f(\varphi(0)) \equiv f(1 + \sqrt{5}, 2, 10 + 2\sqrt{5}) = -3 - \sqrt{5}$ e $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ sono i punti stazionari per $(f \circ \varphi)\big|_{]0,2\pi[}$ e $f(\varphi(\frac{\pi}{4})) \equiv f(1+\frac{\sqrt{10}}{2}, 2+\frac{\sqrt{10}}{2}, 10+3\sqrt{10}) = -3-\sqrt{10}$ mentre $f(\varphi(\frac{5\pi}{4})) \equiv f(1-\frac{\sqrt{10}}{2}, 2-\frac{\sqrt{10}}{2}, 10-3\sqrt{10}) = -3+\sqrt{10}$.

In conclusione esiste uno ed un solo punto di massimo assoluto per $f\big|_K$, che è $(1-\frac{\sqrt{10}}{2}, 2-\frac{\sqrt{10}}{2}, 10-3\sqrt{10})$, ed il valor massimo assoluto di $f\big|_K$ è $-3 + \sqrt{10}$; ed esiste uno ed un solo punto di minimo assoluto per $f\big|_K$, che è $(1 + \frac{\sqrt{10}}{2}, 2 + \frac{\sqrt{10}}{2}, 10 + 3\sqrt{10})$, ed il valor minimo assoluto di $f\big|_K$ è $-3 - \sqrt{10}$.

Secondo metodo: moltiplicatori di Lagrange. La lagrangiana $\mathcal{L} \in C^\infty(\mathbb{R}^5;\mathbb{R})$ del problema in oggetto è $\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) \equiv f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) - \mu h(x, y, z) = x + 3y - z - \lambda(x^2 + y^2 - z) - \mu(2x + 4y - z)$, $(x, y, z, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^5$, quindi il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x - 2\mu = 0 \\ 3 - 2\lambda y - 4\mu = 0 \\ -1 + \lambda + \mu = 0 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \\ 2x + 4y - z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni $(1+\frac{\sqrt{10}}{2}, 2+\frac{\sqrt{10}}{2}, 10+3\sqrt{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}, 1-\frac{\sqrt{10}}{10})$ e $(1-\frac{\sqrt{10}}{2}, 2-\frac{\sqrt{10}}{2}, 10-3\sqrt{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10}, 1+\frac{\sqrt{10}}{10})$ conducono giustamente alla stessa conclusione di prima. □

Esercizio 34. Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$ e siano $f, g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ le funzioni date da, per ogni $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} {x_i}^2 \quad \text{e} \quad g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 1.$$

(1) Posto $K = Z_g \equiv g^{-1}(0)$, determinare il valor massimo ed il valor minimo assoluti per $f\big|_K$.

(2) Usare quanto scoperto per dimostrare che, per ogni $\boldsymbol{a} \equiv (a_1, \dots, a_n) \in [0, +\infty[^n$,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

e che vale l'uguaglianza se e solo se $a_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Svolgimento. **(1)** L'insieme $K \equiv S^n \subseteq \mathbb{R}^n$ è la sfera n-dimensionale di centro l'origine e di raggio unitario: in particolare, K coincide col vincolo per f. La lagrangiana $\mathcal{L} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{R})$ del problema in oggetto è $\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda) \equiv f(x_1, \dots, x_n) - \lambda g(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \lambda\big(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 1 \big)$, $(x_1, \dots, x_n, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}$, quindi il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} x_i \displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} {x_j}^2 = \lambda x_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 1. \end{cases}$$

Adesso, osservato che $f(\,\cdot\,) \geq 0$ su tutto $\mathbb{R}^n$ e a maggior ragione su K, possiamo già concludere che il valor minimo assoluto per $f\big|_K$ è lo zero (valore che f assume su tutti e soli i punti di K che abbiano almeno una componente nulla) e dunque, volendo individuare invece il valor massimo assoluto per $f\big|_K$, possiamo supporre per il sistema scritto sopra che $x_i \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$ ricavando così

$$\lambda = \prod_{j=2}^{n} {x_j}^2 = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{n} {x_j}^2 = \cdots = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n-1}}^{n} {x_j}^2 = \prod_{j=1}^{n-1} {x_j}^2$$

ovvero, in forma del tutto equivalente, ${x_1}^2 = {x_2}^2 = \cdots = {x_n}^2$ e cioè $x_i = \pm\sqrt{1/n}$ per ogni $i = 1, \dots, n$: in conclusione il valor massimo assoluto per $f\big|_K$ è $1/n^n$.

(2) Per $\boldsymbol{a} \neq 0$, basta considerare la n-upla $(x_1^{\boldsymbol{a}}, \dots, x_n^{\boldsymbol{a}}) \in K$ definita ponendo, per ogni $i = 1, \dots, n$,

$$x_i^{\boldsymbol{a}} = \sqrt{a_i} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right)^{-1/2}$$

ad ottenere che, grazie a quanto appena dimostrato,

$$f(x_1^{\boldsymbol{a}}, \dots, x_n^{\boldsymbol{a}}) \equiv \prod_{i=1}^{n} (x_i^{\boldsymbol{a}})^2 \equiv \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right)^{-n} \leq 1/n^n$$

che è la tesi notando fra l'altro che vale l'uguaglianza se e solo se $(x_i^{\boldsymbol{a}})^2 = 1/n$ per ogni $i = 1, \dots, n$. $\square$

Esercizio 35. Nel piano $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}^2_{(x,y)}$, un campo è percorso da un canale rettilineo di equazione $y = -x$. Un uomo parte dal punto $(0, 1)$, attinge acqua dal canale e la porta nel punto $(1, 1)$. Si trovi il punto o i punti in cui dev'esser presa l'acqua affinché il percorso totale sia minimo.

Svolgimento. È elementare constatare che si tratta di minimizzare sulla retta $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0 \}$ la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to]0,+\infty[$ definita ponendo, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+(1-y)^2} + \sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}$$

(mentre possiamo già osservare che f sia illimitata superiormente su di essa). Consideriamo per questo la funzione $h \equiv h_f\colon \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = f(x,-x) = \sqrt{2x^2+2x+1} + \sqrt{2x^2+2}.$$

Allora, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 0$ se e solo se $(2x+1)\sqrt{2x^2+2} = (-2x)\sqrt{2x^2+2x+1}$ da cui subito $x \in]-\frac{1}{2}, 0[$ e, procedendo, $3x^2+4x+1=0$ e cioè o $x=-1$ oppure $x=-\frac{1}{3}$.

In conclusione esiste uno ed un solo punto di minimo assoluto per h che è $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. □

Calcolo integrale secondo Lebesgue per funzioni di più variabili

Richiami di Teoria

Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{ 0 \}$ fissato. Sappiamo che esiste una σ-algebra $\mathcal{M}^n$ su $\mathbb{R}^n$, chiamata *σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue in* $\mathbb{R}^n$, ed esiste una misura non-negativa m^n su $\mathcal{M}^n$, chiamata *misura di Lebesgue n-dimensionale*, le quali godono delle due seguenti proprietà peculiari fra molteplici.

(1) Dati $(a_1,\dots,a_n)$, $(b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ con $a_i \le b_i$ per ogni $i=1,\dots,n$, il *plurintervallo* chiuso $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ appartiene a $\mathcal{M}^n$ e vale l'identità $\mathrm{m}^n([a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]) = \prod_{i=1}^n (b_i-a_i)$.

(2) Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$, E appartiene a $\mathcal{M}^n$ se e solo se, per ogni $\varepsilon \in]0,+\infty[$, esiste $A_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto ed esiste $C_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso tali che $C_\varepsilon \subseteq E \subseteq A_\varepsilon$ con $\mathrm{m}^n(A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) \le \varepsilon$.

Vengono definiti dunque i concetti nel senso di Lebesgue di insieme di misura nulla e di disuguaglianza ed uguaglianza quasi ovunque, di funzioni semplici e di funzioni misurabili, di funzioni integrabili e di funzioni sommabili, e vengono dimostrati a riguardo i seguenti teoremi fondamentali dove $E \in \mathcal{M}^n \setminus \{ \emptyset \}$ è fissato e dove, per ogni funzione $f\colon E \to \mathbb{R}$ integrabile (su E), viene denotato

$$\int_E f(x)\, d\mathrm{m}^n(x) \equiv \int_E f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \equiv \int_E f(x_1,\dots,x_n)\, dx_1\cdots dx_n.$$

Teoremi (di convergenza e di calcolo degli integrali multipli)**.**

Convergenza monotòna (Beppo Levi)**.** *Sia $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni da E in $\mathbb{R}$ integrabili. Se $\int_E f_0(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} > -\infty$ e se inoltre, per quasi ogni $x \in E$, $f_k(x) \le f_{k+1}(x)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi $f_k(x) \uparrow f(x) := \sup_{k'\in\mathbb{N}} f_{k'}(x)$ per $k \to +\infty$, allora*

$$\int_E f_k(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \uparrow \int_E f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \quad \text{per } k \to +\infty.$$

Lemma di Fatou. *Sia $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni da E in $\mathbb{R}$ integrabili. Se esiste una funzione $g\colon E \to \mathbb{R}$ sommabile tale che, per quasi ogni $x \in E$, $g(x) \le f_k(x)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora*

$$\int_E \liminf_{k\to+\infty} f_k(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \le \liminf_{k\to+\infty} \int_E f_k(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

Convergenza dominata (Lebesgue)**.** *Sia $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni da E in $\mathbb{R}$ integrabili. Se esiste una funzione $g\colon E \to [0,+\infty[$ sommabile tale che, per quasi ogni $x \in E$, $|f_k(x)| \le g(x)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e se esiste $f := \lim_{k\to+\infty} f_k$ quasi ovunque, allora*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_E f_k(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_E f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

Serie di funzioni. *Sia* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni da* E *in* $\mathbb{R}$ *integrabili. Se, per quasi ogni* $x \in E$, $f_k(x) \geq 0$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$, *allora*

$$\int_E \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_E f_k(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

Inoltre questa formula resta vera anche sotto l'ipotesi $\int_E \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\boldsymbol{x})|\, d\boldsymbol{x} \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} \int_E |f_k(\boldsymbol{x})|\, d\boldsymbol{x} < +\infty$.

Inversione dell'ordine d'integrazione (Fubini-Tonelli). *Sia* $n = 2$ *e sia* $f\colon \mathbb{R}^2_{(x,y)} \equiv \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \to \mathbb{R}$ *una funzione sommabile. Allora vale quanto segue.*

(1) *Per quasi ogni* $x \in \mathbb{R}$, *la funzione* $f(x,\cdot\,)$ *è sommabile su* $\mathbb{R}_y$ *e, per quasi ogni* $y \in \mathbb{R}$, *la funzione* $f(\,\cdot\,, y)$ *è sommabile su* $\mathbb{R}_x$.

(2) *La funzione* $\int_{\mathbb{R}} f(\,\cdot\,, y)\, dy$ *è sommabile su* $\mathbb{R}_x$ *e la funzione* $\int_{\mathbb{R}} f(x,\cdot\,)\, dx$ *è sommabile su* $\mathbb{R}_y$.

(3) *Valgono le due identità*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy\right] dx = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dx\right] dy.$$

Inoltre un analogo di questo risultato resta vero anche sostituendo opportunamente $\mathbb{R}^2$ *con un arbitrario sottoinsieme semplice o normale di* $\mathbb{R}^2$, *e più in generale per* $n \geq 3$.

Cambio di variabili per diffeomorfismo. *Sia* $f\colon E \to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile, siano* $A \equiv A_\omega$ *e* $B \equiv B_x$ *due aperti non vuoti di* $\mathbb{R}^n$ *con* $E \subseteq B$ *e sia* $g\colon A \to B$ *un diffeomorfismo di classe* C^1, *ovvero una funzione biunivoca* g *di classe* $C^1 \equiv C^1(A;B)$ *la cui inversa* g^{-1} *risulti di classe* $C^1 \equiv C^1(B;A)$. *Allora la funzione* $(f\circ g)\big|_{g^{-1}(E)}\colon g^{-1}(E) \to \mathbb{R}$ *è integrabile su* $g^{-1}(E) \subseteq A$ *e vale l'identità*

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_{g^{-1}(E)} f(g(\boldsymbol{\omega}))|\det \mathrm{J}_g(\boldsymbol{\omega})|\, d\boldsymbol{\omega}.$$

Derivazione sotto il segno d'integrale. *Sia* $I \subseteq \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}_t$ *un intervallo aperto e non vuoto, e sia* $f\colon I \times E \to \mathbb{R}$ *una funzione che soddisfa alle due seguenti proprietà.*

- *Per ogni* $t \in I$, $f(t,\cdot\,)$ *è integrabile su* E.
- *Per quasi ogni* $x \in E$, $f(\,\cdot\,, x)$ *è di classe* C^1 *su* I.

Se esistono due funzioni $g_0, g_1\colon E \to [0,+\infty[$ *sommabili tali che, per ogni* $t \in I$ *e per quasi ogni* $x \in E$,

$$|f(t,x)| \leq g_0(x) \quad e \quad \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g_1(x)$$

allora la funzione $\int_E f(\,\cdot\,, \boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$ *è a sua volta di classe* C^1 *su* I *ed ivi vale l'identità*

$$\frac{d}{dt}\int_E f(\,\cdot\,, \boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(\,\cdot\,, \boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

Inoltre un analogo di questo risultato resta vero anche con un plurintervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}^k \equiv \mathbb{R}^k_t$, $k \geq 2$.

A proposito del precedente teorema di cambio di variabili per diffeomorfismo, ricordiamo infine le formule classiche per il cambio di variabili in *coordinate polari* in $\mathbb{R}^2$ e per il cambio di variabili in *coordinate sferiche* ed in *coordinate cilindriche* in $\mathbb{R}^3$ (con le medesime notazioni dell'enunciato).

Coordinate polari. Per $n = 2$, consideriamo $A \equiv A_{(\rho,\vartheta)} :=]0, +\infty[_\rho \times]0, 2\pi[_\vartheta$ e $B \equiv B_{(x,y)} := \mathbb{R}^2_{(x,y)} \setminus \sigma$ dove $\sigma := [0, +\infty[_x \times \{ 0 \}_y$ (che ha $\mathrm{m}^2(\sigma) = 0$) e definiamo $g\colon A \to B$ ponendo, per ogni $(\rho, \vartheta) \in A$,

$$g(\rho, \vartheta) = \begin{bmatrix} \rho \cos \vartheta \\ \rho \sin \vartheta \end{bmatrix}.$$

Allora, per ogni $(\rho, \vartheta) \in A$, $\det \mathrm{J}_g(\rho, \vartheta) = \rho > 0$ e così, poiché $g^{-1}(E \setminus \sigma) = g^{-1}(E)$, otteniamo l'identità

$$\iint_E f(x, y)\, dxdy \equiv \iint_{E\setminus\sigma} f(x, y)\, dxdy = \iint_{g^{-1}(E)} f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \rho\, d\rho d\vartheta.$$

Coordinate sferiche. Per $n = 3$, consideriamo $A \equiv A_{(\rho,\vartheta,\varphi)} :=]0, +\infty[_\rho \times]0, 2\pi[_\vartheta \times]0, \pi[_\varphi$ e $B \equiv B_{(x,y,z)} := \mathbb{R}^3_{(x,y,z)} \setminus \Sigma$ dove $\Sigma := [0, +\infty[_x \times \{ 0 \}_y \times \mathbb{R}_z$ ($\mathrm{m}^3(\Sigma) = 0$) e definiamo $g\colon A \to B$ ponendo, per ogni $(\rho, \vartheta, \varphi) \in A$,

$$g(\rho, \vartheta, \varphi) = \begin{bmatrix} \rho \cos \vartheta \sin \varphi \\ \rho \sin \vartheta \sin \varphi \\ \rho \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Allora, per ogni $(\rho, \vartheta, \varphi) \in A$, $\det \mathrm{J}_g(\rho, \vartheta, \varphi) = \rho^2 \sin \varphi > 0$ e così otteniamo l'identità

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_{g^{-1}(E)} f(\rho \cos \vartheta \sin \varphi, \rho \sin \vartheta \sin \varphi, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi\, d\rho d\vartheta d\varphi.$$

Coordinate cilindriche. Per $n = 3$, consideriamo $A \equiv A_{(\rho,\vartheta,t)} :=]0, +\infty[_\rho \times]0, 2\pi[_\vartheta \times \mathbb{R}_t$ e $B \equiv B_{(x,y,z)} := \mathbb{R}^3_{(x,y,z)} \setminus \Sigma$ dove $\Sigma := [0, +\infty[_x \times \{ 0 \}_y \times \mathbb{R}_z$ ($\mathrm{m}^3(\Sigma) = 0$) e definiamo $g\colon A \to B$ ponendo, per ogni $(\rho, \vartheta, t) \in A$,

$$g(\rho, \vartheta, t) = \begin{bmatrix} \rho \cos \vartheta \\ \rho \sin \vartheta \\ t \end{bmatrix}.$$

Allora, per ogni $(\rho, \vartheta, t) \in A$, $\det \mathrm{J}_g(\rho, \vartheta, t) = \rho > 0$ e così otteniamo l'identità

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_{g^{-1}(E)} f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, t) \rho\, d\rho d\vartheta dt.$$

Calcolo integrale secondo Lebesgue per funzioni di più variabili

Esercizi con Svolgimento

Esercizio 36. Siano $E, T \subseteq \mathbb{R}^2$ i sottoinsiemi y-semplici di $]0, 1[^2$ dati da

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < x < 1,\, x^2 < y < \sqrt{x} \right\} \quad \text{e} \quad T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < x < 1,\, 0 < y < x \right\}.$$

Calcolare gli integrali doppi $\iint_E xy\, dxdy$ e $\iint_T xy\, dxdy$.

Svolgimento. Grazie al teorema di Fubini-Tonelli (per sottoinsiemi y-semplici del piano),

$$\iint_E xy\, dxdy = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\, dy \right] dx = \int_0^1 x \left. \frac{y^2}{2} \right|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^5)\, dx = \frac{1}{12}$$

e, analogamente,

$$\iint_T xy\, dxdy = \int_0^1 x \left[\int_0^x y\, dy \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{8}.$$

□

Esercizio 37. Posto $B_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1 \}$ dimostrare che, per ogni $\alpha \in]0,+\infty[$, l'integrale doppio $\iint_{B_1} (x^2+y^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\, dxdy \in [0,+\infty]$ è finito se e solo se $\alpha < 2$ e, quindi, calcolarlo.

Svolgimento. Per ogni $r \in]0,1[$, definiamo $B_r = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<r^2 \}$ in modo che

$$\iint_{B_1} (x^2+y^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\, dxdy = \lim_{r\downarrow 0} \iint_{B_1\setminus B_r} (x^2+y^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\, dxdy$$

e così, grazie al teorema di cambio di variabili in coordinate polari e a quello di Fubini-Tonelli,

$$\iint_{B_1\setminus B_r} (x^2+y^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\, dxdy = \int_r^1\int_0^{2\pi} (\rho^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\rho\, d\rho d\vartheta = \int_0^{2\pi}\left[\int_r^1 \rho^{1-\alpha}\, d\rho\right] d\vartheta = \begin{cases} \frac{2\pi(1-r^{2-\alpha})}{2-\alpha}, & \text{se } \alpha \neq 2, \\ -\log r, & \text{se } \alpha = 2, \end{cases}$$

ed in conclusione

$$\iint_{B_1} (x^2+y^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\, dxdy = \begin{cases} \frac{2\pi}{2-\alpha}, & \text{se } \alpha < 2, \\ +\infty, & \text{se } \alpha \geq 2. \end{cases}$$ □

Esercizio 38. **(a)** Calcolare l'integrale triplo $\int_0^2\int_0^1\int_0^3 x^2y^3z\, dxdydz$.

(b) Fissato $a \in]0,+\infty[$ e posto $E_a = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x>0,\ z^2 < x^2+y^2 < ax \}$, verificare che

$$\iiint_{E_a} \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz = \frac{3\pi a^4}{16}.$$

Svolgimento. **(a)** Grazie al teorema di Fubini-Tonelli (in $\mathbb{R}^3$ e in $\mathbb{R}^2$),

$$\int_0^2\int_0^1\int_0^3 x^2y^3z\, dxdydz = \int_0^2 x^2\left[\int_0^1 y^3\Big(\int_0^3 z\, dz\Big) dy\right] dx = \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3} = 3.$$

(b) Osserviamo che $E_a = \{ (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, t) \in \mathbb{R}^3 \mid |\vartheta| < \frac{\pi}{2},\ 0<\rho<a\cos\vartheta,\ |t|<\rho \}$ e così, grazie al teorema di cambio di variabili in coordinate cilindriche con $\vartheta \in]-\pi,\pi[$ (e $\Sigma :=]-\infty,0]_x \times \{0\}_y \times \mathbb{R}_z$) e grazie al teorema di Fubini-Tonelli,

$$\iiint_{E_a} \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{a\cos\vartheta}\Big(\int_{-\rho}^{+\rho} \rho^2\, dt\Big) d\rho\right] d\vartheta = \frac{a^4}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^4\vartheta\, d\vartheta = a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\vartheta\, d\vartheta$$

ed infine usiamo che, per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$, $\cos^2\vartheta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\vartheta)$ quindi $\cos^4\vartheta = \frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\vartheta + \frac{1}{8}\cos 4\vartheta$. □

Esercizio 39. Posto $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0<x<y<2x,\ 1<xy<2 \}$, calcolare l'area $\mathrm{m}^2(E)$ di E e l'integrale doppio $\iint_E (x+y)\, dxdy$.

Svolgimento. Sia $g\colon]1,2[^2_{(u,v)} \to E_{(x,y)}$ la funzione definita ponendo, per ogni $(u,v) \in]1,2[^2$,

$$g(u,v) = \begin{bmatrix} \sqrt{u/v} \\ \sqrt{uv} \end{bmatrix}.$$

Allora g è un diffeomorfismo di classe C^1 d'inversa $g^{-1}\colon E_{(x,y)} \to]1,2[^2_{(u,v)}$ data da, per ogni $(x,y) \in E$,

$$g^{-1}(x,y) = \begin{bmatrix} xy \\ y/x \end{bmatrix}$$

e di matrice jacobiana $\mathrm{J}_g(u,v) = \left[\begin{smallmatrix} 1/2\sqrt{uv} & -\sqrt{u}/2v\sqrt{v} \\ \sqrt{v}/2\sqrt{u} & \sqrt{u}/2\sqrt{v} \end{smallmatrix}\right]$, che ha $\det \mathrm{J}_g(u,v) = 1/2v$, per ogni $(u,v) \in]1,2[^2$: così, grazie al teorema di cambio di variabili per diffeomorfismo e al teorema di Fubini-Tonelli,

$$\mathrm{m}^2(E) \equiv \iint_E 1\, dxdy = \iint_{]1,2[^2} \frac{1}{2v}\, dudv = \frac{1}{2}\int_1^2\left[\int_1^2 \frac{1}{v}\, dv\right] du = \frac{1}{2}\log 2$$

e, analogamente,

$$\iint_E (x+y)\,dxdy = \iint_{]1,2[^2} \Big(\sqrt{u/v}+\sqrt{uv}\Big)\frac{1}{2v}\,dudv = \int_1^2 u^{\frac12}\Big[\int_1^2 \frac12\Big(v^{-\frac32}+v^{-\frac12}\Big)dv\Big]du = \frac{4-\sqrt2}{3}. \ \square$$

Esercizio 40. Dimostrare che:

(1) per ogni $\alpha \in]0,+\infty[$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$;

(2) per ogni $t \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2-t^2/x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|t|}$.

Svolgimento. **(1)** Mostriamo più precisamente che, per ogni $r \in]0,+\infty[$,

$$\int_{-r}^{+r} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}(1-e^{-\alpha r^2})}.$$

Infatti, grazie al teorema di Fubini-Tonelli e al teorema di cambio di variabili in coordinate polari,

$$\begin{aligned}\Big(\int_{-r}^{+r} e^{-\alpha x^2} dx\Big)^2 &\equiv \Big(\int_{-r}^{+r} e^{-\alpha x^2} dx\Big)\Big(\int_{-r}^{+r} e^{-\alpha y^2} dy\Big)\\ &= \iint_{\{\,x^2+y^2<r^2\,\}} e^{-\alpha(x^2+y^2)}\,dxdy\\ &= \int_0^{2\pi}\Big[\int_0^r \rho e^{-\alpha\rho^2} d\rho\Big] d\vartheta\\ &= \frac{\pi}{\alpha}(1-e^{-\alpha r^2}).\end{aligned}$$

(2) L'idea naturale è quella di usare il teorema di derivazione sotto il segno d'integrale. Sia per questo $f\colon \mathbb{R}_t \times]0,+\infty[_x \to]0,+\infty[$ la funzione di classe C^∞ definita ponendo, per ogni $(t,x) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$,

$$f(t,x) = e^{-x^2-t^2/x^2}.$$

In effetti, per ogni $(t,x) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$, $|f(t,x)| \le e^{-x^2}$ e quindi è ben posta e continua la funzione $F\colon \mathbb{R}_t \to]0,+\infty[$ definita ponendo, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$F(t) = \int_0^{+\infty} f(t,x)\,dx.$$

Notiamo inoltre che F è pari, ovvero $F(-\cdot) = F(\,\cdot\,)$, e che, grazie alla precedente identità notevole,

$$F(0) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac12 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

pertanto in definitiva la tesi diventa che, per ogni $t \in]0,+\infty[$, $F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2t}$ e cioè $F'(t) = -2F(t)$. Ma infatti, per ogni fissato $r \in]0,+\infty[$ e per ogni $(t,x) \in]r,+\infty[\times]0,+\infty[$, è $1/t \le 1/r$ e quindi

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\Big| = \frac{2t}{x^2} e^{-x^2-t^2/x^2} \equiv \frac{2e^{-x^2}}{t}\Big(\frac{t^2}{x^2} e^{-t^2/x^2}\Big) \le \frac{2}{re} e^{-x^2}$$

(per ogni $z \in \mathbb{R}$, $ze^{-z} \le e^{-1}$) e così, grazie appunto al teorema di derivazione sotto il segno d'integrale, $F\big|_{]r,+\infty[}$ è in realtà di classe C^1 (anzi C^∞) e, per ogni $t \in]r,+\infty[$,

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx = -2\int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2} e^{-x^2-t^2/x^2}\,dx = -2\int_0^{+\infty} e^{-t^2/y^2-y^2}\,dy = -2F(t)$$

da cui subito la tesi per arbitrarietà di r. $\square$

Esercizio 41. Sia $F\colon]-1,1[_t \to]0,+\infty[$ la funzione definita ponendo, per ogni $t \in]-1,1[$,

$$F(t) = \int_0^1 \log\bigl(2 - x^2t^2\bigr)\,dx.$$

Verificare che F è di classe C^2 e concava su tutto $]-1,1[$ con $F'(0) = 0$.

Svolgimento. L'idea è quella di usare il teorema di derivazione sotto il segno d'integrale. Sia per questo $f\colon]-1,1[_t \times]0,1[_x \to]0,+\infty[$ la funzione di classe C^∞ definita ponendo, per ogni $(t,x) \in]-1,1[\times]0,1[$,

$$f(t,x) = \log\bigl(2 - x^2t^2\bigr).$$

Allora, per ogni $(t,x) \in]-1,1[\times]0,1[$, $0 < f(t,x) \le \log 2$ e quindi F è a valori in $]0,\log 2[$, è continua e

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| = \frac{2x^2|t|}{2 - x^2t^2} \le 2x^2 \quad \text{e} \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x)\right| = 2x^2\frac{2 + x^2t^2}{(2 - x^2t^2)^2} \le 6x^2$$

implicano che, grazie appunto al teorema di derivazione sotto il segno d'integrale, F sia in realtà di classe C^2 (anzi C^∞) con, per ogni $t \in]-1,1[$,

$$F'(t) = \int_0^1 \left(-\frac{2x^2t}{2 - x^2t^2}\right)dx \quad \text{e} \quad F''(t) = \int_0^1 (-2x^2)\frac{2 + x^2t^2}{(2 - x^2t^2)^2}\,dx$$

ed in particolare $F'(0) = 0$ e $F''(\,\cdot\,) \le 0$ come volevasi dimostrare. □

Esercizio 42. Dimostrare che, per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{T\to+\infty} \int_0^T \frac{\sin ax}{x}\,dx = \begin{cases} \pi/2, & \text{se } a > 0, \\ 0, & \text{se } a = 0, \\ -\pi/2, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Visto che per $a = 0$ la tesi è evidente mentre se $a \neq 0$ allora, per ogni $T \in [0,+\infty[$,

$$\int_0^T \frac{\sin ax}{x}\,dx = \operatorname{sgn}(a)\int_0^{|a|T} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

possiamo supporre senz'altro che $a = 1$ e, di conseguenza, quanto basta verificare è

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi n} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

poiché, per ogni $n, T \to +\infty$ con $2\pi n \le T < 2\pi(n+1)$,

$$\left|\int_{2\pi n}^T \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} (1/x)\,dx = \log(1 + \frac{1}{n}) \le \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Osserviamo per questo che vale $1/x = \int_0^{+\infty} e^{-xu}\,du$ per ogni $x \in]0,+\infty[$ e che così, grazie anche al teorema di Fubini-Tonelli applicato per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi n} \frac{\sin x}{x}\,dx \equiv \int_0^{2\pi n} \sin x \left[\int_0^{+\infty} e^{-xu}\,du\right]dx = \int_0^{+\infty}\left[\int_0^{2\pi n} \sin(x)e^{-xu}\,dx\right]du$$

dove, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $u \in [0,+\infty[$, un'integrazione fatta per parti due volte dà

$$\int_0^{2\pi n} \sin(x)e^{-xu}\,dx = \frac{1 - e^{-2\pi nu}}{1 + u^2}$$

ed in conclusione, finalmente,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi n} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\pi nu}}{1 + u^2}\,du = \frac{\pi}{2}.$$ □

Esercizio 43. Utilizzare l'identità notevole $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$ per verificare che:

(a) $\int_0^1 \frac{1}{1-x} \log(\frac{1}{x})\, dx = \pi^2/6$;

(b) $\int_0^1 \frac{1}{1+x} \log(\frac{1}{x})\, dx = \pi^2/12$;

(c) per ogni $p \in]-1, +\infty[$, $\int_0^1 \frac{x^p}{1-x} \log(\frac{1}{x})\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/(n+p)^2$.

Svolgimento. Ricordiamo anzitutto che, per ogni $c \in \mathbb{R}$ con $|c| < 1$,

$$\frac{1}{1-c} = \sum_{k=0}^{+\infty} c^k.$$

(a) Per ogni $k \in \mathbb{N}$, sia $f_k \colon]0,1[_x \to]0, +\infty[$ la funzione regolare definita ponendo, per ogni $x \in]0,1[$,

$$f_k(x) = x^k \log(1/x).$$

Allora, grazie al teorema di convergenza monotòna per serie di funzioni non-negative,

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} \log(1/x)\, dx \equiv \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 f_k(x)\, dx \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 x^k \log(1/x)\, dx$$

e adesso osserviamo che, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 x^k \log(1/x)\, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\left(\log(1/x) + \frac{1}{k+1}\right)\Bigg|_{x \downarrow 0}^{x=1} = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

(b) Visto che, per ogni $x \in]0,1[$, $1/(1+x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$ otteniamo in modo del tutto analogo

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} \log(1/x)\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$$

ed ora le due uguaglianze $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/(2n)^2 = \frac{1}{4}(\frac{\pi^2}{6})$, e cioè $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/(2n-1)^2 = \frac{3}{4}(\frac{\pi^2}{6})$, danno

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}\right) = \frac{\pi^2}{12}.$$

(c) A questo punto basta scrivere, per ogni $x \in]0,1[$, $x^p/(1-x) = x^p\left(\frac{1}{1-x}\right)$ e quindi, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 x^{k+p} \log(1/x)\, dx = \frac{1}{(k+1+p)^2}.$$

□

Riferimenti bibliografici

[1] E. Giusti. *Analisi matematica 2.* Bollati Boringhieri, prima edizione, 1984.

[2] M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa. *Matematica. Calcolo infinitesimale e algebra lineare.* Zanichelli, prima edizione, 2004.